

スピン作用をもつ超曲面とモーメント写像

部分多様体幾何とリー群作用 2012(東京理科大学 9 月 4 日)

宮岡礼子 (東北大学)

概要

モーメント写像については、幾何シンポジウムの講演と重なるので、ここでは主として球面 S^n の等径超曲面族の $g = 6$ の分類問題について専門家向けに話す。等径超曲面の分類はここ 5 年間で著しく進み、ほぼ完成したといってよい。モーメント写像についても触れるが、詳細はシンポジウムの予稿参照。

1 序論

定義. $\overline{M}$ を完備リーマン多様体, ∇ をその Levi-Civita 接続, Δ を Laplacian とする.

(1) C^2 関数 $f: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ が次をみたすとき, f を 等径関数 という.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \|\nabla f\|^2 &= \varphi(f), \quad \varphi: f(\overline{M}) \rightarrow \mathbb{R}: C^2 \\ \text{(II)} \quad \Delta f &= \psi(f), \quad \psi: f(\overline{M}) \rightarrow \mathbb{R}: C^0 \end{aligned}$$

(2) 等径関数の正則値の等位面を 等径超曲面 という.

S^n の等径超曲面は主曲率一定で、その平行超曲面もすべて等径超曲面となる。実際次が成り立つ:

事実 1. (É. Cartan)

$\overline{M}$ を空間形 (E^n , S^n or H^n) として、その平行超曲面族 $\{M_t\}$ を考えるとき、次は同値である:

- (i) $\{M_t\}$ は等径超曲面族.
- (ii) すべての M_t の平均曲率は一定.
- (iii) ある M_t は一定な主曲率をもつ.

E^n , H^n には全測地的 (に平行), 全臍的, それらの直積しかない。以下, S^n の等径超曲面を考えよう。

事実 2. (Münzner, '81) S^n の等径超曲面 M_t に対して次が成り立つ:

- (a) $g = \#\{\text{相異なる主曲率}\} \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- (b) 主曲率 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_g$ の重複度 $m_1, m_2, \dots, m_g$ は $m_i = m_{i+2}$ をみたす.
- (c) 次数 g の斉次多項式 Cartan-Münzner 多項式 $F: E^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して次をみたす:

$$\begin{aligned} (i) \quad \|DF(x)\|^2 &= g^2 \|x\|^{2g-2} \\ (ii) \quad \Delta F(x) &= \frac{m_2 - m_1}{2} g^2 \|x\|^{g-2}, \end{aligned}$$

このとき $f = F|_{S^n}: S^n \rightarrow [-1, 1]$ は S^n の等径関数, $t \in (-1, 1)$ の等位面 $M_t = f^{-1}(t)$ は等径超曲面である。

定義. $M_{\pm} = f^{-1}(\pm 1)$ を 焦部分多様体 という。

注意. $\{\text{等質超曲面}\} \subset \{\text{等径超曲面}\}$ は明らか. S^n の等質超曲面は階数 2 の対称空間のイソトロピー軌道で与えられ、すべて分類されている (Hsiang-Lawson, '71).

S^n の等径超曲面の分類

g	1	2	3	4 (未完)	6
M	S^{n-1} 等質	$S^k \times S^{n-k-1}$ 等質	$C_{\mathbb{F}}$ 等質	等質かまたは OT-FKM 型	N^6, M^{12} 等質

事実 3. (Cartan ‘38) $g = 3$ の等径超曲面 $C_{\mathbb{F}}^{3d}$ は射影平面 $P^2\mathbb{F}$ の S^4, S^7, S^{13}, S^{25} への標準埋め込みのチューブとして得られる. ここに $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ (Cayley 数). また, $m_i = m = d$ ($d = 1, 2, 4, 8$) である.

事実 4. (Abresch, ‘83) $g = 6$ のとき $m_i = m \in \{1, 2\}$ である.

$m = 1, 2$ に対しては等質な例がある. これらは, 次のように Cartan 超曲面と深く関係している.

命題 1. (M. ‘93) $(g, m) = (6, 1)$ の等質超曲面 N^6 は S^7 内の $G_2/SO(4)$ のイソトロピー軌道として得られる. これは実 Cartan 超曲面 $C_{\mathbb{R}}$ をファイバーとするファイブレーション $\pi: N^6 \rightarrow S^3$ をもつ (実は $N^6 \cong S^3 \times C_{\mathbb{R}}$).

命題 2. (M. ‘11) $(g, m) = (6, 2)$ の等質超曲面 M^{12} は S^{13} 内の $G_2 \times G_2/G_2$ のイソトロピー軌道として得られる. これは複素 Cartan 超曲面 $C_{\mathbb{C}}$ をファイバーとする Kähler ファイブレーション $\pi: M \rightarrow S^6$ をもつ.

