奇数次元球面内の austere 超曲面と 複素射影空間内の実超曲面

木村真琴 (茨城大学) *

部分多様体幾何とリー群作用 2012

定義 Riemann 多様体の部分多様体 M は、すべての法ベクトル N に関する shape operator A_N について、その固有値の集合が (-1) 倍で不変の時 **austere** であるという。

Austere 部分多様体は Harvey-Lawson [4] によって導入された。Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 内の部分多様体 M^m について、その conormal bundle $N^*(M)$ は $\mathbb{R}^n$ の cotangent bundle $T^*(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{C}^n$ 内の Lagrange 部分多様体となることが知られているが、Harvey-Lawson は、$N^*(M)$ が $\mathbb{C}^n$ の **special Lagrangian** 部分多様体であることと、M^m が $\mathbb{R}^n$ の **austere** 部分多様体であることを示した。**special Lagrangian** 部分多様体は、Ricci-flat Kähler (Calabi-Yau) 多様体に対して定義され、体積最小であり、Mirror 対称性との関わりなどから盛んに研究されている。

Austere 部分多様体の特別な場合として、(i) (実 2 次元) 極小曲面、(ii) Kähler 多様体の Kähler 部分多様体がある。よって、austere 部分多様体はこれらの一般化とも考えることができる。Austere 部分多様体についての研究は、たとえば [1, 3, 5, 7, 13].

(単位) 球面 S^n 内の部分多様体 M^m に関して、上記の Harvey-Lawson の結果に対応する事実が成り立つ [8]: 球面の cotangent bundle $T^*(S^n)$ には、Ricci-flat Kähler 計量が入ることが Stenzel [15] によって知られているが、M^m の conormal bundle $N^*(M)$ が $T^*(S^n)$ の Stenzel 計量に関して special Lagrangian であるための必要十分条件は、M^m が S^n の austere 部分多様体となることである。

以下、球面 S^n 内の austere 部分多様体を考える。その例として：

*The author was partially supported by Grants-in-Aid for Scientific Research, The Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan, No. 24540080.

例 1 **任意の**等径超曲面の focal submanifold,

例 2 **すべての主曲率の重複度が等しい**極小 (等質) 等径超曲面:

- $S^{n+1}(1) \hookleftarrow S^n(1),\ \ g=1$
- $S^{2k+1}(1) \hookleftarrow S^k(1/\sqrt{2}) \times S^k(1/\sqrt{2}),\ \ g=2$
- $S^4(1) \hookleftarrow SO(3)/\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2,\ \ g=3$
- $S^7(1) \hookleftarrow SU(3)/T^2,\ \ g=3$
- $S^{13}(1) \hookleftarrow Sp(3)/Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(1),\ \ g=3$
- $S^{25}(1) \hookleftarrow F_4/Spin(8),\ \ g=3$
- $S^5(1) \hookleftarrow SO(2)\times SO(3)/\mathbb{Z}_2,\ \ g=4$
- $S^9(1) \hookleftarrow Sp(2)/T^2,\ \ g=4$
- $S^7(1) \hookleftarrow SO(4)/\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2,\ \ g=6$
- $S^{13}(1) \hookleftarrow G_2/T^2,\ \ g=6$

ここで、我々の以前の結果を紹介する [6]: $\mathbb{CP}^{n+1}$ を正則断面曲率 4 の Fubini-Study 計量をもつ複素射影空間、Q^n を $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n+2}^2=0$ で定義される複素 2 次曲面とする。$\mathbb{CP}^{n+1}$ からの誘導計量によって、Q^n は Hermitian symmetric space となる。$\{U_\lambda,\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Q^n 上の**複素共形構造**とする。すなわち、$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は Q^n の開被覆で、U_λ の任意の点 p において、Ω_λ は非退化対称双一次形式 $T_pQ^{n+}\times T_pQ^{n+}\to\mathbb{C}$ である。さらに、$U_\lambda\cap U_\mu$ 上 0 にならない正則関数 $f_{\mu\lambda}$ が存在して、$U_\lambda\cap U_\mu$ 上 $\Omega_\mu=f_{\mu\lambda}\Omega_\lambda$ を満す。

$\varphi: M^m\to Q^n$ を m 次元 Kähler 多様体 M^m から Q^n への Kähler immersion とする。各点 $p\in M$ において $\varphi^*\Omega_\lambda=0$, $\varphi(p)\in U_\lambda$ をみたすとき、φ を **isotropic Kähler immersion** という [14]。

