

# 無限次元シンプレクティックベクトル空間の Hamilton 微分同相群上の Hofer 距離の構成\*

入江 博  
東京電機大学

## 概要

Hofer [1] は, シンプレクティックベクトル空間  $\mathbb{R}^{2n}$  上のコンパクトな台をもつ Hamilton 関数の族から定義される Hamilton 微分同相群上に両側不変距離 (Hofer 距離) を定義した. 本稿では, これを無限次元の設定に拡張し, 無限次元シンプレクティックベクトル空間上のある種の有界性をみたく Hamilton 関数の族から定義される Hamilton 微分同相写像の集合に群構造を定義し, その上に Hofer 距離が構成できることを説明したい. この研究は柴田将敬さん (東京工業大学理工学研究科) との共同研究に基づく.

## 1 $\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上の Hofer 距離

シンプレクティックベクトル空間  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  を考える.  $\omega_0$  は標準的なシンプレクティック形式  $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  である. コンパクトな台を持つ Hamilton 関数  $H \in C_0^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  に対して,  $H_t(p) := H(t, p)$  と表すと

$$\omega_0(X_{H_t}, \cdot) = dH_t$$

により時間依存する Hamilton ベクトル場  $X_{H_t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$  が定まる. そのフロー  $\{\phi_H^t\}_{0 \leq t \leq 1}$  を Hamilton イソトピーという.  $\mathbb{R}^{2n}$  の微分同相写像  $\psi$  は, ある Hamilton イソトピー  $\{\phi_H^t\}$  が存在して  $\psi = \phi_H^1$  と書けるととき, Hamilton 微分同相写像という.  $\mathbb{R}^{2n}$  の Hamilton 微分同相写像の全体を  $\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  と表わし, Hamilton 微分同相群という. これは, シンプレクティック微分同相群  $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) := \{\psi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^{2n}) \mid \psi^* \omega_0 = \omega_0\}$  の単位連結成分の部分群となる.

$\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  上の曲線  $\{\psi^t\}_{0 \leq t \leq 1}$  は, Hamilton 関数  $H$  に対して  $\psi^t \circ (\psi^0)^{-1} = \phi_H^t$  を満たすものとして定義される.  $\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  は群であるから, 単位元  $id$  を始点とする曲線のみを考えれば十分である. 曲線  $\{\phi_H^t\}_{0 \leq t \leq 1} \subset \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  の Hofer 長さは,

$$l(\{\phi_H^t\}) := \|H\| := \int_0^1 \left( \max_{p \in \mathbb{R}^{2n}} H(t, p) - \min_{p \in \mathbb{R}^{2n}} H(t, p) \right) dt$$

と定義される. 二点  $\phi, \psi \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  に対して,

$$d(\phi, \psi) = \inf \{ \|H\| \mid \phi^{-1} \circ \psi = \phi_H^1 \}$$

\*本研究は科研費 (課題番号:24740049) の助成を受けたものである.

とすると、以下の四つの性質が定義から容易に確かめられ、 $\text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  上の両側不変な擬距離となる: 任意の  $\phi, \psi, \vartheta \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  について

- $d(\phi, \psi) \geq 0$
- $d(\phi, \psi) = d(\psi, \phi)$
- $d(\phi, \psi) \leq d(\phi, \vartheta) + d(\vartheta, \psi)$
- $d(\vartheta \circ \phi, \vartheta \circ \psi) = d(\phi, \psi) = d(\phi \circ \vartheta, \psi \circ \vartheta)$ .

一方、この擬距離の非退化性

- $d(\phi, \psi) = 0 \implies \phi = \psi$

は非自明である。これは Hofer [1] により  $\mathbb{R}^{2n}$  のループ空間上の変分法を用いて energy-capacity 不等式 (5 節参照) を示すことにより証明され、 $d$  は Hofer 距離と呼ばれる。

今回の話には関係ないが、Hofer 距離は任意の有限次元シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  に対して定義され、その非退化性も Lalonde-McDuff [5] により示されている。