$m = 1$

$m = 2$

$$\begin{array}{c} N^6 \cong SO(4)/Z_2 \oplus Z_2 \\ \downarrow \leftarrow C_{\mathbb{R}} \cong SO(3)/Z_2 \oplus Z_2 \\ S^3 \cong SO(4)/SO(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} M^{12} \cong G_2/T^2 \\ \downarrow \leftarrow C_{\mathbb{C}} \cong SU(3)/T^2 \\ S^6 \cong G_2/SU(3) \end{array}$$

注意. $(g, m) = (6, 2)$ の焦部分多様体 $M_{\pm}$ は Bryant の ツイスターファイブレーションと関係している:

- (i) $M_+ \cong Q^5(\mathbb{C}) \rightarrow S^6 = G_2/SU(3)$ のファイバーは $\mathbb{CP}^2$ で, これは S^6 上のツイスターファイブレーションと微分同相である.
- (ii) $M_- \cong Q^5(\mathbb{C}) \rightarrow G_2/SO(4)$ のファイバーは $\mathbb{CP}^1$ で, これは quaternionic Kähler 多様体 $G_2/SO(4)$ 上のツイスターファイブレーションと微分同相である.

● 特に M_+ と M_- は合同でない.

Yau の問題: S^n の等径超曲面を分類せよ (1992).

事実 5. (Dorfmeister-Neher, ‘85, M. ‘09) $(g, m) = (6, 1)$ の等径超曲面は等質, すなわち $G_2/SO(4)$ のイソトロピー軌道.

Dorfmeister-Neher の証明は複雑な代数的議論で, $m = 2$ には拡張不可能であった. そこで幾何学的な別証を与え, それを拡張する事により次を得た.

定理 1. (M. to appear in Ann. of Math.) $(g, m) = (6, 2)$ の等径超曲面は等質, すなわち $G_2 \times G_2/G_2$ のイソトロピー軌道.

キーとなる命題 3. (M. ‘93, ‘11) $g = 6$ の等径超曲面が等質 $\Leftrightarrow$ 条件 A をみたす, すなわち, 焦部分多様体の型作用素が法方向によらない核をもつ.

● $m = 2$ のとき, 条件 A を示す事は非常に難しい. 以下, 条件 A の示し方を述べる.

2 準備

M を $(g, m) = (6, 2)$ の等径超曲面, $\lambda_1 > \dots > \lambda_6$ をその主曲率とすると次はよく知られている.

$$\lambda_i = \cot \theta_i, \quad \theta_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \theta_{i-1} - \theta_i = \frac{\pi}{6}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

$D_i = D_i(p)$ を λ_i に対する主曲率分布 ($\dim D_i = 2$) とすると, $T_p M = D_1 \oplus \dots \oplus D_6$ である. D_i は完全可積分分布で, そのリーフ L_i は 2 次元球面である. $e_i, e_{\bar{i}}$ を $D_i, i = 1, \dots, 6$ の正規直交基底とする.

• i と $\bar{i}$ をあわせて $\underline{i}$ と記す.

焦写像 $f_i : M \rightarrow M_i$ を次で定義する:

$$f_i(p) = \cos \theta_i p + \sin \theta_i \xi_p, \quad \xi_p \in T_p^\perp M, |\xi_p| = 1.$$

これは D_i の各リーフ $L_i(p)$ を一点 $\bar{p}$ につぶす.

以下主として $M_+ = M_6$ 上で議論するので $f = f_6, \bar{p} = f(o)$ と記す. このとき

$$TM_+ = \oplus_{i=1}^5 f_* D_i, \quad T^\perp M_+ = \mathbb{R} \eta \oplus f_* D_6$$

$\eta = f_* \xi$ だが f_* は略す. $\eta, \zeta = e_6, \bar{\zeta} = e_{\bar{6}}$ は $T^\perp M_+$ の正規直交基底である.

Lemma 2.1 B_n を $n \in T^\perp M_+ = \mathbb{R} \eta \oplus f_* D_6$ に対する M_+ の型作用素とする. B_n はイソスペクトラル, つまり重複度 2 の固有値 $\pm\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, 0$ を持つ. 固有ベクトルは n に依存する.

特に型作用素 $L(t) = \cos t B_\eta + \sin t B_\zeta$ の核は $D_3(t) = D_3(p(t))$ で与えられる. ここに $p(t)$ は p における D_6 のリーフ上の e_6 方向の測地線 c を描く; $p(t) = \cos \theta_6 \bar{p} + \cos t(p - \cos \theta_6 \bar{p}) - \sin t \sin \theta_6 \zeta_p$.

• 条件 A を示すには c に沿う $D_3(t)$ の挙動の解明が必要である.

