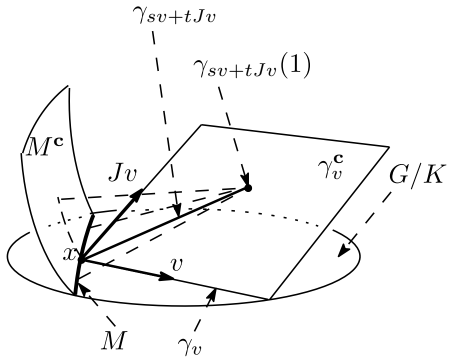
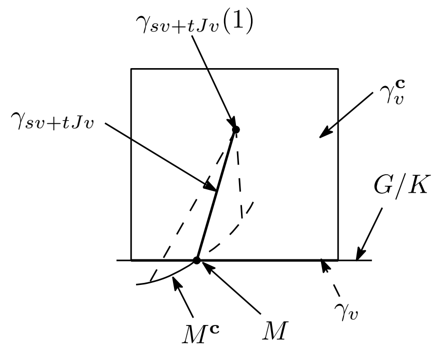
非コンパクト型対称空間内の
ある種の等径部分多様体の分類

小池直之 (東京理科大 · 理)

序章

非コンパクト型対称空間 G/K 内の部分多様体 M は、その主曲率らが 0 に近づくように変形していくとき、その焦点集合は G/K の理想境界 $(G/K)(\infty)$ の彼方へ消えうせてしまう。この事実に基づいて、筆者 ([Koi1]) は、M の各法測地線に沿う焦半径を、実数の範囲だけで定義するのは不十分であると判断し、複素数の範囲に広げて定義し、それを複素焦半径と名づけた。M が C^ω 部分多様体の場合、その複素化 $M^{\mathbf{c}}(\subset G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ が定義され、$z=s+t\mathbf{i}$ が M の法測地線 γ_v に沿う複素焦半径であることと $\gamma_{sv+tJv}(1)$ が $M^{\mathbf{c}}$ の γ_{sv+tJv} に沿う焦点であることが同値であることが示される。ここで、v は M の法ベクトルであり、γ_v は $\gamma'_v(0)=v$ となる法測地線を表し、また、J はアンチケーラー対称空間 $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の複素構造を表し、γ_{sv+tJv} は $\gamma'_{sv+tJv}(0)=sv+tJv$ となる $M^{\mathbf{c}}$ の法測地線を表す。M の γ_v に沿う焦半径の全体を $\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}$，$M$ の γ_v に沿う複素焦半径の全体を $\mathcal{FR}^{\mathbf{C}}_{M,v}$，$M$ の x における接焦点集合 $\cup_{v\in T^\perp_xM}\{rv\,|\,r:\gamma_v$ に沿う焦半径$\}$ を $\mathcal{F}^{\mathbf{R}}_{M,x}$ と表す。法空間 $T^\perp_xM$ の複素化 $(T^\perp_xM)^{\mathbf{c}}$ の部分集合 $\mathcal{F}^{\mathbf{C}}_{M,x}$ を $\cup_{v\in T^\perp_xM}\{zv\,|\,z:\gamma_v$ に沿う複素焦半径$\}$ によって定義する。M が C^ω 級の場合、$(T^\perp_xM)^{\mathbf{c}}$ と $T^\perp_x(M^{\mathbf{c}})$ の自然な同一視の下、$\mathcal{F}^{\mathbf{C}}_{M,x}$ は、$M^{\mathbf{c}}$ の x における接焦点集合と一致する。





1995 年、Terng-Thorbergsson([TT]) は、対称空間内で、等焦部分多様体という概念を、自明な法ホロノミー群，平坦な切断および平行な焦点構造をもつコンパクト部分多様体として定義した。ここで、焦点構造の平行性は、$\mathcal{F}^{\mathbf{R}}_{M,x}$ $(x\in M)$ 達が M の法接続に関する平行移動で互いに移り合うことを意味する。ユークリッド空間内のコンパクト等径部分多様体，球面内の等径超曲面，双曲空間内のコンパクト等径超曲面は、等焦部分多様体である。2004 年、筆者 ([Koi1]) は、非コンパクト型対称空間 G/K 内で、複素等焦部分多様体 (本来は、等複素焦部分多様体とよぶべきもの) という概念を、自明な法ホロノミー群，平坦な切断，および，平行な複素焦点構造をもつ (固有に埋め込まれた) 完備な部分多様体として定義した。ここで、複素焦点構造の平行性は、$\mathcal{F}^{\mathbf{C}}_{M,x}$ $(x\in M)$ 達が M の法接続の複素化に関する平行移動で互いに移り合うことを意味する。コンパクト型対称空間およびユークリッド空間内では、焦点構造の平行性と複素焦点構造の平行性は一致し、非コンパクト型対称空間内では、複素焦点構造が平行であるならば、焦点構造は平行であるが、逆は成り立たない。例えば、双曲空間内では、主曲率の絶対値達が十分小さな任意の超曲面は、焦点集合が空であるため、その焦

点構造は平行である (と解釈される) が、その複素焦点構造は平行であるとは限らない。双曲空間内では、その超曲面の複素焦点構造が平行であることとその超曲面が等径的であることが同値である。今回、次の 2 条件を考えた。

($*_{\mathbf{R}}$) M の各法ベクトル v に対し、γ_v に沿う焦半径の零化空間達は、$T_xM \ominus (\mathrm{Ker}\,A_v \cap \mathrm{Ker}R(v))$ を生成する。

($*_{\mathbf{C}}$) M の各法ベクトル v に対し、γ_v に沿う複素焦半径の零化空間達は、$(T_xM)^{\mathbf{c}} \ominus (\mathrm{Ker}\,A_v^{\mathbf{c}} \cap \mathrm{Ker}R(v)^{\mathbf{c}})$ を生成する。

