主曲率のひとつが一定である完備な曲面上の臍点

本田　淳史*†

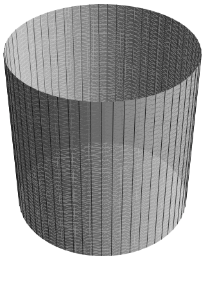
東京工業大学大学院理工学研究科

概要

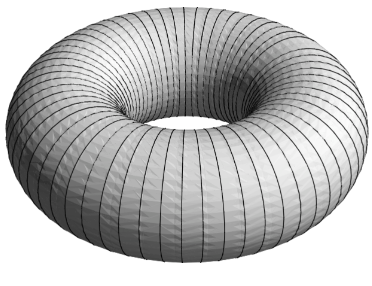
本稿では，3 次元空間型の主曲率のひとつが一定である完備な曲面で臍点を許容するものの分類結果を紹介する．また，ローレンツ空間型の空間的曲面の場合の同様の分類も述べる．さらに，その応用として得られる de Sitter 空間の全臍的球面の特徴付けについても記述する．最後に，その焦面と外的平坦フロントの関係も紹介する．

1　背景と主結果

Hartman-Nirenberg は 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平坦な曲面で完備であるものは柱面に限ることを示した ([7], [15])．この結果は，ひとつの主曲率が常に 0 である完備な曲面の分類とみなすこともできる．Shiohama-Takagi [19] は $\boldsymbol{R}^3$ のひとつの主曲率が 0 でない一定値を持つ曲面で完備であるものは，全臍的であるものを除けば臍点を許容しないことを示した．



完備な平坦曲面 (円柱面).



ひとつの主曲率が 0 でない一定値を持つ曲面.

図 1　$\boldsymbol{R}^3$ のひとつの主曲率が一定な曲面.

* 10d00059@math.titech.ac.jp

† 本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:23・9534) の助成を受けたものである.

一方，3 次元双曲空間 H^3 の場合は $\boldsymbol{R}^3$ とは異なり，ひとつの主曲率が常に 0 である曲面 (外的平坦曲面) で完備なものには非自明な例が存在することが知られている．そのような例を最初に構成したのは Nomizu [14] であり，それらの例は臍点を許容するものも含むことに注意しておく．その後の H^3 の完備外的平坦曲面の性質の研究や分類については [4, 2, 3, 8] を参照いただきたい．

Aledo-Gálvez [1] はひとつの主曲率が一定値 c ($c \neq 0$) である H^3 の完備な曲面を研究し，もし $|c| > 1$ の場合には，Shiohama-Takagi 型の結果が成り立つことを示した．すなわち，$|c| > 1$ を満たす定数 c に対し，ひとつの主曲率が一定値 c である H^3 の完備な曲面は，全臍的であるものを除けば臍点を許容しないことを示した．さらに，$|c| \leq 1$ の場合には，ひとつの主曲率が一定値 c である H^3 の全臍的でない完備な曲面で臍点を許容する例を構成し，Shiohama-Takagi 型の結果は成り立たないことを指摘した．

このような結果をふまえると，これまでに注目されてきたのは，一つの主曲率が一定な完備な曲面に ‘非自明な’ 例が存在するかどうかと考えられる．そこで，Nomizu [14] や Aledo-Gálvez [1] の結果に基づき，ここで述べる ‘非自明な’ 曲面のクラスを次のようにして導入する．

定義 1.1 (Nomizu-Aledo-Gálvez 曲面). 定数 c に対して，次の条件

(1) 完備であり全臍的でない
(2) 臍点集合が空でない
(3) ひとつの主曲率が一定な c である

を満たす曲面を標数 c の **Nomizu-Aledo-Gálvez 曲面**，または **NAG-c 曲面**と呼ぶ．

本稿では，NAG 曲面の存在・非存在について議論する．上記の結果をまとめると，$\boldsymbol{R}^3$ において NAG-c 曲面が存在するための必要十分条件は $c = 0$ であり，H^3 の場合には $|c| \leq 1$ となる．

3 次元球面 S^3 の場合，O’Neill-Stiel の定理 [17] により，ひとつの主曲率が常に 0 である曲面で完備なものは全臍的なものに限ることが知られている．つまり，S^3 には NAG-0 曲面は存在しない．しかしながら，S^3 は標数が 0 でない NAG 曲面を許容するかどうかは知られていなかった．そこで講演者は次のような結果を得た．

定理 A. *3 次元球面 S^3 には標数が 0 でない NAG 曲面は存在しない．すなわち，0 でない定数 c に対し，ひとつの主曲率が一定値 c である S^3 の完備な曲面は，全臍的であるものを除けば臍点を許容しない．*

