

与えられた結び目に沿う負曲率のメビウスの帯の存在と非存在

直川耕祐 (東京工業大学理工学研究科 D3)

1 導入

3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 において, C^∞ -写像 $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ が正則であるとは, その速度ベクトル $\gamma'(s) := d\gamma/ds$ が \mathbb{R} 上で消えないときをいう. C^∞ -正則な空間閉曲線 γ が自己交叉を持たないとき, 単純閉曲線または結び目という. 任意に与えられた実解析的な結び目を含む負曲率の閉じた帯で, その結び目上の各点において任意に指定された負の Gauss 曲率をもつような実解析的な閉じた帯について考える. ここでは, そのような帯がどのようなイソトピー型を持ち得るのかを判定する必要十分条件について報告する.

同様の問題で, 帯が平坦 (すなわち Gauss 曲率が至る所 0) である場合については, 筆者の論文 [7] に記載している. この論文では, \mathbb{R}^3 内に, 任意に与えられた実解析的な結び目に沿う平坦な閉じた帯のイソトピー型の存在・非存在を決定し, さらにその結果が, 3次元空間形内の外的平坦な (すなわち主曲率の一方が 0 の) 閉じた帯に対して, 拡張可能であることを示した. このとき用いた筆者の手法は, \mathbb{R}^3 内の結び目に沿う負曲率の閉じた帯に対しても, 適用可能であることを述べる.

まず, 用語を定義する. $\epsilon > 0$ とする. $(\mathbb{R}^2; s, u)$ の s -軸近傍 $\mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$ に対し,

$$(s, u) \sim_1 (s + 2\pi, -u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

によって生成される同値関係を \sim_1 とし,

$$(s, u) \sim_2 (s + 2\pi, u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

によって生成される同値関係を \sim_2 とする. $M_i := \mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon) / \sim_i$ ($i = 1, 2$) とおく. M_1 (resp. M_2) は, 位相的には Möbius の帯 (resp. 向き付可能な柱面) である. M を M_1 または M_2 とし, $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) を任意に与えられた結び目とする. 十分小さく $\epsilon > 0$ をとるとき, C^∞ -埋め込み $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ であつて, 各 $s \in \mathbb{S}^1$ に対し

$$F(s, 0) = \gamma(s)$$

となるものを γ に沿う閉じた帯という. 閉じた帯 F の像の境界を B とおくととき, F の捻り数は,

$$\text{Mtn}(F) := \frac{1}{2} \text{Link}(\gamma, B)$$

* 本研究は科研費 (課題番号:11J01185) の助成を受けたものである.

で与えられる (cf. [10, Definition 3], [5]). ここで, B には γ に同調する向きが入っているものとし, $\text{Link}(\gamma, B)$ は, γ と B の各連結成分との間の絡み数の総和を意味する. 帯が向き付け不可能, すなわち Möbius の帯であれば, 捻り数 $\text{Mtn}(F)$ は半整数値をとる. また, 帯の捻る方向が時計周りであれば, $\text{Mtn}(F)$ は正の値をとる. γ に沿う閉じた帯のイソトピー型は, γ 自身のイソトピー型と捻り数 $\text{Mtn}(F)$ によって決定される.

s を結び目 γ の弧長パラメータとする. $\gamma(s)$ の曲率関数 $\kappa(s) = |\gamma''(s)|$ が消えないとき, その振率関数は

$$\tau(s) := \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\kappa(s)^2}$$

で定義される. ただし, \det は行列式である. 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し, 2 つの結び目 $\gamma(s), \gamma(s) + \epsilon \mathbf{n}(s)$, ($s \in \mathbb{S}^1$) の間の絡み数を γ の自己絡み数といい, $\text{SL}(\gamma)$ で表す ([9], cf. [10]). ただし, \mathbf{n} は γ の主法線ベクトル場である.

以下, 主定理を述べるが, γ の微分可能性は, 実解析的であるとする. C^∞ 級の場合は後で述べる. 実解析的な場合, 与えられた結び目上の各点において指定された負の Gauss 曲率をもつ閉じた帯のイソトピー型の存在・非存在を判定する必要十分条件は, 次のように与えられる.