定理 [6] Q^n を $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向き付けられた 2 次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $G_2(\mathbb{R}^{n+2})$ と同一視する。$V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ を $\mathbb{R}^{n+2}$ の正規直交 2 ベクトルのなす Stiefel 多様体とする。このとき、自然な射影 $\pi: V_2(\mathbb{R}^{n+2})\to G_2(\mathbb{R}^{n+2})$ は主 S^1-bundle となる。$\eta: V_2(\mathbb{R}^{n+2})\to S^{n+1}$ を $\eta(e_1,e_2)=e_1$

で定義される写像とする。$\varphi : M^m \to Q^n = G_2(\mathbb{R}^{n+2})$ を Kähler immersion, $\widetilde{M}$ を pullback bundle $\varphi^*(V_2(\mathbb{R}^{n+2}))$ の全空間とする。このとき、bundle map $\iota : \widetilde{M} \to V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ を用いて、写像 $\tilde{\varphi} = \eta \circ \iota : \widetilde{M} \to S^{n+1}$ が定義される。もし φ が **isotropic Kähler immersion** ならば、$\tilde{\varphi} : \widetilde{M} \to S^{n+1}$ は immersion で **austere** となる。

例 [11] $\varphi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^4$ を、4次の複素多項式によって定義される Veronese embedding とする。このとき、$\psi(\mathbb{CP}^1)$ は Q^3 に含まれて、$\varphi : \mathbb{CP}^1 \to Q^3$ は isotropic Kähler embedding である。そして、上述の定理によって得られる S^4 の austere 超曲面 M^3 は、やはり上で述べた Cartan 超曲面 $SO(3)/\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ に他ならない。ゆえに、上記の定理は Cartan 超曲面の一般化を与えていると看做せる。

ここで S^{n+1} の austere 部分多様体の**双対性**について述べる。M^m を S^{n+1} の austere 部分多様体で、すべての法ベクトル N に関する shape operator A_N の 0 固有値の重複度 k が M の点にも N にもよらずに一定とする。このとき、 M 上半径 $\pi/2$ の 'tube' M^* (**dual**) は、S^{n+1} の $(n-k)$ 次元 **austere 部分多様体**である。特に、M^n が S^{n+1} の austere 超曲面で、$\det A \neq 0$ ならば、その dual M^* も A が非退化な austere 超曲面である。

S^{n+1} の austere 部分多様体の dual の例:

- $g = 3$ の極小等径超曲面 M^n, $n = 3, 6, 12, 24$ と、その focal 部分多様体 $\Sigma = \mathbb{FP}^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ は、互いに dual な S^{n+1} の austere 部分多様体、

- $g = 4$ の等径超曲面の focal 部分多様体 M_+, M_-, および $m_1 = m_2 = 1$ または 2 の極小等径超曲面は、dual austere 部分多様体をとっても変らない (self-dual?).

- $g = 6$ の等径超曲面の focal 部分多様体 M_+, M_- は, 互いに dual, ($m1$ または 2 の) 極小等径超曲面は、'self-dual'.

ここで、S^4 内の 3 次元 austere 超曲面について考えてみると、次のいずれかである：

(i) 3 つの主曲率がすべて 0 で、全測地的 S^3,

(ii) 主曲率 $k=\lambda,-\lambda,0$ ($\lambda\neq 0$) の場合、 S^4 内の 2 次元極小曲面上半径 $\pi/2$ の tube,

次に S^5 内の 4 次元 austere 超曲面について考えてみると、次の 4 つの場合に分けられる：

(i) 4 つの主曲率がすべて 0 で、全測地的 S^4,

(ii) 主曲率 $k=\lambda,\lambda,-\lambda,-\lambda$ ($\lambda\neq 0$) の場合、半径の等しい球面の積：$S^2(1/\sqrt{2})\times S^2(1/\sqrt{2})$ [12],

(iii) 主曲率 $k=\lambda,-\lambda,0,0$ ($\lambda\neq 0$) の場合、 S^5 内の 2 次元極小曲面上半径 $\pi/2$ の tube,

(iv) 主曲率 $k=\lambda,-\lambda,\mu,-\mu$ ($\lambda\mu(\lambda^2-\mu^2)\neq 0$) の場合.