ここで、A_v, $R(v)$ は、各々、形作用素，法ヤコビ作用素を表す。これらの条件を考えることの妥当性については、第 1,2 節で説明することにする。2006 年、Heintze-Liu-Olmos([HLO]) は、一般のリーマン多様体内で、平坦な切断をもつ等径部分多様体という概念を、自明な法ホロノミー群および平坦な切断をもつ (固有に埋め込まれた) 完備な部分多様体で、その十分近くの平行部分多様体達が放射方向に関して CMC であるようなものとして定義した ([HLO])。以下、本原稿において、平坦な切断をもつ等径部分多様体を、単に、等径部分多様体とよぶことにする。非コンパクト型対称空間 G/K 内の curvature-adaptedC^ω 部分多様体 M に対し、複素等焦性と等径性は一致することが知られている ([Koi2])。ここで、curvature-adapted 性とは、M の任意の法ベクトル v に対し、$R(v)(T_xM) \subset T_xM$ (x : v の基点)、および、$[A_v, R(v)] = 0$ が成り立つことを意味する。(G, H) を対称対とするとき、H の非コンパクト型対称空間 G/K 上の自然な作用は、Hermann 型作用とよばれる。Hermann 型作用の主軌道達は、curvature-adapted 複素等焦部分多様体 (それゆえ、等径部分多様体) で、上述の条件 ($*_{\mathbf{C}}$) を満たすことが知られている ([Koi3])。今回、逆に、次の事実が成り立つことを示した。

定理 A([Koi10]) M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の既約な余次元 2 以上の curvature-adaptedC^ω 等径部分多様体で、条件 ($*_{\mathbf{C}}$) を満たすようなものとする。このとき、M は、G/K 上のある Hermann 型作用の主軌道になる。

(注) この定理において、curvature-adapted 性と ($*_{\mathbf{C}}$) いずれの条件も必要不可欠であることを示す例を G の岩澤分解 $G = KAN$ における可解部分 AN の部分群作用の軌道として与えることができる ([Koi7])。

また、この定理を用いて、次の事実が成り立つことを示した。

定理 B([Koi10]) M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の既約な余次元 2 以上の curvature-adaptedC^ω 等径部分多様体で、条件 ($*_{\mathbf{R}}$) を満たすようなものとする。このとき、M は、G/K のある点におけるイソトロピー作用の主軌道になる。

定理 A を用いて、各既約な非コンパクト型対称空間 G/K に対し、定理 A におけるような G/K 内の等径部分多様体を分類することができる (第 4 節を参照)。

§1 複素焦半径

この節において、複素焦半径の定義およびその幾何学的意味、および、定理 1 において条件 ($*_{\mathbf{C}}$) を課すことの妥当性を説明する。M を完備リーマン多様体 N 内の部分多様体とし、$\psi : T^\perp M \to M$ をその法バンドル，$\exp^\perp : T^\perp M \to M$ をその法指数写像とする。また、$\mathcal{V}$ を $T^\perp M$ 上の鉛直分布とし、$\mathcal{H}$ を法接続に関する水平分布とする。v を M の点 x における単位法ベクトルとし、r を実数とする。$\psi_{*rv}(\mathrm{Ker}(\exp^\perp)_{*rv}) \neq \{0\}$ のとき、r は M の法測地線 γ_v に沿う焦半径とよばれ、$\psi_{*rv}(\mathrm{Ker}(\exp^\perp)_{*rv})$ は r に対する零化空間，その次元は r の重複度とよばれる。γ_v に沿う焦半径の全体を $\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}$ と表す。M の各点 x に対し、$\Sigma_x := \exp^\perp(T_x^\perp M)$ が G/K 内の全測地的部分多様体であるとき、M は切

断をもつ部分多様体とよばれ、さらに、各 Σ_x 上に誘導される計量が平坦であるとき、平坦な切断をもつ部分多様体とよばれる。以下、この節において、N を対称空間 G/K とし、M を平坦な切断をもつ部分多様体とする。このとき、$\mathrm{Ker}\,\exp^{\perp}_{*rv}\subset\mathcal{H}_{rv}$ となり、$X\in T_xM$ に対し、

$$\exp^{\perp}_{*rv}(X^L_{rv})=P_{\gamma_{rv}}\left(\left(\cos(r\sqrt{R(v)})-\frac{\sin(r\sqrt{R(v)})}{\sqrt{R(v)}}\circ A_v\right)(X)\right)\quad(X\in T_xM)\tag{1.1}$$

が成り立つ。ここで、X^L_{rv} は X の rv への水平リフトを表し、$P_{\gamma_{rv}}$ は γ_{rv} に沿う平行移動を表し、$R(v)$ は法ヤコビ作用素 $R(\bullet,v)v$ (R :G/K の曲率テンソル) を表し、A_v は形作用素を表す。それゆえ、$\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}$ は、次の実数値関数 F_v の零点集合と一致する：

$$F_v(s):=\det\left(\cos(s\sqrt{R(v)})-\frac{\sin(s\sqrt{R(v)})}{\sqrt{R(v)}}\circ A_v\right)\qquad(s\in\mathbb{R}).$$

G/K がユークリッド空間の場合、$F_v(s)=\det(\mathrm{id}-sA_v)$ (id : T_xM の恒等変換) となり、それゆえ、$\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}$ は、A_v の固有値の逆数達 (つまり、v に対する主曲率半径達) に等しく、$r\in\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}$ に対する零化空間は $\mathrm{Ker}(A_v-\frac{1}{r}\mathrm{id})$ に等しい。それゆえ、M の γ_v に沿う焦半径の零化空間達は、$T_xM\ominus\mathrm{Ker}\,A_v$ を張る、つまり、$(*_{\mathbf{R}})$ が成り立つ。G/K が一定の断面曲率 $c(>0)$ をもつ球面の場合、

$$F_v(s)=\det\left(\cos(s\sqrt{c})\mathrm{id}-\frac{\sin(s\sqrt{c})}{\sqrt{c}}A_v\right)$$

となり、それゆえ、

$$\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}=\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\arctan\frac{\sqrt{c}}{\lambda}+j\pi\right)\,\middle|\,\lambda\in\mathrm{Spec}\,A_v,\ \ j\in\mathbb{Z}\right\}$$