## 2 無限次元シンプレクティックベクトル空間 $Z$ とハミルトン関数

$Z$  を実 Hilbert 空間とし、その内積は  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、ノルムは  $\|\cdot\|$  とする。  $\{\varphi_j^\pm\}_{j=1}^\infty \subset Z$  を  $Z$  の正規直交基底とし、 $J$  を  $Z$  上の等長変換で、各  $j \in \mathbb{N}$  について  $J\varphi_j^\pm = \mp\varphi_j^\mp$  となるものとする。  $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle$  によって、 $Z$  上にシンプレクティック構造が定まり、 $(Z, \omega)$  は無限次元のシンプレクティックベクトル空間となる。

$Z_-$  は実 Hilbert 空間で、 $Z$  は  $Z_-$  にコンパクトに埋め込まれており、さらに  $\{\varphi_j^\pm\}_{j=1}^\infty$  は  $Z_-$  の直交基底にもなっているとする。  $Z$  の双対空間  $Z^* = \text{Hom}(Z, \mathbb{R})$  を  $Z$  と同一視すると、 $Z_-$  の双対空間  $Z_+$  に対して  $Z_+ \subset Z$  となり、この埋め込みはコンパクトとなる。

ここで、 $Z_-$  上の時間依存する Hamilton 関数  $H \in C^2([0, 1] \times Z_-, \mathbb{R})$  を考える。  $\nabla H$  が  $Z_-$  から  $Z$  への写像として  $t$  に関して一様に有界であるとき、 $H$  は admissible であるという。 admissible であり、台が  $Z_-$  において有界であるような Hamilton 関数  $H$  全体を  $\mathcal{A}$  とする。 また、そのなかで滑らかなものの全体を

$$\mathcal{H} := \{H \in C^\infty([0, 1] \times Z_-, \mathbb{R}) \mid H \in \mathcal{A}\}$$

とする。  $H \in \mathcal{A}$  に対する Hamilton 方程式  $\dot{x}(t) = J\nabla H(t, x(t))$  は、任意の初期値について時刻 1 まで解をもつことが証明でき、これにより  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  のときと同様にフロー  $\{\phi_H^t\}_{0 \leq t \leq 1}$  が  $Z_-$  上で定まる。 また、このフローは  $Z$  上のフローともみなせる ([4])。

$\mathcal{D}$  上の Hofer 長さ  $H \in \mathcal{H}$  に対して、 $\phi_H := \phi_H^1$  は  $Z$  上の  $C^\infty$  微分同相写像となり、このような Hamilton 微分同相写像全体  $\mathcal{D} := \{\phi_H \mid H \in \mathcal{H}\}$  を考えることができる。 曲線  $\{\phi_H^t\}_{0 \leq t \leq 1} \subset \mathcal{D}$  に対する Hofer 長さも有限次元の場合をまねて

$$l(\{\phi_H^t\}) := \|H\| := \int_0^1 \left( \sup_{p \in Z} H(t, p) - \inf_{p \in Z} H(t, p) \right) dt$$

と定義する。

補題 2.1 ([4]).  $H \in \mathcal{A}$  ならば  $\|H\| < \infty$  が成立する.

したがって,  $\mathcal{D}$  上の曲線  $\{\phi_H^t\}_{0 \leq t \leq 1}$  に対してはその Hofer 長さが有限の値として確定する. 以下, 簡単のため単位元  $id$  からの距離のみを考えることにする.  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して,  $id$  と  $\phi$  との擬距離を

$$d(id, \phi) = \inf \{ \|H\| \mid \phi = \phi_H^1, H \in \mathcal{H} \}$$

により定義する.

解析的な困難により  $\mathcal{D}$  が群構造を持つのかどうか, 現時点では不明である. そのため, 群構造が定義できるような  $\mathcal{D}$  の部分集合を考える.

$\mathcal{H}_B$  と  $\mathcal{D}_B$   $H \in \mathcal{H}$  であり, ある  $C > 0$  が存在して任意の  $t \in [0, 1], x \in Z_-, w \in Z \setminus \{0\}$  に対して

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|d\phi_H^t(x)[w]\|}{\|w\|} \leq C$$

が成立するようなものの全体を  $\mathcal{H}_B$  とおく. また,  $\mathcal{D}_B = \{\phi_H \mid H \in \mathcal{H}_B\}$  とおく.

### 3 主結果

定理 3.1 ([4]).  $\mathcal{D}_B$  は群構造を持つ. 特に,  $\mathcal{D}_B$  上に両側不変 Hofer 擬距離  $d$  が定まる.