基底 $(e_1, e_{\bar{1}}, \dots, e_5, e_{\bar{5}}) \in D_1 \oplus \dots \oplus D_5$ に対して, イソスペクトラル作用素 $L(t) = \cos t B_\eta + \sin t B_\zeta$ は次で与えられる:

$$B_\eta = \begin{pmatrix} \sqrt{3}I & 0 & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{3}}I & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}I & \\ & & 0 & & -\sqrt{3}I \end{pmatrix}, B_\zeta = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ & 0 & B_{23} & B_{24} & B_{25} \\ & & 0 & B_{34} & B_{35} \\ & & & 0 & B_{45} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

ここに各ブロックは 2 次正方行列で, B_{ij} は, $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma = \langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta, e_\gamma \rangle$ を用いて,

$$B_{ij} = \frac{1}{\sin \theta_6 (\lambda_i - \lambda_6)} \begin{pmatrix} \Lambda_{i6}^j & \Lambda_{i6}^{\bar{j}} \\ \Lambda_{\bar{i}6}^j & \Lambda_{\bar{i}6}^{\bar{j}} \end{pmatrix} = {}^t B_{ji}. \quad (1)$$

と表される. B_η と B_ζ は対称である.

条件 A $\Leftrightarrow$ 焦部分多様体の型作用素は法方向によらない核をもつ.
 $\Leftrightarrow B_{i3} = 0 = B_{3j}$ (i.e., $\ker B_\zeta = D_3$).

従って

条件 A $\Leftrightarrow \Lambda_{36}^\gamma = 0$

G_2 -軌道 M^G の型作用素: 焦部分多様体 M_+^G の型作用素は次で与えられる:

$$\begin{aligned} B_\eta &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}I & & & & \\ & 1/\sqrt{3}I & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1/\sqrt{3} & \\ & & & & -\sqrt{3}I \end{pmatrix}, \quad B_\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}I \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}I & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_{\bar{\zeta}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}J \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}J & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}J & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

もう一方の焦部分多様体 M_-^G の型作用素 C_ρ , C_ω , $C_{\bar{\omega}}$ は, $D_2 \oplus \cdots \oplus D_6$ の基底 $e_2, e_{\bar{2}}, \dots, e_6, e_{\bar{6}}$ と, 法基底 $\omega = e_1, \bar{\omega} = e_{\bar{1}}$ について次で得られる:

$$\begin{aligned} C_\rho &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}I & & & & \\ & 1/\sqrt{3}I & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1/\sqrt{3} & \\ & & & & -\sqrt{3}I \end{pmatrix}, \quad C_\omega = \begin{pmatrix} 0 & J & 0 & 0 & 0 \\ -J & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}J & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 & -J & 0 \end{pmatrix}, \\ C_{\bar{\omega}} &= \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}I & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

- これからも M_+^G は M_-^G と合同でない事が分かる.

注意. イソスペクトラル作用素 $\cos t B_\eta + \sin t A$ において, 核が t に依存するものは多数ある. 例えば A として次のものをとればよい (ブロックは 2×2 行列と思う).

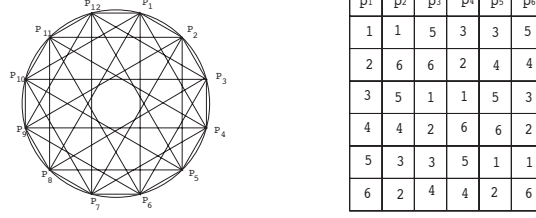
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix},$$

従って条件 **A** はイソスペクトラルと代数的議論だけでは得られない.

一般の $(g, m) = (6, 2)$ の等径超曲面に話を戻す. このとき次がなりたつ:

大域対称性



上の図で, $p_1 \in M$ における法測地線 γ にそって, $M \cap \gamma$ は 12 点 $p_1, \dots, p_{12}$ から成り立ち,

$$D_1(p_1) \parallel D_1(p_2) \parallel D_5(p_3) \parallel D_3(p_4) \parallel D_3(p_5) \parallel D_5(p_6)$$

が成り立つ. ここに $\parallel$ は平行を意味する ($\because$ トート性から (M. '89)). これにより, $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma(p_i)$ と $\Lambda_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}(p_j)$ の間の関係が生じる. この大域的対称性を用いて次の事が分かる.

$$\text{条件 A} \Leftrightarrow \Lambda_{36}^\gamma = 0 = \Lambda_{14}^\gamma = \Lambda_{25}^\gamma$$

● 条件 A がみたされるなら, 次の Gauss 方程式と大域的対称性を用いて, すべての $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma$ を計算できる.