となり、$\dfrac{1}{\sqrt{c}}\left(\arctan\dfrac{\sqrt{c}}{\lambda}+j\pi\right)$ に対する零化空間は、$\mathrm{Ker}(A_v-\lambda\,\mathrm{id})$ に等しい。ここで、$\lambda=0$ のとき、$\arctan\frac{\sqrt{c}}{\lambda}$ は $\frac{\pi}{2}$ を意味することを注意しておく。それゆえ、M の γ_v に沿う焦半径の零化空間達は、T_xM を張る、つまり、$(*_{\mathbf{R}})$ が成り立つ。G/K が一定の断面曲率 $c(<0)$ をもつ双曲空間の場合、

$$F_v(s)=\det\left(\cosh(s\sqrt{-c})\mathrm{id}-\frac{\sinh(s\sqrt{-c})}{\sqrt{-c}}A_v\right)$$

となり、それゆえ、

$$\mathcal{FR}^{\mathbf{R}}_{M,v}=\left\{\frac{1}{\sqrt{-c}}\mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{-c}}{\lambda}\,\middle|\,\lambda\in\mathrm{Spec}\,A_v\ \text{s.t.}\ |\lambda|>\sqrt{-c}\right\}\tag{1.2}$$

となり、$\dfrac{1}{\sqrt{-c}}\mathrm{arctanh}\dfrac{\sqrt{-c}}{\lambda}$ に対する零化空間は、$\mathrm{Ker}(A_v-\lambda\,\mathrm{id})$ に等しい。それゆえ、$(*_{\mathbf{R}})$ が成り立つためには、A_v のすべての固有値の絶対値達が $\sqrt{-c}$ よりも大きいことが必要十分条件である。(1.2) から、M が、A_v の固有値の絶対値達が $\sqrt{-c}$ よりも大きい状態から $\sqrt{-c}$ よりも小さい状態へ変形していくとき、その焦点集合は、G/K の理想境界 $(G/K)(\infty)$ の彼方へ消えうせてしまうことがわかる。この事実に基づいて、筆者 ([Koi1]) は、焦半径は複素数の範囲で定義されるべきであると考え、M の γ_v に沿う複素焦半径という概念を、複素数値関数

$$F^{\mathbf{c}}_v(z):=\det\left(\cos(z\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}})-\frac{\sin(z\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}})}{\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}}}\circ A^{\mathbf{c}}_v\right)\qquad(s\in\mathbb{C})$$

の零点として定義した。ここで、$A_v^{\mathbf{c}}$, $\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}}$ は、各々、A_v, $\sqrt{R(v)}$ の複素化を表す。M の γ_v に沿う複素焦半径 z に対し、$\mathrm{Ker}\left(\cos(z\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}})-\dfrac{\sin(z\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}})}{\sqrt{R(v)}^{\mathbf{c}}}\circ A_v^{\mathbf{c}}\right)$ $(\subset (T_xM)^{\mathbf{c}})$ を z に対する零化空間とよび、その複素次元を z の重複度とよぶ。M の γ_v に沿う複素焦半径の全体を $\mathcal{FR}^{\mathbf{C}}_{M,v}$ と表す。G/K がユークリッド空間および球面の場合、$(*_{\mathbf{C}})$ が成り立つことが示される。G/K が一定の断面曲率 $c(<0)$ をもつ双曲空間の場合、

$$F_v^{\mathbf{c}}(z)=\det\left(\cos(\mathbf{i}z\sqrt{-c})\mathrm{id}-\frac{\sin(\mathbf{i}z\sqrt{-c})}{\mathbf{i}\sqrt{-c}}A_v^{\mathbf{c}}\right)$$

となり、それゆえ、$\mathcal{FR}^{\mathbf{C}}_{M,v}$ は、

$$\begin{gathered}\left\{\frac{1}{\sqrt{-c}}\left(\mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{-c}}{\lambda}+j\pi\mathbf{i}\right)\,\middle|\,\lambda\in\mathrm{Spec}\,A_v\ \text{s.t.}\ |\lambda|>\sqrt{-c},\quad j\in\mathbb{Z}\right\}\cup\\ \left\{\frac{1}{\sqrt{-c}}\left(\mathrm{arctanh}\frac{\lambda}{\sqrt{-c}}+(j+\frac{1}{2})\pi\mathbf{i}\right)\,\middle|\,\lambda\in\mathrm{Spec}\,A_v\ \text{s.t.}\ |\lambda|<\sqrt{-c},\quad j\in\mathbb{Z}\right\}\end{gathered}$$

に等しい。それゆえ、$(*_{\mathbf{C}})$ が成り立つためには、A_v のすべての固有値が $\pm\sqrt{-c}$ に等しくないことが必要十分条件である。

M が C^ω 級であるとする。このとき、その (部分多様体としての) 複素化 $M^{\mathbf{c}}$ が、G/K の複素化であるアンチケーラー対称空間 $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内のアンチケーラー部分多様体として定義される ([Koi2] 参照)。J, $\widehat{R}$ を、各々、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の複素構造, 曲率テンソルとし、$\widehat{A}$, $\widehat{\exp}^{\perp}$ を、各々、$M^{\mathbf{c}}$ の形テンソル, 法指数写像とする。また、$\widehat{\mathcal{H}}$ を、$M^{\mathbf{c}}$ の法バンドル $T^{\perp}(M^{\mathbf{c}})$ 上の $M^{\mathbf{c}}$ の法接続に関する水平分布とする。$v\in T_x^{\perp}M(\subset T_x^{\perp}(M^{\mathbf{c}}))$ とし、$z=s+t\mathbf{i}\in\mathbb{C}$ $(s,t\in\mathbb{R})$ とする。このとき、$\mathrm{Ker}\,\widehat{\exp}^{\perp}_{*sv+tJv}\subset\widehat{\mathcal{H}}_{sv+tJv}$ となり、

$$\widehat{\exp}^{\perp}_{*sv+tJv}(X^L_{sv+tJv})=P_{\gamma_{sv+tJv}}(Q_{v,z}(X))\quad(X\in T_x(M^{\mathbf{c}}))$$

を得る。ただし、X^L_{s+tJv} は、X の $sv+tJv$ への水平リフトを表し、$P_{\gamma_{sv+tJv}}$ は、$M^{\mathbf{c}}$ の法測地線 γ_{sv+tJv} に沿う平行移動を表し、$Q_{v.z}$ は

$$Q_{v,z}:=\cos\left(s\sqrt{\widehat{R}(v)}+t\left(J\circ\sqrt{\widehat{R}(v)}\right)\right)-\frac{\sin\left(s\sqrt{\widehat{R}(v)}+t\left(J\circ\sqrt{\widehat{R}(v)}\right)\right)}{\sqrt{\widehat{R}(v)}}\circ\widehat{A}_v$$