主定理. $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を実解析的な結び目とし, その曲率関数は至るところ消えないとする. $K = K(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\infty, 0)$ を負の値をとる実解析的関数とする.

$$b_K^-(s) := -\tau(s) - \sqrt{|K(s)|}, \quad b_K^+(s) := -\tau(s) + \sqrt{|K(s)|} \quad (s \in \mathbb{S}^1)$$

とおき, $b_K^-(s)$ の最小値 (resp. $b_K^+(s)$ の最大値) を B_K^- (resp. B_K^+) とおく. 开区間 I_K を

$$I_K := (B_K^-, B_K^+)$$

とおく. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $I_K \subset (0, \infty)$ ならば, 任意の $n \geq \text{SL}(\gamma)$ ($n \in (1/2)\mathbb{Z}$) に対し, γ に沿う実解析的な閉じた帯 F で, $\gamma(s)$ 上の各点における F の Gauss 曲率が $K(s)$, 捻り数が n の帯が存在する. しかし, 任意の $n < \text{SL}(\gamma)$ に対し, そのような帯は存在しない.
- (2) $0 \in I_K$ ならば, 任意の $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対し, γ に沿う実解析的な閉じた帯 F で, $\gamma(s)$ 上の各点における F の Gauss 曲率が $K(s)$, 捻り数が n の帯が存在する.
- (3) $I_K \subset (-\infty, 0)$ ならば, 任意の $n \leq \text{SL}(\gamma)$ ($n \in (1/2)\mathbb{Z}$) に対し, γ に沿う実解析的な閉じた帯 F で, $\gamma(s)$ 上の各点における F の Gauss 曲率が $K(s)$, 捻り数が n の帯が存在する. しかし, 任意の $n > \text{SL}(\gamma)$ に対し, そのような帯は存在しない.

任意の実解析的な結び目 γ に対し、「 $I_K \subset (0, \infty)$ 」「 $0 \in I_K$ 」「 $I_K \subset (-\infty, 0)$ 」のいずれかの場合が成立するので、この主定理はイソトピー型の存在・非存在を判定する必要十分条件となっている。特に、 $\gamma(s)$ と $K(s)$ が条件 (1) または (3) を満たすときは、実現可能なイソトピー型が制限されることに注意する。後で負定曲率曲面 (すなわち、Gauss 曲率が負で一定の曲面) について触れるが、この「非存在」の結果は、負定曲率曲面のクラスに対して位相的な制限を与えるものである (系 2 を参照)。

γ と K が実解析的ではなく C^∞ 級の場合、必要十分条件ではなくなるが、もし $B_K^- \neq 0$ かつ $B_K^+ \neq 0$ が成り立つのであれば、主定理と同様の結果が得られる。すなわち、次が成り立つ。

系 1. $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 級の結び目とし、その曲率関数は至るところ消えないとする。 $K = K(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\infty, 0)$ を負の値をとる C^∞ -関数とする。 $b_K^\pm(s)$, $B_K^\pm(s)$, I_K を主定理と同様に定める。もし $B_K^- \neq 0$ かつ $B_K^+ \neq 0$ が成り立てば、主定理の (1), (2), (3) の主張において、「実解析的」を「 C^∞ 級」に置き換えた同様の主張が成り立つ。

主定理のような問題を考える動機の一つに、勝手に与えられた結び目を含む負定曲率曲面のイソトピー型の存在・非存在を決定したいということがある。Hilbert の定理として知られているように、 \mathbb{R}^3 内には、完備かつ正則な負定曲率曲面は存在しない。例えば、Beltrami の擬球、Kuen 曲面、breather 曲面 (cf. [6]), Amsler 曲面 ([1]) などの負定曲率の曲面は、すべて特異点を持っている。正則な負定曲率曲面の自明な例は、これらの曲面の正則点の十分小さな近傍であるが、この例に続く (非自明な) 負定曲率曲面を構成する手段として、 \mathbb{R}^3 内の任意に与えられた結び目を含むような負定曲率曲面を構成する、という問題が考えられる。このような問題に対し、最近、Brander-Svensson [2] が、曲率関数が至るところ消えない任意に与えられた結び目 γ に対し、 γ に沿う負定曲率の閉じた帯が存在することを示した。しかし、彼らの構成法から得られる負定曲率の帯は、捻り数が自己絡み数 $SL(\gamma)$ に等しい帯であり、特に向き付け可能な曲面である。そこで、次に考えられる問題として、与えられた結び目に沿う負定曲率の閉じた帯が、どのようなイソトピー型を持ち得るのかを、結び目の情報を用いて決定する、という問題が考えられる。主定理は、負曲率曲面に対する主張であり、負定曲率曲面よりも広いクラスに対する主張であるが、これにより、与えられた結び目に沿う負定曲率曲面の実現可能なイソトピー型が制限されることがわかる。実際、主定理の (3) の非存在の主張から、次が成り立つ。