Idea 1 : Gauss 方程式は, B_{ij} を用いて次のように表される. これは本質的には, イソスペクトラル作用素である $L(t)$: $L_t(t) = [H(t), L(t)]$, $H(t) \in \mathfrak{o}(10)$ のみたす Lax 方程式である.

$$\begin{aligned}
[1.1] \quad & \sqrt{3}I = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_{12}B_{21} + \frac{1}{\sqrt{3}}B_{13}B_{31} + \frac{\sqrt{3}}{4}B_{14}B_{41} + \frac{1}{2\sqrt{3}}B_{15}B_{51}\right) \\
[2.2] \quad & \frac{1}{\sqrt{3}}I = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}B_{21}B_{12} + \sqrt{3}B_{23}B_{32} + \frac{\sqrt{3}}{2}B_{24}B_{42} + \frac{\sqrt{3}}{4}B_{25}B_{52}\right) \\
[3.3] \quad & 0 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}B_{31}B_{13} - \sqrt{3}B_{32}B_{23} + \sqrt{3}B_{34}B_{43} + \frac{1}{\sqrt{3}}B_{35}B_{53}\right) \\
[4.4] \quad & -\frac{1}{\sqrt{3}}I = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}B_{41}B_{14} - \frac{\sqrt{3}}{2}B_{42}B_{24} - \sqrt{3}B_{43}B_{34} + \frac{\sqrt{3}}{2}B_{45}B_{54}\right) \\
[5.5] \quad & -\sqrt{3}I = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}B_{51}B_{15} + \frac{\sqrt{3}}{4}B_{52}B_{25} + \frac{1}{\sqrt{3}}B_{53}B_{35} + \frac{\sqrt{3}}{2}B_{54}B_{45}\right) \\
[1.2] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{12}) + \frac{4}{\sqrt{3}}B_{13}B_{32} + \frac{3\sqrt{3}}{4}B_{14}B_{42} + \frac{5}{4\sqrt{3}}B_{15}B_{52} \\
[1.3] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{13}) - \frac{\sqrt{3}}{2}B_{12}B_{23} + \frac{5\sqrt{3}}{4}B_{14}B_{43} + \frac{\sqrt{3}}{2}B_{15}B_{53} \\
[1.4] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{14}) - \frac{2}{\sqrt{3}}B_{13}B_{34} + \frac{2}{\sqrt{3}}B_{15}B_{54} \\
[1.5] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{15}) + \frac{\sqrt{3}}{4}B_{12}B_{25} - \frac{\sqrt{3}}{4}B_{14}B_{45} \\
[2.3] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{23}) - \frac{5}{2\sqrt{3}}B_{21}B_{13} + \frac{3\sqrt{3}}{2}B_{24}B_{43} + \frac{7}{4\sqrt{3}}B_{25}B_{53} \\
[2.4] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{24}) - \frac{3\sqrt{3}}{4}B_{21}B_{14} + \frac{3\sqrt{3}}{4}B_{25}B_{54} \\
[2.5] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{25}) - \frac{2}{\sqrt{3}}B_{21}B_{15} + \frac{2}{\sqrt{3}}B_{23}B_{35} \\
[3.4] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{34}) - \frac{7}{4\sqrt{3}}B_{31}B_{14} - \frac{3\sqrt{3}}{2}B_{32}B_{24} + \frac{5}{2\sqrt{3}}B_{35}B_{54} \\
[3.5] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{35}) - \frac{\sqrt{3}}{2}B_{31}B_{15} - \frac{5\sqrt{3}}{4}B_{32}B_{25} + \frac{\sqrt{3}}{2}B_{34}B_{45} \\
[4.5] \quad & 0 = -c_0 e_6(B_{45}) - \frac{5}{4\sqrt{3}}B_{41}B_{15} - \frac{3\sqrt{3}}{4}B_{42}B_{25} - \frac{4}{\sqrt{3}}B_{43}B_{35}
\end{aligned}$$

$m = 1$ のときは B_{ij} は $B_{ij} = B_{ji}$ をみたすスカラーなので, 計算は容易である.

$m = 2$ のときは B_{ij} は 2×2 行列で, $B_{ij} = {}^t B_{ji}$, をみたすが 互いに可換ではない. $\Rightarrow$ 計算は非常に困難になる.

しかし条件 A のもとでは, すべての $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma$ が計算できて これらは上に記した G_2 -軌道 M^G のものと一致する. よって超曲面の基本定理, または, Singer の strongly curvature-homogeneous 定理から定理 1 が得られる.

3 条件 A の証明法

幾何と解析が必要である.

Idea 2 : 型作用素の核の合併 つまり $\text{span}_n \ker B_n$ を考える. 特に, 型作用素の 1 径数族 $L(t) = \cos t B_\eta + \sin t B_\zeta$ に対して

$$E = \text{span}_t \{ \ker L(t) \} \subset TM_+$$

とおく. 定義より E は t によらない. つまり法測地線 c に沿って平行である.

背理法で矛盾を導くため, いくつかの命題が必要である.