定理 3.2 ([4]).  $H \in \mathcal{H}$  に対して energy-capacity 不等式が成立する. つまり,  $U$  を  $Z$  の有界集合で  $\text{dist}_Z(\phi_H(U), U) > 0$  なるものとする,  $c(U) \leq \|H\|$  が成り立つ. ここで  $c(U)$  は  $U$  の Kuksin 容量である.

現時点で  $\mathcal{D}$  が群構造を持つかどうかはわからないが, 定理 3.2 により  $d$  の非退化性は  $\mathcal{D}$  で示している.

系 3.3 ([4]).  $\mathcal{D}_B$  上の Hofer 擬距離  $d$  は非退化である.

以下, 定理 3.2 で出てきた energy-capacity 不等式と Kuksin 容量について説明したい. そのため, 有限次元の場合のシンプレクティック容量から説明する.

### 4 シンプレクティック容量とその無限次元版

$2n$  次元シンプレクティック多様体  $(M^{2n}, \omega)$  の全体  $\mathcal{S}$  の上の, 次の公理をみたす関数  $c: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を一般にシンプレクティック容量という:

- シンプレクティック埋め込み  $\phi: (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$  があれば,  $c(M, \omega) \leq c(N, \tau)$
- 任意の  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対して,  $c(M, \alpha\omega) = |\alpha|c(N, \omega)$
- $c(B(1), \omega_0) = \pi = c(Z(1), \omega_0)$ .

ここで,  $\omega_0$  は  $\mathbb{R}^{2n}$  の標準的なシンプレクティック形式を表し,

$$\begin{aligned} B(r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 < r^2\} \\ Z(r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 < r^2\} \end{aligned}$$

である. 一旦シンプレクティック容量が構成できれば, 次のように Gromov の nonsqueezing 定理のような重要な結果がただちに導かれる.

**系 4.1 (Gromov's nonsqueezing theorem).**  $B(r)$  から  $Z(R)$  へのシンプレクティックな埋め込み  $\phi : B(r) \rightarrow Z(R)$  が存在すれば,  $r \leq R$  となる.

**証明**  $\pi r^2 = c(B(r)) \leq c(Z(R)) = \pi R^2$ . □

したがって, 非自明な容量の構成が大切な課題となる. 現在ではかなりの数のシンプレクティック容量が知られている. Hofer-Zehnder 容量  $c_{HZ}$  は,  $(M^{2n}, \omega)$  上の Hamilton 力学系の性質と密接に関連したシンプレクティック容量の一種である ([2]). これを無限次元の場合に拡張したものが Kuksin 容量である ([3]).

2 節で導入したシンプレクティックヒルベルト空間  $(Z, \omega)$  を考える.  $Z$  の有限次元部分空間  $\oplus_{j=1}^n \mathbb{R}\varphi_j^\pm (\cong \mathbb{R}^{2n})$  を  $Z^n$  と表す.  $Z$  の領域  $U$  をとり,  $U^n := U \cap Z^n$  とおく.

**定義 4.2 ([3]).** 関数  $f \in C^\infty(U)$  は, 正数  $m$  について以下の条件をみたすとき  $m$ -admissible という:

- (i)  $0 \leq f \leq m$ ;
- (ii)  $U$  のある空でない部分領域で  $f \equiv 0$ ;
- (iii)  $f|_{\partial U} \equiv m$ ;
- (iv)  $\{z \in U \mid f(z) < m\}$  は有界;
- (v) (iv) の集合と  $\partial U$  の距離は正.

$f_n := f|_{U^n}$  と表し,  $U^n$  上の Hamilton ベクトル場  $X_{f_n} \in \mathfrak{X}(U^n)$  を考える.  $X_{f_n}$  の  $T$ -周期軌道は, 定点ではなく周期が  $T \leq 1$  のとき, fast であるという. 定義より, fast な周期軌道は  $\text{supp} f \cap Z^n$  に含まれる. また,  $m$ -admissible 関数  $f \in C^\infty(U)$  は, 自然数  $n_0 = n_0(f)$  が存在してすべての  $n \geq n_0$  について  $X_{f_n}$  が fast な周期軌道をもつとき, fast であるという.

**定義 4.3 ([3]).** 空でない領域  $U \subset Z$  に対して, その容量  $c(U)$  を

$$c(U) = \inf\{m_* \mid U \text{ の } m\text{-admissible 関数 with } m > m_* \text{ が fast}\}.$$

で定める.  $c(U)$  を領域  $U \subset Z$  の Kuksin 容量という.