系 2. $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を実解析的な (resp. C^∞ 級の) 結び目とし、その曲率関数は至るところ消えないとする。 K を負の定数とする。任意の $s \in \mathbb{S}^1$ に対し $\tau(s) \geq \sqrt{|K|}$

(resp. $\tau(s) > \sqrt{|K|}$) が成り立つと仮定する. このとき, 任意の $n > \text{SL}(\gamma)$ に対し, 負定曲率 K の γ に沿う実解析的な (resp. C^∞ 級の) 閉じた帯で, 捻り数が n のものは存在しない.

例えば, この系により, γ の捩率関数 $\tau(s)$ が各点で 1 よりも大きければ, γ に沿う Gauss 曲率 -1 の曲面で, 捻り数 n が自己絡み数 $\text{SL}(\gamma)$ を越えるものは存在しない.

一方で, 主定理と同様の問題を正曲率の帯に対しても考えることができる. この場合, 与えられた結び目に沿う正曲率の閉じた帯 F のイソトピー型は, γ によって一意に決定されることが知られている. より正確には, 正曲率の帯の捻り数 $\text{Mtn}(F)$ は, γ の自己絡み数 $\text{SL}(\gamma)$ に等しくなる (cf. [4]). したがって, 正曲率の帯のイソトピー型は問題とならないが, γ 上の各点において任意に指定された正の Gauss 曲率をもつ閉じた帯が存在するのかどうかについては, 次のような結果を得た.

命題 3. $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を曲率関数が至る所消えない C^∞ -正則な結び目とし, $K = K(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow (0, \infty)$ を正の値をとる C^∞ -関数とする. このとき, γ に沿う正曲率の C^∞ -正則な閉じた帯で, $\gamma(s)$ 上の各点において, Gauss 曲率がちょうど $K(s)$ に等しくなるような曲面が存在する. 以上の主張は「 C^∞ 級」を「実解析的」に置き換えても正しい.

2 主定理の証明の概要

ここでは, 主定理の証明の概要を述べる. $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を曲率関数 $\kappa(s)$ が至る所消えない結び目とし, s を γ の弧長パラメータとする. $\gamma(s)$ は 2π -周期的 ($s \in \mathbb{R}$ に対し $\gamma(s + 2\pi) = \gamma(s)$) であると仮定して一般性を失わない. $F = F(s, u) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を γ に沿う閉じた帯とする. このとき, γ に沿う C^∞ -ベクトル場 $\xi(s)$ と F に沿う C^∞ -ベクトル場 $\eta(s, u)$ を用いて,

$$(2.1) \quad F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s) + u^2\eta(s, u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

という形に書くことができる. 「帯 F が閉じる」という周期条件は, $M = M_1$ (resp. $M = M_2$) のとき,

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \xi(s + 2\pi) = -\xi(s), \quad \eta(s + 2\pi, u) = \eta(s, -u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon) \\ \left(\text{resp. } \xi(s + 2\pi) = \xi(s), \quad \eta(s + 2\pi, u) = \eta(s, u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon) \right) \end{aligned}$$

と同値である. 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し $F(s, u)$ が埋め込みとなっているという条件は,

$$(2.3) \quad \gamma'(s) \times \xi(s) \neq 0 \quad (s \in \mathbb{R})$$

と同値である. ただし, \times は \mathbb{R}^3 のベクトル積を表す. そこで, これら 2 つの性質を満たす $\xi(s), \eta(s, u)$ が与えられると, (2.1) によって, γ に沿う閉じた帯が構成できる.