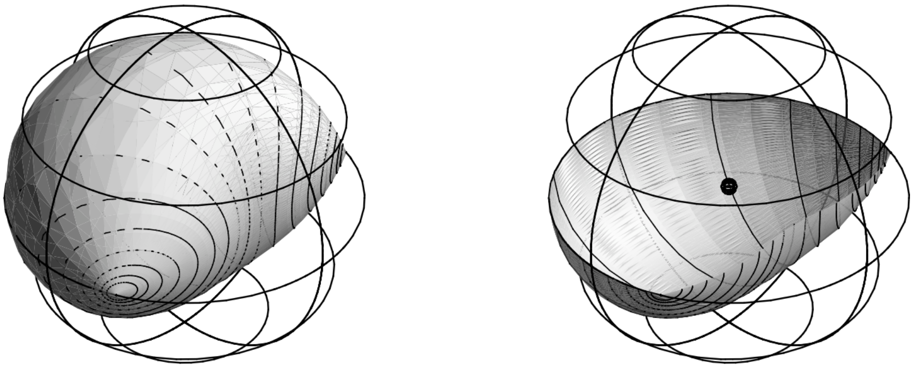
	H^3	$\boldsymbol{R}^3$	S^3
$\lvert c\rvert = 0$	$\exists$ NAG	$\exists$ NAG	$\nexists$ NAG
$0 < \lvert c\rvert \leq 1$		$\nexists$ NAG	$\nexists$ NAG (定理 A)
$\lvert c\rvert > 1$	$\nexists$ NAG		

表 1　NAG 曲面の存在・非存在.

また，ローレンツ空間型の場合にはどうかという自然な疑問が浮かび上がる．空間的曲面で定義 1.1 の条件 (1) から (3) を満たすとき**空間的 NAG** であると定める．このとき，次が従う．

定理 B. 定数 c は $|c| < 1$ を満たすとする．このとき，3 次元 *de Sitter* 空間 S^3_1 には標数 c の空間的 *NAG* 曲面は存在しない．すなわち，ひとつの主曲率が一定値 c である S^3_1 の完備な空間的曲面は，全臍的であるものを除けば臍点を許容しない．

他の場合，すなわち S^3_1 の空間的 NAG-c 曲面 ($|c| < 1$)，Lorentz-Minkowski 空間 $\boldsymbol{R}^3_1$ や anti-de Sitter 空間 $\tilde{H}^3_1$ の空間的 NAG 曲面については例を構成することができる (例えば S^3_1 の空間的 NAG-1 曲面の例は図 2 参照)．これらをまとめると表 2 を得る．



全体図.　　半分割.

図 2　S^3_1 の空間的 NAG-1 曲面 (ただし，この図は S^3_1 のホロボールモデル [5, 6] を用いている).

	$\tilde{H}^3_1$	$\boldsymbol{R}^3_1$	S^3_1
$0 \leqq \lvert c\rvert < 1$	$\exists$ NAG	$\exists$ NAG	$\nexists$ NAG (定理 B)
$\lvert c\rvert \geqq 1$			$\exists$ NAG (図 2)

表 2　空間的 NAG 曲面の存在・非存在.

2　応用

空間型 $\boldsymbol{R}^3, S^3, H^3$ にはひとつの主曲率が一定であるコンパクトな曲面が豊富に存在する (図 3 参照). しかしローレンツ空間型の場合, コンパクトな例は自明なものに限ることがわかる.

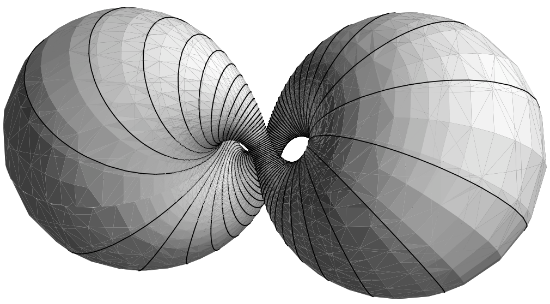


図 3　S^3 のひとつの主曲率が一定値 $\sqrt{3}$ であるトーラス (ただし, この図は $(1,0,0,0) \in S^3 \subset \boldsymbol{R}^4$ からの立体射影を用いている).

定理 C. ローレンツ空間型のひとつの主曲率が一定であるコンパクトな空間的曲面は 3 次元 *de Sitter* 空間の全臍的空間的球面に限る.