(iv) の例として、異なる主曲率 4 個を持つ、(等質) 極小等径超曲面 $M^4 = SO(2)\times SO(3)/\mathbb{Z}_2$ があるが、他に例があるかどうか、少なくとも著者は知らなかったが、以下の定理 3 で、$SU(3)$ の 1-parameter 部分群の軌道として、多くの例が得られることがわかる。

ここで、これらの Ricci 曲率に注目してみると、(i),(ii) は Einstein であるが、(iii),(iv) は異なる 2 個の Ricci 曲率をもつ。その意味で、Einstein に近い条件を満たす超曲面としても興味深い対象であると言える。

以下、次の問題を考える：**複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 $\Sigma=\Sigma^{2n-1}$ で、Hopf fibration $\pi: S^{2n+1}\to\mathbb{CP}^n$ による逆像 $M^{2n}=\pi^{-1}(\Sigma)$ が S^{2n+1} の austere 超曲面となるものを決定せよ.**

例として：

(i) (A 型) Σ: $\mathbb{CP}^{2k-1}$ 内の全測地的 $\mathbb{CP}^{k-1}$ 上半径 $\pi/4$ の tube. このとき $M=\pi^{-1}(\Sigma)=S^{2k-1}(1/\sqrt{2})\times S^{2k-1}(1/\sqrt{2})\subset S^{4k-1}$ は半径の等しい球面の積,

(ii) Σ: $\mathbb{CP}^n$ の極小線織超曲面 [9]. このとき $M=\pi^{-1}(\Sigma)$ の type nunmer は 2,

(iii) (B 型) Σ: $\mathbb{CP}^2$ 内で、複素 2 次曲面 Q^1, あるいは全測地的 $\mathbb{RP}^2$ 上半径 $\pi/8$ の tube. このとき $M^4=\pi^{-1}(\Sigma)$ は異なる主曲率 4 個を持つ、(等質) 極小等径超曲面 $SO(2)\times SO(3)/\mathbb{Z}_2$.

定理 1 Σ^3 を $\mathbb{CP}^2$ の **Hopf 超曲面**とする。すなわち、Σ の構造ベクトル場 ξ が Σ の各点で shape operator の固有ベクトルであるとする。$M^4 = \pi^{-1}(\Sigma)$ を S^5 の超曲面で、Hopf fibration $\pi : S^5 \to \mathbb{CP}^2$ に関する Σ の逆像とする。M^4 が S^5 の austere 超曲面ならば、Σ^3 は $\mathbb{CP}^2$ 内の (B 型) 極小等質超曲面であって、M^4 は S^5 内の、異なる 4 種の主曲率を持つ極小 (等質) 等径超曲面 $SO(2) \times SO(3)/\mathbb{Z}_2$ (の一部) である。

定理 2 Σ^5 を $\mathbb{CP}^3$ の **Hopf 超曲面**、$M^6 = \pi^{-1}(\Sigma)$ を S^7 の超曲面で、Hopf fibration $\pi : S^7 \to \mathbb{CP}^3$ に関する Σ の逆像とする。M^6 が S^7 の austere 超曲面ならば、次のいずれかが成り立つ：

(i) Σ^5 は $\mathbb{CP}^3$ 内の (A 型) 極小等質超曲面であって、M^6 は S^7 内の半径の等しい球面の積 $S^3(1/\sqrt{2}) \times S^3(1/\sqrt{2})$,

(ii) Σ^5 は $\mathbb{CP}^3$ 内の複素 2 次元複素超曲面 F^2 で、F のすべての単位法ベクトル N に関する shape operator A_N の固有値が λ, $1/\lambda$, $-\lambda$, $-1/\lambda$, (ただし $\lambda : F^2 \to \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$ は non-constant function) であるようなもの上の、半径 $\pi/4$ の tube 上にある。

定理 3 Σ^3 を $\mathbb{CP}^2$ の **Levi-flat 超曲面**とする。すなわち、Σ の構造ベクトル場 ξ の直交補空間 $\{\xi\}^\perp$ の成す 2 次元 distribution が積分可能であるとする。$M^4 = \pi^{-1}(\Sigma)$ を S^5 の超曲面で、Hopf fibration $\pi : S^5 \to \mathbb{CP}^2$ に関する Σ の逆像とする。M^4 が S^5 の austere 超曲面ならば、Σ^3 は $\mathbb{CP}^2$ の全測地的実射影空間 $\mathbb{RP}^2$ によって foliate された極小実超曲面 (cf, [10]) であって、M^4 は (特異点をもった) 下記の immersion の像 (の一部) と合同である:

$$F : \mathbb{R} \times S^1 \times S^2 \to S^5, \quad F(s, t, p) = e^{it} \exp(siP)p$$