Proposition 3.1 $d = \dim E$ とおき, 条件 A が成り立たないとする. このとき,

- (i) 各 $L(t)$ は E を $E^\perp$ に写す. だから $3 \leq d \leq 6$.
- (ii) 分解 $E \oplus E^\perp$ を用いると,

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & R(t) \\ {}^t R(t) & S(t) \end{pmatrix},$$

とかける. ここに $R(t)$ は $d \times (10-d)$ 行列で, $S(t)$ は $(10-d) \times (10-d)$ 行列.

Proposition 3.2 $d=6$ のみ可能.

(1) c に沿うよいフレーム $e_3, e_{\bar{3}} \in D_3$ は何か?

Idea 3 : 固定された $e_3 = e_3(p), e_{\bar{3}} = e_{\bar{3}}(p)$ を用いて, $e_3(t), e_{\bar{3}}(t) \in D_3(t)$ を c に沿って次の方法で選ぶ.

Lemma 3.3 e_3 を拡張して, $e_3(t) \in D_3(t)$ を c に沿って 常に $e_{\bar{3}}$ と直交するように選ぶ. 同様に, $e_{\bar{3}}$ を拡張して, $e_{\bar{3}}(t) \in D_3(t)$ が常に e_3 に直交するように選ぶ. このとき各 t に対して, $e_3(t)$ と $e_{\bar{3}}(t)$ は独立 (直交するとは限らない).

Proof: 次元公式と Gauss 方程式を用いて示される. □

さて, $S = \text{span}_t \{ e_3(t) \}$ and $\hat{S} = \text{span}_t \{ e_{\bar{3}}(t) \}$ とおく.

(2) $d = \dim E = 6$ はどうしてか?

1. たとえ $\text{Ker} L(t)$ が t に依存するとしても, $\dim S = 1$ の可能性があるが, 一般の法測地線 c に対してこれはおこらない事が示せる.

2. より強く, $\dim S \geq 3$ が一般の c について成り立つ を示す事ができる.

● 1. と 2. が本質的に, $d=4$ を除外する. 実際もし $d=4$ が起きたら, 雑に言うとも, $E = S + \hat{S}$ で $\dim S = \dim \hat{S} = 2$ となり, 2. に矛盾.

(3) $d=3$ と 5 は何故起こらないか?

定義. c に沿うベクトル場 $v(t)$ が 偶 とは, $v(t+\pi) = v(t)$ が成り立つ事, 奇 とは $v(t+\pi) = -v(t)$ が成り立つ事.

● スピン作用が絡むと, c に沿う連続ベクトル場の符号の変化が重要になる.

Idea 4 : 向き付けの理由から, TM_+ の部分空間で, 奇数個の奇ベクトル場ではられないものはない.

大域対称性から, $p_1 = p(t)$ と $p_2 = p(t+\pi)$ では, 例えば,

$$D_1(t) = D_5(t+\pi), D_2(t) = D_4(t+\pi), D_3(t) = D_3(t+\pi).$$

がなりたつ. $e_{\bar{3}}(t) = \pm e_{\bar{3}}(t+\pi)$ の符号が重要.

● 我々が定義した $e_3(t)$ は決して $e_{\bar{3}}$ と直交はしない事が示せるので次を得る:

Lemma 3.4 $e_3(t)$ と $e_{\bar{3}}(t)$ は c に沿う偶ベクトル場.

Lemma 3.5 $e_3(t), e_{\bar{3}}(t)$ が偶ベクトル場なら, $\nabla_{e_6}^k e_{\bar{3}}(t)$ はすべて偶. (どこかで消える可能性はある).

Proof: $e_{\bar{3}}(t+\pi) = e_{\bar{3}}(t) \Rightarrow \nabla_{e_6}^k e_{\bar{3}}(t+\pi) = \nabla_{e_6}^k e_{\bar{3}}(t)$. □

データはすべて解析的である事から各点 $p(t) \in c$ において,

$$E = \text{span} \{ e_{\bar{3}}(t), \nabla_{e_6} e_{\bar{3}}(t), \nabla_{e_6}^2 e_{\bar{3}}(t), \dots \},$$

と表される。従って E は偶ベクトルからなる連続基底を持つ。

● 他方, $L(t+\pi) = -L(t)$ だから, $L(t)$ は偶ベクトル場を奇ベクトル場に写す。よって, $L(t)(E)$ は奇ベクトル場ではられる。