によって定義される $T_x(M^{\mathbf{c}})$ からそれ自身への複素線形写像を表す。それゆえ、$\widehat{\exp}^{\perp}(sv+tJv)$ が $M^{\mathbf{c}}$ の γ_{sv+tJv} に沿う焦点であることと、$z=s+t\mathbf{i}$ が $\widehat{F}_v(z):=\det Q_{v,z}$ によって定義される複素数値関数 $\widehat{F}_v$ の零点であることが同値であることが示される。一方、明らかに $\widehat{F}_v$ の零点と $F_v^{\mathbf{c}}$ の零点は一致する。したがって、次の事実が示される。

事実 $z=s+t\mathbf{i}$ が M の γ_v に沿う複素焦半径であること $\widehat{\exp}^{\perp}(sv+tJv)$ が $M^{\mathbf{c}}$ の γ_{sv+tJv} に沿う焦点であることは同値である。

このように、複素焦半径の幾何学的意味を掴むことができるのである。

例 $(H^m(\bar{c})\subset H^{m+1}(c))$ $H^{m+1}(c)$ 内の全臍的超曲面 $M:=H^m(\bar{c})$ を考える。この主曲率は $\sqrt{\bar{c}-c}$ となり、

$$\mathcal{FR}^{\mathbf{C}}_{M,v}=\left\{\frac{1}{\sqrt{-c}}\left(\mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}}+(j+\frac{1}{2})\pi\mathbf{i}\right)\,\middle|\,j\in\mathbb{Z}\right\}$$

となる。それゆえ、$M^{\mathbf{c}}=S^m_{\mathbf{C}}(\bar{c})(\subset S^{m+1}_{\mathbf{C}}(c))$ の複素測地線 $\gamma^{\mathbf{c}}_v$ に沿う焦点集合は、
$\mathcal{F}:=\left\{\widehat{\exp}^{\perp}(a_jv+b_jJv)\,|\,j\in\mathbb{Z}\right\}$ (ただし、$a_j+b_j\mathbf{i}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\left(\mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}}+(j+\frac{1}{2})\pi\mathbf{i}\right)$)
となる。ここで、$\mathcal{F}$ を含む複素球面 $S^{m+1}_{\mathbf{C}}(c)$ の実形が存在することを注意しておく。この実形は、$H^m(c)$ でもコンパクト実形 $H^m_m(c)(\underset{\mathrm{anti-isom}}{=}S^m(-c))$ でもなく、擬双曲空間 $H^m_{m-1}(c)(\underset{\mathrm{anti-isom}}{=}S^m_1(-c))$ である。

§2 Hermann 型作用の軌道幾何

$H\curvearrowright G/K$ を非コンパクト型対称空間 G/K 上の Hermann 型作用とし、M をその主軌道とする。$\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{h}$ を、各々、G,K,H のリー代数とし、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ をカルタン分解とし、$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{q}$ を (G,H) に付随する標準分解とする。θ を $(\mathrm{Fix}\,\theta)_0\subset K\subset\mathrm{Fix}\,\theta$ を満たす G のカルタン対合とし、σ を $(\mathrm{Fix}\,\sigma)_0\subset H\subset\mathrm{Fix}\,\sigma$ を満たす G の対合とする。θ,σ から誘導される $\mathfrak{g}$ の対合も同じ記号で表すことにする。必要ならば、H を適当な共役群にすり替えることにより、σ と θ は可換であるとしてよい ([Be, Lemma 10.2] を参照)。それゆえ、$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}+\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ が成り立つ。このすり替えにしたがって、M を適当な合同な部分多様体にすり替えることにする。このとき、$F:=H(eK)$ (e : G の単位元) は鏡映部分多様体になり、それゆえ、$F^{\perp}:=\exp^{\perp}(T^{\perp}_{eK}F)$ も鏡映部分多様体になる。$x\in M\cap F^{\perp}$ と $v(\neq 0)\in T^{\perp}_xM$ をとる。Z を、$\mathrm{Exp}\,Z=x$ を満たす $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の元とし、$\bar{v}:=(\exp Z)^{-1}_*(v)$ とする。ここで、Exp は、G/K の eK における指数写像を表し、exp はリー群 G の指数写像を表す。$\mathfrak{b}:=(\exp Z)^{-1}_*(T^{\perp}_xM)$ とする。これは、$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大アーベル部分空間となる。$\mathfrak{p}=\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})+\sum_{\beta\in\triangle'_+}\mathfrak{p}_\beta$ を $\mathfrak{b}$ に関するルート空間分解とする。ここで、$\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$ は、$\mathfrak{b}$ の $\mathfrak{p}$ における中心化代数を表し、$\triangle'_+$ は、ルート系 $\triangle':=\{\beta\in\mathfrak{b}^*\,|\,\exists X(\neq 0)\in\mathfrak{p}\ \mathrm{s.t.}\ \mathrm{ad}(b)^2(X)=\beta(b)^2X\ (\forall b\in\mathfrak{b})\}$ の $\mathfrak{b}^*$ のある辞書式順序に関する正のルート系を表し、$\mathfrak{p}_\beta$ を $\beta\in\triangle'_+$ に対するルート空間を表す。また、${\triangle'}^V_+:=\{\beta\in\triangle'_+\,|\,\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{q}\neq\{0\}\}$, ${\triangle'}^H_+:=\{\beta\in\triangle'_+\,|\,\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{h}\neq\{0\}\}$ とする。このとき、$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}=\mathfrak{b}+\sum_{\beta\in{\triangle'}^V_+}(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{q})$ および $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}=\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{b})+\sum_{\beta\in{\triangle'}^H_+}(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{h})$ が成り立つ。ここで、$\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{b})$ は、$\mathfrak{b}$ の $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$ における中心化代数を表す。v を正則元、つまり、任意の $\beta\in\triangle'_+$ に対し、$\beta(\bar{v})\neq 0$ とする。このとき、M の形作用素 A_v に関して、次の関係式が成り立つ：

$$A_v|_{(\exp Z)_*(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{q})}=-\frac{\beta(\bar{v})}{\tanh\beta(Z)}\mathrm{id}\qquad(\beta\in{\triangle'}^V_+),\tag{2.1}$$

$$A_v|_{(\exp Z)_*(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{h})}=-\beta(\bar{v})\tanh\beta(Z)\mathrm{id}\qquad(\beta\in{\triangle'}^H_+),\tag{2.2}$$

$$A_v|_{(\exp Z)_*(\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{b}))}=0.\tag{2.3}$$