以降の議論では, γ に沿う閉じた帯は, (2.1) の形をしていると仮定する. さらに, (2.3) により, 座標の取り換えによって, 一般性を失わずに, $\xi(s)$ は

$$(2.4) \quad |\gamma'(s) \times \xi(s)| = 1 \quad (s \in \mathbb{R})$$

と正規化されていると仮定してよい. 以上の設定の下で, $\gamma(s)$ の各点における F の Gauss 曲率 $K(s)$ と, γ, ξ, η との関係式を導く. 閉じた帯 F の第一基本形式を $g_{11}ds^2 + 2g_{12}dsdu + g_{22}du^2$ とおく. (2.4) より, 点 $(s, 0)$ ($s \in \mathbb{R}$) において,

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(s, 0) = |(F_s \times F_u)(s, 0)| = 1$$

が成り立つ. 一方, F の第二基本形式を $h_{11}ds^2 + 2h_{12}dsdu + h_{22}du^2$ とおくと, 点 $(s, 0)$ ($s \in \mathbb{R}$) において,

$$\begin{aligned} h_{11}(s, 0) &= \det(\gamma'(s), \xi(s), \gamma''(s)) \\ h_{12}(s, 0) &= \det(\gamma'(s), \xi(s), \xi'(s)) \\ h_{22}(s, 0) &= 2 \det(\gamma'(s), \xi(s), \eta(s, 0)) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $\gamma(s)$ の各点における F の Gauss 曲率 $K(s)$ は,

$$(2.5) \quad K = 2 \det(\gamma', \xi, \gamma'') \det(\gamma', \xi, \eta_0) - \det(\gamma', \xi, \xi')^2$$

と書ける. ただし, $\eta_0(s) := \eta(s, 0)$ ($s \in \mathbb{R}$) である. 次に, (2.4) により, $\xi(s)$ を γ の Frenet 枠

$$\left\{ \mathbf{e} := \gamma', \quad \mathbf{n} := \frac{\gamma''}{|\gamma''|}, \quad \mathbf{b} := \mathbf{e} \times \mathbf{n} \right\}$$

の一次結合として,

$$(2.6) \quad \xi(s) = p(s)\mathbf{e}(s) + \cos \theta(s)\mathbf{n}(s) + \sin \theta(s)\mathbf{b}(s)$$

という形で表す. ただし, $p(s), \theta(s)$ は C^∞ -関数であり, ある $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$(2.7) \quad p(s + 2\pi) = (-1)^m p(s), \quad \theta(s + 2\pi) = \theta(s) + m\pi$$

を満たすものである。このとき、閉じた帯の捻り数 $\text{Mtn}(F)$ と m との間には、

$$(2.8) \quad \text{Mtn}(F) = \text{SL}(\gamma) + \frac{m}{2}$$

という関係がある。(2.6) を用いて (2.5) の右辺を計算すると、

$$(2.9) \quad K = -q\kappa \sin \theta - (\theta' - p\kappa \sin \theta + \tau)^2$$

となる。ただし、

$$(2.10) \quad q(s) := 2 \det(\gamma'(s), \xi(s), \eta(s, 0))$$

とおいた。(2.9) より、与えられた結び目 $\gamma(s)$ に対し、その結び目上で指定された Gauss 曲率 $K(s)$ をもつ閉じた帯が存在するためには、

$$(2.11) \quad q(s)\kappa(s) \sin \theta(s) + K(s) \leq 0 \quad (s \in \mathbb{R})$$

であることが必要である。さらに、各 $s \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(2.12) \quad \theta'(s) = p(s)\kappa(s) \sin \theta(s) - \tau(s) + \sqrt{|q(s)\kappa(s) \sin \theta(s) + K(s)|}$$

または

$$(2.13) \quad \theta'(s) = p(s)\kappa(s) \sin \theta(s) - \tau(s) - \sqrt{|q(s)\kappa(s) \sin \theta(s) + K(s)|}$$

のどちらか一方の等式を満たす必要がある。逆に、結び目と関数の組 $(\gamma(s), K(s))$ に対し、(2.7), (2.11), (2.12) (または (2.13)) を満たす C^∞ -関数 $p(s), \theta(s), q(s)$ が与えられたとする。このとき、(2.6) で $\xi(s)$ を定め、(2.10) を満たす $\eta(s, u)$ をとると、(2.1) は、 $\gamma(s)$ に沿う閉じた帯で、 $\gamma(s)$ 上の各点における Gauss 曲率が $K(s)$ となる。

主定理の証明では、任意に与えられた実解析的な結び目 γ と、負の値をとる実解析的関数 K に対し、(2.7), (2.11), (2.12) (または (2.13)) を満たすような実解析的関数 $p(s), \theta(s), q(s)$ の存在・非存在を詳しく考察する。その「存在」を証明する際に、任意に指定された複数の点におけるジェットを固定しながら、 C^∞ -関数を Fourier 多項式で近似するというテクニカルな手法を用いた。これは、筆者が [7] で得た方法であるが、負曲率の閉じた帯に対しても有効である。