(ただし P は $\operatorname{trace} P = 0$ をみたす、3 次実対称行列)。

このとき、F が (s, t, x) で immersion $\Leftrightarrow$ $Px \not\parallel x$. $v = F_t = iF$: Hopf fibration $\pi : S^5 \to \mathbb{CP}^2$ に関する単位 vertical ベクトル, $\xi' = dF(Px \times x/|Px \times x|)$: 構造ベクトル ξ の horizontal lift, $e_2 := dF(Px - \langle Px, x\rangle x/\sqrt{|Px|^2 - \langle Px, x\rangle^2})$, $e_1 := ie_2$, とすると, $T_{F(s,t,x)}(M^4)$ の正規直交基底をなす。

上で得られた S^5 の超曲面 M^4 の, 単位法ベクトル $N = i\xi$ に関する shape operator A を, 正規直交基底 $\{v, \xi', e_1, e_2\}$ について行列表示すると:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h(\xi', e_1) & 0 \\ 0 & h(\xi', e_1) & 0 & h(e_1, e_2) \\ 0 & 0 & h(e_1, e_2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$h(\xi', e_1) = \frac{\langle P(Px \times x), Px \times x \rangle}{|Px \times x|^2} - \langle Px, x \rangle,$$

$h(e_1, e_2) = \det(P^2 x, Px, x)/|Px \times x|^2$.

特別な場合として, $P^2 x \in \mathrm{span}\{Px, x\}$ がすべての $x \in S^2$ について成り立つとき, $\mathrm{rank}\, A = 2$ となり、$\Sigma^3 = \pi(M^4)$ は $\mathbb{CP}^2$ の**極小線織**超曲面である。一般には、S^5 の austere 超曲面で 'genereic', すなわち $\det A \neq 0$ をみたすものが構成できたことになる。

さらに、実対称行列 S のサイズを大きくすることにより、球面 S^{2n+1} 内の austere submanifold M^{n+2} を構成できる。

注意 複素 2 次元複素空間形内の **極小 Levi-flat** 超曲面は、Bryant [2] によって決定されている。

参考文献

[1] R. L. Bryant, *Some remarks on the geometry of austere manifolds*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **21** (1991) no. 2, 133-157.

[2] R. L. Bryant, *Levi-flat minimal hypersurfaces in two-dimensional complex space forms*, Lie groups, geometric structures and differential equations - one hundred years after Sophus Lie (Kyoto/Nara, 1999), 1-44, Adv. Stud. Pure Math., **37**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[3] M. Dajczer and L. Florit, *A class of austere submanifolds*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 3, 735-755.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta. Math. **148** (1982), 47-157.

[5] M. Ionel and T. Ivey, *Austere submanifolds of dimension four: examples and maximal types*, Illinois J. Math. **54** (2010), no. 2, 713-746.

[6] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, *Submanifolds with degenerate Gauss mappings in spheres*, Lie groups, geometric structures and differential equations - one hundred years after Sophus Lie (Kyoto/Nara, 1999), 115-149, Adv. Stud. Pure Math., **37**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[7] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437-481.

[8] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371-394.

[9] M. Kimura, *Sectional curvatures of holomorphic planes on a real hypersurface in* $P^n(\mathbb{C})$, Math. Ann. **276** (1987), no. 3, 487-497.

[10] M. Kimura, *Curves in* $SU(n+1)/SO(n+1)$ *and some submanifolds in* $P^n(\mathbb{C})$, Saitama Math. J. **14** (1996), 79-89.

[11] M. Kimura, *Minimal immersions of some circle bundles over holomorphic curves in complex quadric to sphere*, Osaka J. Math. **37** (2000), no. 4, 883-903.

[12] T. Otsuki, *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifolds of constant curvature*, Amer. J. Math. **92** (1970), 145–173.

[13] F. Podesta, *Some remarks on austere submanifolds* Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **11** (1997), no. 2, suppl., 157-160.

[14] K. Tsukada, *Isotropic Kahler immersions into a complex quadric*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **57** (2007), no. 1, 1-30.

[15] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), 151-163.

E-mail: kmakoto@mx.ibaraki.ac.jp
http://kmakoto.sci.ibaraki.ac.jp/