ここで、G/K の計量は適当な正の定数倍によってリスケールする必要がある。これらの関係式によれば、

$$(\exp Z)_*\left(\sum_{\beta\in{\triangle'}^V_+}(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{q})\right)=\oplus_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{S}_+}(\mathrm{Ker}(A_v-\lambda\,\mathrm{id})\cap\mathrm{Ker}(R(v)-\mu\,\mathrm{id}))\tag{2.4}$$

および

$$(\exp Z)_*\left(\sum_{\beta\in{\triangle'}^H_+}(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{h})\right)=\oplus_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{S}_-}(\mathrm{Ker}(A_v-\lambda\,\mathrm{id})\cap\mathrm{Ker}(R(v)-\mu\,\mathrm{id}))\tag{2.5}$$

が成り立つ。ここで、$\mathcal{S}_{\pm}$ は、各々、次式によって定義される集合を表す：

$$\mathcal{S}_{+} := \{(\lambda,\mu)\in \mathrm{Spec}\,A_v \times \mathrm{Spec}\,R(v) \mid |\lambda|>|\mu|\}$$
$$\mathcal{S}_{-} := \{(\lambda,\mu)\in \mathrm{Spec}\,A_v \times \mathrm{Spec}\,R(v) \mid |\lambda|<|\mu|\}$$

また、明らかに、

$$(\exp Z)_*\left(\sum_{\beta\in\triangle'^{V}_{+}}(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{q})\right)=T_x(M\cap F^{\perp}) \tag{2.6}$$

および

$$(\exp Z)_*\left(\sum_{\beta\in\triangle'^{H}_{+}}(\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{h})\right)=(T_xM\ominus \mathrm{Ker}\,R(v))\ominus T_x(M\cap F^{\perp}). \tag{2.7}$$

が成り立つ。一方、M の γ_v に沿う焦半径に対する零化空間達の張る空間は、
$\oplus_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{S}_+}(\mathrm{Ker}(A_v-\lambda\,\mathrm{id})\cap\mathrm{Ker}(R(v)-\mu\,\mathrm{id}))$ であることが示される。この事実は、前節で述べた外の空間が双曲空間の場合の焦半径に関する事実 (1.2) から推測されるであろう。したがって、(2.1) $\sim$ (2.4) から、次の事実を得る:

(F1) M の γ_v に沿う焦半径に対する零化空間達は、$T_x(M\cap F^{\perp})$ を張る。

一方、M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達の張る空間は、
$\oplus_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{S}_+\cup\mathcal{S}_-}(\mathrm{Ker}(A_v-\lambda\,\mathrm{id})\cap\mathrm{Ker}(R(v)-\mu\,\mathrm{id}))$ であることが示される。この事実は、前節で述べた外の空間が双曲空間の場合の複素焦半径に関する事実から推測されるであろう。したがって、(2.1) $\sim$ (2.5) から、次の事実を得る:

(F2) M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達は、$(T_xM)^{\mathbf{c}}\ominus(\mathrm{Ker}\,A_v^{\mathbf{c}}\cap\mathrm{Ker}\,R(v)^{\mathbf{c}})$ を張る。

§3 定理 A，B の証明

$M(\subset G/K)$ を定理 A の主張におけるようなものとし、$M^{\mathbf{c}}(\subset G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ をその複素化とする。また、$\phi: H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})\to G^{\mathbf{c}}$ を $G^{\mathbf{c}}$ に対する parallel transport 写像，$\pi: G^{\mathbf{c}}\to G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ を自然な射影とし、$\widetilde{M^{\mathbf{c}}}:=(\pi\circ\phi)^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ とする。

定理 A の証明の流れ

(Step I) M が条件 $(*_{\mathbf{C}})$ を満たすことから、$\widetilde{M^{\mathbf{c}}}$ がプロパーアンチケーラー等径部分多様体であることを示す。(プロパーアンチケーラー等径部分多様体の定義については、[Koi2] を参照。)
(Step II) (Step I) で示した事実を用い、$H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}})$ が線形空間であることを利用して、$\widetilde{M^{\mathbf{c}}}$ が等質であることを示す。(この事実は、[Koi9] において証明されたが、最近、その証明において、改善しなければならない箇所をいくつか見つけ、[Koi10] において改善した。)
(Step III) (Step II) の結果を用いて、M が等質であることを示す。(この事実は、[Koi9] において証明されたが、最近、その証明において、改善しなければならない箇所をいくつか見つけ、[Koi10] において改善した。)
(Step IV) (Step III) の結果を用いて、M が Hermann 型作用の主軌道であることを示す。

定理 B の証明の概略

M は条件 $(*_\mathbf{R})$ を満たすので、条件 $(*_\mathbf{C})$ も満たす。それゆえ、定理 A により、M はある Hermann 型作用 $H \curvearrowright G/K$ の主軌道であることが示される。さらに、M は条件 $(*_\mathbf{R})$ を満たすことから、$H \curvearrowright G/K$ が、イソトロピー作用 $K \curvearrowright G/K$ に軌道同値であることが示される。それゆえ、定理 B の主張を得る。

§4 分類

定理 A と [Koi4] における既約非コンパクト型対称空間上の Hermann 型作用の分類を用いて、各既約非コンパクト型対称空間内の定理 A におけるような等径部分多様体を次のように分類することができる。

定理 C.