3 負曲率曲面としてのイソトピー型

最後に、少し話題は変わるが、「負曲率曲面としてのイソトピー型」についても報告したい。同じイソトピー型に属する 2 つの埋め込まれた曲面は、埋め込みであることを保ち

ながら，一方から他方へ連続的に動かせる．主定理では，この通常の意味でのイソトピー型の下で，与えられた実解析的な結び目の各点において指定された負の Gauss 曲率をもつ閉じた帯のイソトピー型の存在・非存在について必要十分条件を与えたが，負曲率曲面には，別の意味でのイソトピー型が定義できることを注意しておく．

負曲率曲面 F^0, F^1 が負曲率曲面を通してイソトピックであるとは，両者の間のイソトピー F^t ($0 \leq t \leq 1$) が存在し，かつ各 t に対して曲面 F^t が常に負曲率であるときをいう．負曲率曲面全体の集合を，このイソトピーの下で類別するとき，その同値類のことを負曲率曲面としてのイソトピー型という．区別のために，通常の意味でのイソトピー型を，一般曲面としてのイソトピー型と呼ぶことにする．2つの負曲率曲面が負曲率曲面を通してイソトピックならば，一般曲面を通じてイソトピックであるが，逆が成り立つかどうかは自明なことではない．

正曲率曲面や平坦曲面に対しても，同様のイソトピーが定義できる．しかし，Gluck-Pan [4] によれば，2つの正曲率の閉じた帯 F^0, F^1 の間に，一般曲面を通じたイソトピー F^t ($0 \leq t \leq 1$) が存在すれば，いつでも正曲率曲面を通じたイソトピー $\overline{F^t}$ ($0 \leq t \leq 1$) を見つけることができる．よって，正曲率曲面としてのイソトピー型は，(向き付け可能な)一般曲面としてのイソトピー型と 1 対 1 対応する．また，Røgen [10] によれば，平坦な閉じた帯に対しても，正曲率の閉じた帯と同様の主張が成り立つ．すなわち，平坦曲面としてのイソトピー型は，一般曲面としてのイソトピー型と 1 対 1 対応する．一方，負曲率曲面としてのイソトピー型は，一般曲面としてのイソトピー型と一致しないことが，[10] によって暗に指摘されている．つまり，同じイソトピー型をもつ2つの負曲率曲面で，負曲率曲面を通じたイソトピー型が異なる例が存在する．[10] の論文では，このような例が書かれていないので，ここで紹介したい．

負曲率の帯の各点では，2つの主方向が存在する．帯が向き付け可能ならば，主方向に対応する2つの主曲率は，一方は正，他方は負となる．この帯の生成曲線を γ とし， γ に沿う，正の主曲率を与える主方向ベクトル場を \mathbf{V}_+ とおく． \mathbf{V}_+ が γ に沿って一周するとき， γ に沿う接平面上における， \mathbf{V}_+ の回転数(rotational index) が定義される ([10])．回転数は，半整数値をとり，負曲率のまま曲面を動かしても変化しない．次のような例が存在する．

例 4. 一葉双曲面 $f(x, y) := (\sqrt{1+y^2} \cos x, \sqrt{1+y^2} \sin x, y)$ に対し， \mathbb{R}^3 内の負曲率の閉じた帯 F^0, F^1 を

$$F^0(s, u) := f(s, u) \quad (|s| \leq \pi, |u| \leq 1/2),$$

$$F^1(s, u) := f(u \cos s, u \sin s) \quad (|s| \leq \pi, 1/2 \leq u \leq 1)$$

で定める. 図 1 と図 2 は, f の x -曲線, y -曲線の像の上に, それぞれ F^0, F^1 の像を重ねたものになっている. F^0, F^1 は, 同じ位相型だが, \mathbb{R}^3 の中で一方から他方へ負曲率を保ったまま連続的に動かせない. 実際, F^0, F^1 の主方向は, ともに $f_x(x, y), f_y(x, y)$ で与えられるから, F^0, F^1 の「回転数」は, それぞれ $0, \pm 1$ である.