Kuksin 容量は,  $Z$  の空でない領域の集合について有限次元のシンプレクティック容量と同じ公理をみたす ([3]). さらに, Hofer-Zehnder 容量  $c_{HZ}$  とは次の関係がある.

**命題 4.4 ([3]).** 領域  $U \subset Z$  について

$$c(U) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} c_{HZ}(U^n)$$

が成り立つ.

## 5 energy-capacity 不等式とその無限次元版

まず、有限次元の場合に energy-capacity 不等式を紹介し、それを使って Hofer 距離  $d$  が非退化であることを示す。

有限次元の energy-capacity 不等式 ([1])  $\phi_H \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  について、 $\mathbb{R}^{2n}$  の領域  $U$  が  $\phi_H(U) \cap U = \emptyset$  をみたせば

$$c_{HZ}(U) \leq d(id, \phi_H),$$

が成り立つ。

$d$  の非退化性はこれからただちに得られる。実際、 $\phi \in \text{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ,  $\phi \neq id$  とすると、点  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  が存在し  $x \neq \phi(x)$  となる。 $\phi$  は連続写像であるから、 $x$  を中心とする半径の十分小さい開球  $B_x(r)$  が存在して  $B_x(r) \cap \phi(B_x(r)) = \emptyset$  となる。 $B_x(r) \subset \mathbb{R}^{2n}$  に energy-capacity 不等式を適用すれば、

$$\pi r^2 = c_{HZ}(B_x(r)) \leq d(id, \phi),$$

となり、 $d(id, \phi) \neq 0$  が導かれる。

無限次元の場合も同じ方針で Hofer 距離  $d$  が非退化であることを示したい。そのため無限次元の energy-capacity 不等式が必要となり、それが定理 3.2 である。上の結果に合わせて書き換えると

無限次元の energy-capacity 不等式  $H \in \mathcal{H}$  つまり  $\phi_H \in \mathcal{D}$  とする。 $Z$  の有界な領域  $U$  が  $\text{dist}_Z(\phi_H(U), U) > 0$  をみたせば

$$c(U) \leq d(id, \phi_H) \tag{5.1}$$

が成り立つ。

証明の概略を述べる。 $H \in \mathcal{H}$  に対して  $H^n := H|_{Z^n}$  を考え、この  $H^n$  について有限次元の energy-capacity 不等式を使って  $\|H^n\|$  を  $c_{HZ}(U^n)$  で下から評価する。このとき、 $\phi_H$  と  $\phi_{H^n}$  の差を評価するために次の補題が必要になる。

補題 5.1 ([4]).  $H \in \mathcal{H}$  とする。 $K$  が  $Z$  の有界集合ならば、 $n \in \mathbb{N}$  のみに依存する定数  $\epsilon(n) > 0$  が存在して、任意の  $u \in K$  に対して  $\|\phi_H(u) - \phi_{H^n}(u)\| \leq \epsilon(n)$  かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$  が成り立つ。

後は  $c_{HZ}(U^n) \leq \|H^n\| \leq \|H\|$  に注意して命題 4.4 を使えば、(5.1) が得られる。

## 6 今後の課題

Kuksin が無限次元の設定で容量を導入したもとの動機は、Hamilton 形式の偏微分方程式の研究に应用するためであった。実際、無限次元の nonsqueezing 定理などが有効に使われている ([3])。ここで構成した Hofer 距離は、まだその方面の研究に应用できる形ではないので、改良が必要である。

## 参考文献

- [1] Hofer, H.: *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. **115A** (1990), 25–38
- [2] Hofer, H. and Zehnder, E.: *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser (1994)
- [3] Kuksin, S. B.: *Infinite-Dimensional Symplectic Capacities and a Squeezing Theorem for Hamiltonian PDE's*, Commun. Math. Phys. **167** (1995), 531–552.
- [4] Iriyeh, H.; Shibata, M.: *A construction of Hofer's distance on certain Hamiltonian diffeomorphism group of a symplectic Hilbert space*, preprint.
- [5] Lalonde, F. and McDuff, D.: *The geometry of symplectic energy*, Ann. Math. **141** (1995), 349–371.