M を既約な非コンパクト型対称空間 G/K 内の定理 A におけるような等径部分多様体とする。このとき、M は、表 1 $\sim$ 4 におけるような G の対称部分群 H の G/K への作用のある主軌道に合同である。

G/K	H
$SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ $(n \geq 6,\ n:\mathrm{even})$	$SO(n),\quad SO_0(p,n-p)\ (1 \leq p \leq n-1),\quad Sp(\frac{n}{2},\mathbb{R}),\quad SL(\frac{n}{2},\mathbb{C})\cdot U(1)$ $(SL(p,\mathbb{R}) \times SL(n-p,\mathbb{R}))\cdot \mathbb{R}_*\ \ (2 \leq p \leq n-2)$
$SL(4,\mathbb{R})/SO(4)$	$SO(4),\quad SO_0(1,3),\quad SO_0(2,2),\quad SL(2,\mathbb{C})\cdot U(1),\quad (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))\cdot \mathbb{R}_*$
$SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ $(n \geq 5,\ n:\mathrm{odd})$	$SO(n),\quad SO_0(p,n-p)\ (1 \leq p \leq n-1),$ $(SL(p,\mathbb{R}) \times SL(n-p,\mathbb{R}))\cdot \mathbb{R}_*\ (2 \leq p \leq n-2)$
$SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$	$SO(3),\quad SO_0(1,2)$
$SU^*(2n)/Sp(n)\ (n \geq 4)$	$Sp(n),\quad SO^*(2n),\quad Sp(p,n-p)\ (1 \leq p \leq n-1),\quad SL(n,\mathbb{C})\cdot U(1)$ $SU^*(2p) \times SU^*(2n-2p) \times U(1)\ (2 \leq p \leq n-2)$
$SU^*(6)/Sp(3)$	$Sp(3),\quad SO^*(6),\quad Sp(1,2)$
$SU(p,q)/S(U(p) \times U(q))$ $(4 \leq p < q,\ p,q:\mathrm{even})$	$S(U(p) \times U(q)),\quad SO_0(p,q),\quad Sp(\frac{p}{2},\frac{q}{2}),$ $S(U(i,j) \times U(p-i,q-j))\ \ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq q-1)$
$SU(p,q)/S(U(p) \times U(q))$ $(3 \leq p < q,\ \ p\ \mathrm{or}\ q:\mathrm{odd})$	$S(U(p) \times U(q)),\quad SO_0(p,q),$ $S(U(i,j) \times U(p-i,q-j))\ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq q-1)$
$SU(2,q)/S(U(2) \times U(q))$ $(q \geq 3)$	$S(U(2) \times U(q)),\quad SO_0(2,q),\quad S(U(1,j) \times U(1,q-j))\ (1 \leq j \leq q-1)$
$SU(p,p)/S(U(p) \times U(p))$ $(p \geq 4,\ \ p:\mathrm{even})$	$S(U(p) \times U(p)),\quad SO_0(p,p),\quad SO^*(2p),\quad Sp(\frac{p}{2},\frac{p}{2}),\quad Sp(p,\mathbb{R}),\quad SL(p,\mathbb{C})\cdot U(1)$ $S(U(i,j) \times U(p-i,p-j))\ \ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq p-1)$
$SU(2,2)/S(U(2) \times U(2))$	$S(U(2) \times U(2)),\quad SO_0(2,2),\quad SO^*(4),\quad SL(2,\mathbb{C})\cdot U(1),\quad S(U(1,1) \times U(1,1))$
$SU(p,p)/S(U(p) \times U(p))$ $(p \geq 5,\ \ p:\mathrm{odd})$	$S(U(p) \times U(p)),\quad SO_0(p,p),\quad SO^*(2p),\quad Sp(p,\mathbb{R}),\quad SL(p,\mathbb{C})\cdot U(1)$ $S(U(i,j) \times U(p-i,p-j))\ \ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq p-1)$
$SU(3,3)/S(U(3) \times U(3))$	$S(U(3) \times U(3)),\quad SO_0(3,3),\quad SO^*(6),\quad SL(3,\mathbb{C})\cdot U(1),$ $S(U(1,1) \times U(2,2)),\quad S(U(1,2) \times U(2,1))$