定理 C の証明の概略は以下の通りである. 定理 B により, ひとつの主曲率が一定な c $(|c| < 1)$ である S^3_1 の全臍的でない完備な空間的曲面は, 臍点を許容しない. このとき, そのような曲面は双曲空間 H^3 の完備な曲線 $\gamma = \gamma(v)$ を用いて以下の写像

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\,(c\gamma(v) + (\cos u)\,\boldsymbol{e}_1(v) - (\sin u)\,\boldsymbol{e}_2(v))$$

によりすべて構成される. ここで, $\{\boldsymbol{e}_1(v), \boldsymbol{e}_2(v)\}$ は $\gamma(v)$ の法平面の正規直交枠場である. このとき, H^3 の正則閉曲線はその曲率関数の値が 1 以上の点を必ず持つことから定理 C を得る.

3　焦面が外的平坦である曲面

ひとつの主曲率が一定である曲面は焦面 (平行曲面の特異点の軌跡) の観点からも興味深い．内的に平坦な曲面 (より一般にフロント) の焦面は内的に平坦である ($\boldsymbol{R}^3$ の場合は [16]，H^3 の場合は [18]，S^3 の場合は [13] 参照)．類似の結果が外的平坦曲面に対しても成立する．すなわち，外的平坦曲面 (より一般にフロント) の焦面は外的平坦である．しかし逆に，焦面が外的平坦フロントを与えるような曲面は外的平坦であるとは限らず，回転面やひとつの主曲率が一定である曲面がそうである．そこで，焦面が外的平坦フロントを与えるような曲面はどのくらいあるのかという問いに対し，次のような結果を得た．

定理 D. 空間正則曲線の法平面内の正則曲線をもとの曲線に沿って平行移動して得られる曲面に対して，その焦面は外的平坦フロントである．逆に，焦面が外的平坦フロントを与えるような曲面はこれらに尽きる．

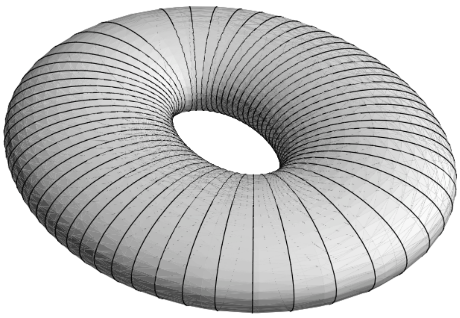


図 4　$\boldsymbol{R}^3$ の焦面が外的平坦フロントを与える曲面.

また，回転面やひとつの主曲率が一定である曲面は，焦面が外的平坦フロントを与えるような Weingarten 曲面として特徴付けられる．

参考文献

[1] J. A. Aledo, J. A. Gálvez, Complete surfaces in the hyperbolic space with a constant principal curvature, Math. Nachr. **278** (2005), 1111–1116.

[2] K. Abe and A. Haas, Isometric immersions of H^n into H^{n+1}, Proc. Sympos. Pure Math. **54**, Part 3, 23–30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[3] K. Abe, H. Mori and H. Takahashi, A parametrization of isometric immersions between hyperbolic spaces, Geom. Dedicata **65** (1997), 31–46.

[4] D. Ferus, On isometric immersions between hyperbolic spaces, Math. Ann. **205** (1973), 193–200.

[5] S. Fujimori, Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 289–320.

[6] S. Fujimori, Spacelike mean curvature 1 surfaces of genus 1 with two ends in de Sitter 3-space, Kyushu J. Math. **61** (2007), 1–20.

[7] P. Hartman and L. Nirenberg, On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, Amer. J. Math. **81** (1959), 901–920.

[8] A. Honda, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), 171–193.

[9] A. Honda, Complete surfaces one of whose principal curvatures is constant, submitted.

[10] A. Honda, Totally sub-parabolic surfaces and inverse problem for caustics of flat fronts, in preparation.

[11] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.

[12] S. Izumiya, D. H. Pei, T. Sano and E. Torii, Evolutes of hyperbolic plane curves, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **20** (2004), 543–550.

[13] Y. Kitagawa and M. Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3, Geom. Dedicata **155** (2011), 105–140.

[14] K. Nomizu, Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space, Math. Ann. **205** (1973), 181–192.

[15] W. S. Massey, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space, Tohoku Math. J. **14** (1962), 73–79.

[16] S. Murata and M. Umehara, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, J. Differential Geom. **82** (2009), 279–316.

[17] B. O'Neill and E. Stiel, Isometric immersions of constant curvature manifolds, Michigan. Math. J. **10** (1963), 335–339.

[18] P. Roitman, Flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics, Tohoku Math. J. **59** (2007) 21–37.

[19] K. Shiohama, and R. Takagi, A characterization of a standard torus in E^3, J. Differential Geometry **4** (1970), 477–485.