● さらに $L(t)(E)$ は t によらない事が示せて, これより $\dim L(t)(E) = d-2$ が得られる。

よって Idea 4 より次を得る：

Proposition 3.6 $d \neq 3, 5$ となり, $d = 6$ を得る。

Idea 5: 分解 $T_{\bar{p}}M_+ = E \oplus E^\perp$ に関して, $L = \begin{pmatrix} 0 & R \\ {}^tR & S \end{pmatrix}$ の固有値 μ に対する固有ベクトル $e = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ は

$$\begin{cases} RY = \mu X \\ {}^tRX + SY = \mu Y. \end{cases}$$

をみtas. よって $\mu \neq 0$ ならば,

$$({}^tRR + \mu S - \mu^2)Y = 0 \quad (4)$$

の解 Y は固有ベクトル $e = \begin{pmatrix} (1/\mu)R(t)Y \\ Y \end{pmatrix}$ for μ を与える。こうして方程式 $Le = \mu e$ は方程式 (4) に還元され, 次の結果に繋がる。

Proposition 3.7 E と $E^\perp$ の正規直交基底は次で与えられる：

$$\begin{aligned} E : & \begin{cases} e_3, e_{\bar{3}} \\ X_1 = \alpha(e_1 + e_5) + \beta(e_2 + e_4) \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}(e_1 - e_5) - \sqrt{3}\alpha(e_2 - e_4) \right) \\ X_{\bar{1}} = \gamma(e_{\bar{1}} + e_{\bar{5}}) + \delta(e_{\bar{2}} + e_{\bar{4}}) \\ X_{\bar{2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}(e_{\bar{1}} - e_{\bar{5}}) - \sqrt{3}\gamma(e_{\bar{2}} - e_{\bar{4}}) \right) \end{cases} \\ E^\perp : & \begin{cases} Z_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\sqrt{3}\alpha(e_1 - e_5) + \frac{\beta}{\sqrt{3}}(e_2 - e_4) \right) \\ Z_2 = \beta(e_1 + e_5) - \alpha(e_2 + e_4) \\ Z_{\bar{1}} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\sqrt{3}\gamma(e_{\bar{1}} - e_{\bar{5}}) + \frac{\delta}{\sqrt{3}}(e_{\bar{2}} - e_{\bar{4}}) \right) \\ Z_{\bar{2}} = \delta(e_{\bar{1}} + e_{\bar{5}}) - \gamma(e_{\bar{2}} + e_{\bar{4}}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに $(3-\sigma)\alpha^2 = (\sigma-1/3)\beta^2$, $(3-\tau)\gamma^2 = (\tau-1/3)\delta^2$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1/2 = \gamma^2 + \delta^2$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は p に依存。

長い考察により, 次を得る：

Lemma 3.8 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はすべて c に沿って一定。

● これらの補題を使って次の分解補題を得る：

Lemma 3.9 $L(t)$ はイソスペクトラルだから,

$$L(t) = U(t)L(0){}^tU(t), \quad U(t) \in O(10)$$

と表せる。 $U(t)$ は $\begin{pmatrix} U_1(t) & 0 \\ 0 & U_2(t) \end{pmatrix}$, $U_1(t) \in O(6)$, $U_2(t) \in O(4)$ と分解する。

この命題は $L(t) : E \rightarrow E^\perp$ からは決して得られない。 Proposition 3.7 で得たフレームで $L(t)$ を表現してから, t について $O(10)$ にリー環を用いてフーリエ展開する。 E のベクトルの挙動を注意深く考察して, $U(t)$ の分解を得る。 これより容易に

$${}^tR(t)R(t) = U_2(t){}^tRR^tU_2(t), \quad S(t) = U_2(t)S^tU_2(t)$$

を得るので, イソスペクトラル作用素 $L(t)$ は, サイズの小さいイソスペクトラル作用素 ${}^tR(t)R(t)$ と $S(t)$ に還元される。 さらに $T(t)$ と $S(t)$ を c に沿ってフーリエ展開する。 偶奇の議論を再び用いて, 最終的に $S(t) = 0$ を得る。

次にこの議論をもう一つの焦部分多様体 M_- に適用する事により、この型作用素の対応する箇所が消える事も言える。すると $M = S^6 \times S^6$ となってしまう、 $g = 6$ に矛盾する。

こうして 条件 **A** が示され 定理 1 を得る。

4 $g = 4$ の等径超曲面とモーメント写像

次に $g = 4$ の等径超曲面についてのべる。

S^n 内の $g = 4$ の既知の等径超曲面		
OT-FKM 型	非等質	$(m_1, m_2) = (3, 4k), (7, 8k), \dots$
	等質: G/K の イソトロピー軌道	G/K : non-Hermitian $(4, 4k - 1)$
		*Hermitian $(1, k), (2, 2k - 1), (9, 6)$
非 OT-FKM 型		*Hermitian $(4, 5)$ non-Hermitian $(2, 2)$

事実 6. (Cecil-Chi-Jensen, Immervoll, Chi, ‘07~’12) $g = 4$ の等径超曲面は $(m_1, m_2) = (7, 8)$ の場合を除き、この表で尽くされる。

Clifford 系と OT-FKM 型等径超曲面

$O(n)$ を直交群、 $\mathfrak{o}(n)$ をそのリー環とする。

定義. $P_0, \dots, P_m \in O(2l)$ が **Clifford 系** $\Leftrightarrow \boxed{P_i P_j + P_j P_i = 2\delta_{ij} \text{id}, \quad 0 \leq i, j \leq m.}$

注意. (1) 対 (m, l) の取りうる値 (Atiyah-Bott-Shapiro, ‘64)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	...	$m + 8$	...
$l = \delta(m)$	1	2	4	4	8	8	8	8	...	$16\delta(m)$	...