表 1

G/K	H
$SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$ $(n \geq 6,\ \ n:\mathrm{even})$	$SU(n),\ \ SO(n,\mathbb{C}),\ \ SL(n,\mathbb{R}),\ \ SU(i,n-i)\ \ (1 \leq i \leq n-1),\ \ Sp(\frac{n}{2},\mathbb{C}),\ \ SU^*(n)$ $SL(i,\mathbb{C}) \times SL(n-i,\mathbb{C}) \times U(1)\ \ (2 \leq i \leq n-2)$
$SL(4,\mathbb{C})/SU(4)$	$SU(4),\ \ SO(4,\mathbb{C}),\ \ SL(4,\mathbb{R}),\ \ SU(i,4-i)\ \ (1 \leq i \leq 3),\ \ SU^*(4)$ $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}) \times U(1)$
$SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$ $(n \geq 5,\ \ n:\mathrm{odd})$	$SU(n),\ \ SO(n,\mathbb{C}),\ \ SL(n,\mathbb{R}),\ \ SU(i,n-i)\ \ (1 \leq i \leq n-1)$ $SL(i,\mathbb{C}) \times SL(n-i,\mathbb{C}) \times U(1)\ \ (2 \leq i \leq n-2)$
$SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$	$SU(3),\ \ SO(3,\mathbb{C})$
$SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ $(4 \leq p < q,\ \ p,q:\mathrm{even})$	$SO(p) \times SO(q),\ \ SU(\frac{p}{2},\frac{q}{2}) \cdot U(1),$ $SO_0(i,j) \times SO_0(p-i,q-j)\ \ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq q-1)$
$SO_0(2,q)/SO(2) \times SO(q)$ $(4 \leq q,\ \ q:\mathrm{even})$	$SO(2) \times SO(q),\ \ SO_0(1,j) \times SO_0(1,q-j)\ \ (1 \leq j \leq q-1)$
$SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ $(2 \leq p < q,\ \ p \text{ or } q:\mathrm{odd})$	$SO(p) \times SO(q),\ \ SO_0(i,j) \times SO_0(p-i,q-j)\ \ (1 \leq i \leq p-1,\ \ 1 \leq j \leq q-1)$
$SO_0(p,p)/SO(p) \times SO(p)$ $(p \geq 4,\ \ p:\mathrm{even})$	$SO(p) \times SO(p),\ \ SO(p,\mathbb{C}),\ \ SU(\frac{p}{2},\frac{p}{2}) \cdot U(1),\ \ SL(p,\mathbb{R}) \cdot U(1)$ $SO_0(i,j) \times SO_0(p-i,p-j)\ \ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq p-1)$
$SO_0(2,2)/SO(2) \times SO(2)$	$SO(2) \times SO(2),\ \ SO(2,\mathbb{C}),\ \ SO_0(1,1) \times SO_0(1,1)$
$SO_0(p,p)/SO(p) \times SO(p)$ $(p \geq 5,\ \ p:\mathrm{odd})$	$SO(p) \times SO(p),\ \ SO(p,\mathbb{C}),\ \ SL(p,\mathbb{R}) \cdot U(1),$ $SO_0(i,j) \times SO_0(p-i,p-j)\ (1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq p-1)$
$SO_0(3,3)/SO(3) \times SO(3)$	$SO(3) \times SO(3),\ \ SO(3,\mathbb{C}),\ \ SO_0(1,1) \times SO_0(2,2)$ $SO_0(1,2) \times SO_0(2,1)$
$SO^*(2n)/U(n)$ $(n \geq 6,\ \ n:\mathrm{even})$	$U(n),\ \ SO(n,\mathbb{C}),\ \ SU^*(n) \cdot U(1)$ $SO^*(2i) \times SO^*(2n-2i)\ \ (2 \leq i \leq n-2),$ $SU(i,n-i) \cdot U(1)\ \ ([\frac{i}{2}] + \left[\frac{n-i}{2}\right] \geq 2)$
$SO^*(8)/U(4)$	$U(4),\ \ SO(4,\mathbb{C}),\ \ SO^*(4) \times SO^*(4),\ \ SU(2,2) \cdot U(1)$
$SO^*(2n)/U(n)$ $(n \geq 5,\ \ n:\mathrm{odd})$	$U(n),\ \ SO(n,\mathbb{C}),\ \ SO^*(2i) \times SO^*(2n-2i)\ \ (2 \leq i \leq n-2),$ $SU(i,n-i) \cdot U(1)\ \ ([\frac{i}{2}] + \left[\frac{n-i}{2}\right] \geq 2)$
$SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$ $(n \geq 8,\ \ n:\mathrm{even})$	$SO(n),\ \ SO(i,\mathbb{C}) \times SO(n-i,\mathbb{C})\ \ (2 \leq i \leq n-2),$ $SO_0(i,n-i)\ \ ([\frac{i}{2}] + \left[\frac{n-i}{2}\right] \geq 2),\ \ SL(\frac{n}{2},\mathbb{C}) \cdot SO(2,\mathbb{C}),\ \ SO^*(n)$
$SO(6,\mathbb{C})/SO(6)$	$SO(6),\ \ SO(i,\mathbb{C}) \times SO(6-i,\mathbb{C})\ \ (2 \leq i \leq 4),$ $SO_0(2,4),\ \ SO_0(3,3),\ \ SO^*(6)$
$SO(4,\mathbb{C})/SO(4)$	$SO(4),\ \ SO(2,\mathbb{C}) \times SO(2,\mathbb{C}),\ \ SO_0(2,2),\ \ SO^*(4)$
$SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$ $(n \geq 5,\ \ n:\mathrm{odd})$	$SO(n),\ \ SO(i,\mathbb{C}) \times SO(n-i,\mathbb{C})\ \ (2 \leq i \leq n-2),$ $SO_0(i,n-i)\ \ ([\frac{i}{2}] + \left[\frac{n-i}{2}\right] \geq 2)$

表 2

G/K	H
$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$ $(n \geq 4,\ n : \text{even})$	$U(n)$, $SU(i, n-i) \cdot U(1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $SL(n,\mathbb{R}) \cdot U(1)$, $Sp(\frac{n}{2}, \mathbb{C})$, $Sp(i,\mathbb{R}) \times Sp(n-i,\mathbb{R})$ $(2 \leq i \leq n-2)$
$Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$	$U(2)$, $SU(1,1) \cdot U(1)$
$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$ $(n \geq 5,\ n : \text{odd})$	$U(n)$, $SU(i, n-i) \cdot U(1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $SL(n,\mathbb{R}) \cdot U(1)$, $Sp(i,\mathbb{R}) \times Sp(n-i,\mathbb{R})$ $(2 \leq i \leq n-2)$
$Sp(3,\mathbb{R})/U(3)$	$U(3)$, $SU(1,2) \cdot U(1)$, $SL(3,\mathbb{R}) \cdot U(1)$
$Sp(p,q)/Sp(p) \times Sp(q)$ $(2 \leq p < q)$	$Sp(p) \times Sp(q)$, $SU(p,q) \cdot U(1)$, $Sp(i,j) \times Sp(p-i, q-j)$ $(1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq q-1)$
$Sp(p,p)/Sp(p) \times Sp(p)$ $(p \geq 3)$	$Sp(p) \times Sp(p)$, $SU(p,p) \cdot U(1)$, $SU^*(2p) \cdot U(1)$, $Sp(p,\mathbb{C})$ $Sp(i,j) \times Sp(p-i, p-j)$ $(1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq p-1)$
$Sp(2,2)/Sp(2) \times Sp(2)$	$Sp(2) \times Sp(2)$, $SU(2,2) \cdot U(1)$, $SU^*(4) \cdot U(1)$, $Sp(1,1) \times Sp(1,1)$
$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$ $(n \geq 4)$	$Sp(n)$, $SL(n,\mathbb{C}) \cdot SO(2,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(i, n-i)$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $Sp(i,\mathbb{C}) \times Sp(n-i,\mathbb{C})$ $(2 \leq i \leq n-2)$
$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$ $(n = 2, 3)$	$Sp(n)$, $SL(n,\mathbb{C}) \cdot SO(2,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(i, n-i)$ $(1 \leq i \leq n-1)$
$E_6^6/(Sp(4)/\{\pm 1\})$	$Sp(4)/\{\pm 1\}$, $Sp(4,\mathbb{R})$, $Sp(2,2)$, $SU^*(6) \cdot SU(2)$, $SL(6,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$, $SO_0(5,5) \cdot \mathbb{R}$, F_4^4
$E_6^2/SU(6) \cdot SU(2)$	$SU(6) \cdot SU(2)$, $Sp(1,3)$, $Sp(4,\mathbb{R})$, $SU(2,4) \cdot SU(2)$, $SU(3,3) \cdot SL(2,\mathbb{R})$, $SO^*(10) \cdot U(1)$, $SO_0(4,6) \cdot U(1)$
$E_6^{-14}/Spin(10) \cdot U(1)$	$Spin(10) \cdot U(1)$, $Sp(2,2)$, $SU(2,4) \cdot SU(2)$, $SU(1,5) \cdot SL(2,\mathbb{R})$, $SO^*(10) \cdot U(1)$, $SO_0(2,8) \cdot U(1)$
E_6^{-26}/F_4	F_4, F_4^{-20}, $Sp(1,3)$
$E_6^{\mathbb{C}}/E_6$	E_6, E_6^6, E_6^2, E_6^{-14}, $Sp(4,\mathbb{C})$, $SL(6,\mathbb{C}) \cdot SL(2,\mathbb{C})$, $SO(10,\mathbb{C}) \cdot Sp(1)$, $F_4^{\mathbb{C}}$. E_6^{-26}
$E_7^7/(SU(8)/\{\pm 1\})$	$SU(8)/\{\pm 1\}$, $SL(8,\mathbb{R})$, $SU^*(8)$, $SU(4,4)$, $SO^*(12) \cdot SU(2)$, $SO_0(6,6) \cdot SL(2,\mathbb{R})$, $E_6^6 \cdot U(1)$, $E_6^2 \cdot U(1)$
$E_7^{-5}/SO'(12) \cdot SU(2)$	$SO'(12) \cdot SU(2)$, $SU(4,4)$, $SU(2,6)$, $SO^*(12) \cdot SL(2,\mathbb{R})$, $SO_0(4,8) \cdot SU(2)$, $E_6^2 \cdot U(1)$, $E_6^{-14} \cdot U(1)$
$E_7^{-25}/E_6 \cdot U(1)$	$E_6 \cdot U(1)$, $SU^*(8)$, $SU(2,6)$, $SO^*(12) \cdot SU(2)$, $SO_0(2,10) \cdot SL(2,\mathbb{R})$, $E_6^{-14} \cdot U(1)$, $E_6^{-26} \cdot U(1)$
$E_7^{\mathbb{C}}/E_7$	E_7, E_7^7, E_7^{-5}, E_7^{-25}, $SL(8,\mathbb{C})$, $SO(12,\mathbb{C}) \cdot SL(2,\mathbb{C})$, $E_6^{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{C}^*$