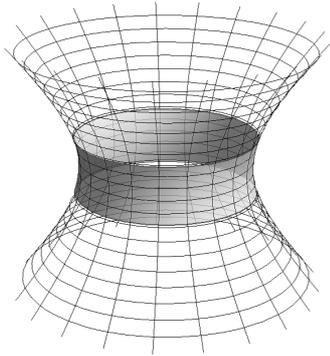


図 1 F^0 の像

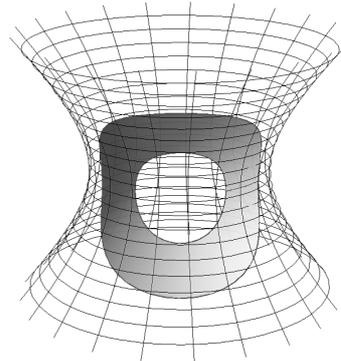


図 2 F^1 の像

Røgen [10] は, 同じイソトピー型をもつ 2 つの負曲率の閉じた帯は, 主方向ベクトルの「回転数」が一致するとき, かつそのときに限り, 負曲率曲面を通じて一方から他方へ連続的に動かせることを予想した. このように, 負曲率曲面では, 主方向ベクトル場によるフレーム付きの「イソトピー」を考えるのが自然である. 最近, Ghomi-Kossowski [3] は, h -principle と呼ばれる手法を用いて, 負曲率曲面としてのイソトピー型と, フレーム付きの曲面のイソトピー型との間に, 1 対 1 の対応があることを証明した. ただし, 彼らの論文の定理 [3, Theorem 1.3-(iii)] では, 証明に必要な前提条件が明記されておらず, そのまま読むと「負曲率曲面としてのイソトピー型と一般曲面としてのイソトピー型が 1 対 1 対応している」と言っているように思える. しかし, この主張は, 例 4 が示すように正しくない. そこで, 前提条件を補い, 明記した形の彼らの主張を最後に述べておきたい.

M を, 空でない境界をもつ向き付けられたコンパクトな 2 次元多様体とし, $f^i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 0, 1$) を埋め込まれた曲面とする. $E^i = \{e_1^i, e_2^i\}$ ($i = 0, 1$) を, M の向きに同調した f^i に沿う一次独立なベクトル場 e_1^i, e_2^i のフレームとする. E^0 と E^1 がフレームイソトピックであるとは, f^0 と f^1 がイソトピックであり, かつ E^0 と E^1 との間を繋ぐ連続的なフレームの 1 パラメータ族 E^t ($0 \leq t \leq 1$) が存在するときをいう. このとき, 次が成り立つ.

事実 5 ([3]). $f^i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 0, 1$) を, 空でない境界をもつ向き付けられたコンパクト

な負曲率曲面とし, E^i ($i = 0, 1$) を M の向きに同調した f^i の 2 つの主方向ベクトルによるフレームとする. このとき, f^0 と f^1 が負曲率曲面を通じてイソトピックであることは, E^0 と E^1 がフレームイソトピックであることと同値である.

参考文献

- [1] M. H. Amsler: *Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités*, Math. Ann. **130** (1955), 234–256.
- [2] D. Brander and M. Svensson: *The geometric Cauchy problem for surfaces with Lorentzian harmonic Gauss maps*, arXiv:1009.5661
- [3] M. Ghomi and M. Kossowski: *h -principles for hypersurfaces with prescribed principal curvatures and directions*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 4379–4393.
- [4] H. Gluck and L.-H. Pan: *Embedding and knotting of positive curvature surfaces in 3-space*, Topology **37** (1998), 851–873.
- [5] Y. Kurono and M. Umehara: *Flat Möbius strips of given isotopy type in \mathbb{R}^3 whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, Geom. Dedicata **134** (2008), 109–130.
- [6] M. Melko and I. Sterling: *Application of soliton theory to the construction of pseudospherical surfaces in \mathbb{R}^3* , Ann. Global Anal. Geom. **11** (1993), 65–107.
- [7] K. Naokawa: *Extrinsically flat Möbius strips on given knots in 3-dimensional spaceforms*, submitted.
- [8] K. Naokawa: *Negatively curved Möbius strips on given knots*, preprint.
- [9] W. F. Pohl: *The self-linking number of a closed space curve*, J. Math. Mech. **17** (1968), 975–985.
- [10] P. Røgen: *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 589–606.