(2) 内積

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2l} \text{Tr}(P^t Q),$$

に関して $P_0, \dots, P_m$ はそれらの張る対称直交変換の線形空間 V の正規直交基底となる。

(3) Clifford 系は Clifford 環の表現と 1 対 1 対応する。

事実 7. (Ferus-Karcher-Münzner ‘81) Clifford 系 $P_0, \dots, P_m$ に対し、

$$F(x) = \langle x, x \rangle^2 - 2 \sum_{i=0}^m \langle P_i x, x \rangle^2$$

は次数 4 の Cartan-Münzner 多項式. もし $l - m - 1 > 0$ なら、 $f = F|_{S^{2l-1}}$ は S^{2l-1} の等径関数で、 $g = 4$, $m_1 = m$, $m_2 = l - m - 1$ なる等径超曲面を定める。

さて、定義より、 $P_i P_j$, $0 \leq i < j \leq m$ は歪対称で、 $\mathfrak{o}(m + 1)$ と同形な $\mathfrak{o}(2l)$ のリー環を生成することが容易にわかり、 $P_i P_j$, $0 \leq i < j \leq m$ はその正規直交基底となる。

事実 8. (FKM, ‘81, p.496) $\underline{Spin(m + 1)}$ は $\mathbb{R}^{2l}$ に作用し、 $F(x)$ を保つ、すなわち、 $F(x)$ は各 $\underline{Spin(m + 1)}$ 軌道上一定である。

注意. $\underline{Spin(m + 1)}$ 作用は一般に小さく、超曲面上推移的ではない。

$K \subset O(n)$ が $\mathbb{R}^n$ に作用するとき、この作用を自然に $T\mathbb{R}^n$ に拡張する。つまり、 $\zeta \in \mathfrak{o}(n)$ に対し、 $X_\zeta = (\zeta x, \zeta Y)$. シンプレクティック多様体 $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ 上、次を得る：

命題 4. このとき $K \curvearrowright T\mathbb{R}^n$ は次のモーメント写像 $\mu : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{k}^*$ を持つハミルトン作用.

$$\mu(x, Y)(\zeta) = -\langle \zeta x, Y \rangle.$$

以下, 詳細は第 59 回幾何学シンポジウム予稿集「等径超曲面とモーメント写像」参照.

定理 2. (M. to appear in Math. Ann.)

$P_0, \dots, P_m$ on $\mathbb{R}^{2l}$ を Clifford 系として, ベクトル場 $Y : \mathbb{R}^{2l} \rightarrow T\mathbb{R}^{2l} : (\text{連続とは限らない})$ を

$$Y_x = \begin{cases} P_0 x, & \langle P_0 x, x \rangle = 0 \quad \text{のとき} \\ \frac{\langle P_1 x, x \rangle P_0 x - \langle P_0 x, x \rangle P_1 x}{\sqrt{\langle P_1 x, x \rangle^2 + \langle P_0 x, x \rangle^2}}, & \langle P_0 x, x \rangle \neq 0 \quad \text{のとき.} \end{cases}$$

で定義する. このとき $\mu_0 + \mu$ を $U(1) \times Spin(m+1) \curvearrowright T\mathbb{R}^{2l}$ のモーメント写像とすると, Cartan-Münzner 多項式は

$$F(x) = \|\mu_0(x, Y_x)\|^2 - 2\|\mu(x, Y_x)\|^2$$

と表される.

注意. (1) $F(x)$ の右辺は $x \in \mathbb{R}^{2l}$ のみで決まる.

(2) P_0, P_1 は V の互いに直交する任意の単位元で置き換えられる. その理由は次の事による: 重複度 $m_1 > 1$ の主曲率 λ_1 に対する主曲率ベクトルは自由に選べる.

(3) $C = \{(x, Y_x) \in T\mathbb{R}^{2l}\}$ は, $\langle P_0 x, x \rangle = 0$ となる x 以外で $2l$ 次元の部分多様体であるが, C は $T\mathbb{R}^{2l}$ の Lagrangian 部分多様体ではない.