表 3

G/K	H
$E_8^8/SO'(16)$	$SO'(16)$, $SO^*(16)$, $SO_0(8,8)$, $E_7^{-5}\cdot Sp(1)$, $E_7^7\cdot SL(2,\mathbb{R})$
$E_8^{-24}/E_7\cdot Sp(1)$	$E_7\cdot Sp(1)$, $E_7^{-5}\cdot Sp(1)$, $E_7^{-25}\cdot SL(2,\mathbb{R})$, $SO^*(16)$, $SO_0(4,12)$
$E_8^{\mathbf{c}}/E_8$	E_8, E_8^8, E_8^{-24}, $SO(16,\mathbb{C})$, $E_7^{\mathbf{c}}\times SL(2,\mathbb{C})$
$F_4^4/Sp(3)\cdot Sp(1)$	$Sp(3)\cdot Sp(1)$, $Sp(1,2)\cdot Sp(1)$, $Sp(3,\mathbb{R})\cdot SL(2,\mathbb{R})$
$F_4^{\mathbf{c}}/F_4$	F_4, F_4^4, F_4^{-20}, $Sp(3,\mathbb{C})\cdot SL(2,\mathbb{C})$
$G_2^2/SO(4)$	$SO(4)$, $SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$, $\alpha(SO(4))$ (α :an outer automorphism of G_2^2)
$G_2^{\mathbf{c}}/G_2$	G_2, G_2^2, $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$

表 4

参考文献

[Be] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. III. Sér. **74** (1959) 85-177.
[BRT] J. Berndt, J. C. Diaz-Ramos and H. Tamaru, Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type, J. Differential Geom. **86** (2010), 191-235.
[C] U. Christ, Homogeneity of equifocal submanifolds, J. Differential Geom. **62** (2002), 1–15.
[G] L. Geatti, Complex extensions of semisimple symmetric spaces, manuscripta math. **120** (2006) 1-25.
[GH] C. Gorodski and E. Heintze, Homogeneous structures and rigidity of isoparametric submanifolds in Hilbert space, J. Fixed Point Theorey Appl. **11** (2012) 93-136.
[HL] E. Heintze and X. Liu, Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds, Ann. of Math. **149** (1999), 149-181.
[HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley type restric- ction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
[Kol] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 571–612.
[TT] C. L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, J. Differential Geom. **42** (1995), 665–718.
[Te1] C. L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geom. **29** (1989), 9–47.
[Te2] C. L. Terng, Polar actions on Hilbert space, J. Geom. Anal. **5** (1995), 129–150.
[Koi1] N. Koike, Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space, Kyushu J. Math. **58** (2004), 167–202.
[Koi2] N. Koike, Complex equifocal submanifolds and infinite dimensional anti- Kaehlerian isoparametric submanifolds, Tokyo J. Math. **28** (2005) 201-247.
[Koi3] N. Koike, Actions of Hermann type and proper complex equifocal submanifolds, Osaka J. Math. **42** (2005) 599-611.
[Koi4] N. Koike, Complex hyperpolar actions with a totally geodesic orbit, Osaka J. Math. **44** (2007), 491-503.
[Koi5] N. Koike, The homogeneous slice theorem for the complete complexification of a proper complex equifocal submanifold, Tokyo J. Math. **33** (2010), 1-30.
[Koi6] N. Koike, On curvature-adapted and proper complex equifocal submanifolds, Kyungpook Math. J. **50** (2010), 509-536.
[Koi7] N. Koike, Examples of a complex hyperpolar action without singular orbit, Cubo A Math. **12** (2010), 127-143.
[Koi8] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, Asian J. Math. **15** (2011), 101-128.
[Koi9] N. Koike, Homogeneity of proper complex equifocal submanifolds, arXiv:math.DG/0807v2.
[Koi10] N. Koike, The classifications of certain kind of isoparametric submanifolds in non-compact symmetric spaces, submitted for publication.