(4) Hermite 対称空間のイソトロピー軌道として得られる等径超曲面に対する $F(x)$ のモーメント写像による記述は, S. Fujii (2011), および, Fujii-H. Tamaru により得られた.

分類表で残る二つの非 OT-FKM 型超曲面は, $G/K = SO(5) \times SO(5)/SO(5)$ ($(m_1, m_2) = (2, 2)$), または $SO(10)/U(5)$ ($(m_1, m_2) = (4, 5)$) のイソトロピー軌道である. E_{ij} を (i, j) 成分が 1, 他の成分は 0 の 5 次行列とすると, $G_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \in \mathfrak{o}(5) \subset \mathfrak{u}(5)$, $1 \leq i < j \leq 5$ とおく.

定理 3. (M. to appear in Math. Ann.)

$(m_1, m_2) = (2, 2), (4, 5)$ なる非 OT-FKM 型等径超曲面に対して, $\tau = G_{25} + G_{45} \in \mathfrak{k}$ を用いて, $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ の元 H を用いて, $Y_H = [H, \tau] \in \mathfrak{p}$ と定め, これを K の作用で $\mathfrak{p}$ 上のベクトル場 Y_x に拡張する. $U(1) \times K$ 作用のモーメント写像 $\mu_0 + \mu$ を錐 $C = \{(x, Y_x) = \text{Ad}k(H, Y_H)\} \subset T\mathfrak{p}$ に制限することにより,

$$F(x) = p\|\mu_0(x, Y_x)\|^2 - q\|\mu(x, Y_x)\|^2,$$

を得る. ここに $(m_1, m_2) = (2, 2)$ のとき $(p, q) = (3, 4)$, $(m_1, m_2) = (4, 5)$ のとき $(p, q) = (\frac{3}{4}, 1)$ である.

参考文献

- [1] M.F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology **3** (1964) 3–38.
- [2] É. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dan les espaces à courbure constante*, Ann. di Mat. **17** (1938), 177–191.

- [3] T. Cecil, Q. S. Chi and G. Jensen, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures*, Ann. of Math., **166** (2007), 1–76.
- [4] Q. S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures revisited*, Nagoya Math. J. **193** (2009), 129–154.
- [5] Q. S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, II*, Nagoya Math. J. **204**(2011), 1–18.
- [6] Q. S. Chi, *A new look at Condition A*, to appear in Osaka J. of Math. (2012).
- [7] Q. S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, III*, mathDG/1104.3249v3 (2011).
- [8] J. Dorfmeister and E. Neher, *Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6$, $m = 1$* , Comm. in Alg. **13** (1985), 2299–2368.
- [10] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*, Math. Z. **177** (1981), 479–502.
- [11] S. Fujii, *Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps*, Tohoku Math. J. **62** (2010) 191–213.
- [12] S. Fujii and H. Tamaru, *Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres – Hermitian case*, in preparation (2011).
- [13] W. Y. Hsiang and B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geom., **5** (1971), 1–38.
- [14] S. Immervoll, *The classification of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures*, Ann. of Math., **168** (2008), 1011–1024.
- [16] R. Miyaoka, *Geometry of G_2 orbits and isoparametric hypersurfaces*, Nagoya Math. J. **203** (2011), 175–189.
- [17] R. Miyaoka, *The Dorfmeister-Neher theorem on isoparametric hypersurfaces*, Osaka J. Math. **46** (2009), 695–715.
- [18] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$* , to appear in Ann. of Math. **176**, no. 3 (2012), <http://annals.math.princeton.edu/toappear>
- [19] R. Miyaoka, *Moment maps of the spin action and the Cartan-Münzner polynomials of degree four*, to appear in Math. Ann. (2012), <http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.1007/s00208-012-0819-8>
- [20] R. Miyaoka, *Transnormal functions on a Riemannian manifold*, to appear in DGA, (2012), <http://www.math.tohoku.ac.jp/faculty/miyaoka/publication-ev3.html>
- [20] 宮岡礼子, 等径超曲面とモーメント写像, 第 59 回幾何学シンポジウム予稿集 (2012), 1–10.
- [21] M. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I*, Math. Ann. **251**, (1980), 57–71,
- [22] M. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II*, Math. Ann. **256** (1981), 215–232.
- [23] Y. Ohnita, *Moment map and symmetric Lagrangian submanifolds*, Proceedings of the “Submanifolds in Yuzawa 2004” (2005), 33–38.
- [24] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II*, Tohoku Math. J. **28** (1976), 7–55.
- [26] G. Thorbergsson, *A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations*, Handbook of Differential Geometry **I** (2000), 963–995, North-Holland, Amsterdam.
- [28] S. T. Yau, *Open problems in geometry*, Chern – A great geometer of the twentieth century (1992), 275–319, International Press.

Email: r-miyaok@m.tohoku.ac.jp