半単純擬リーマン対称空間のs表現の局所軌道型について*

馬場　蔵人[†]
福島工業高等専門学校　一般教科

擬リーマン対称空間 G/H の原点における接空間にイソトロピー群 H は自然に作用する。これは H の擬直交表現を定め，G/H のイソトロピー表現もしくはs表現とよばれる。この表現の軌道は擬ユークリッド空間内の部分多様体を与える。軌道の任意の点におけるイソトロピー代数の共役類はその軌道の局所軌道型とよばれ，その軌道の内在的構造や法ホロノミー代数の構造を調べるのに用いられている。本講演の目的は，半単純擬リーマン対称空間 G/H に対するs表現について，双曲軌道および楕円軌道の局所軌道型の構造を決定し，さらにそれらを分類することである。σ を G の対合的自己同型写像で $(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$ $(G_\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\})$ を満たすものとする。σ の誘導する $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像も同じ記号 σ で表す。このとき，G/H のs表現の軌道は $\mathfrak{q} := \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{id})$ 上の H の随伴軌道（$\mathrm{Ad}(H)$ 軌道）と同一視される。この同一視のもと G/H の極大分離的可換部分空間に関する制限ルート系を用いて，局所軌道型の構造を決定するための手法とそれらの分類手法を与える。

1　半単純擬リーマン対称空間の制限ルート系

半単純擬リーマン対称空間に対して，極大分離的可換部分空間に関する制限ルート系の概念が Rossmann([11]), Oshima-Sekiguchi([9]) によって導入された。この節では，主結果を述べるにあたり制限ルート系について記号の説明も含め必要な部分について復習する。$\mathfrak{q}$ の可換部分空間 $\mathfrak{a}$ が分離的であるとは，$\mathfrak{a}$ のすべての元が双曲的もしくはすべての元が楕円的であるときをいう。極大分離的可換部分空間は，双曲元から成るときベクトル型であるといい，楕円元から成るときトーラス型であるという。以下，極大分離的可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を1つ固定する。ここで，型が同じ極大分離的可換部分空間はすべて H 共役であることに注意する。任意の $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して，

$$\mathfrak{h}_\lambda := \left\{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}(A)^2 X = (-1)^\varepsilon \lambda(A)^2 X, \forall A \in \mathfrak{a}\right\},$$
$$\mathfrak{q}_\lambda := \left\{X \in \mathfrak{q} \mid \mathrm{ad}(A)^2 X = (-1)^\varepsilon \lambda(A)^2 X, \forall A \in \mathfrak{a}\right\}$$

とする。ただし，$\mathfrak{h}$ は H のリー代数を表し，$\mathfrak{a}$ がベクトル型のとき $\varepsilon = 0$，トーラス型のとき $\varepsilon = 1$ とする。$\Delta := \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{q}_\lambda \neq \{0\}\}$ を G/H の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系といい，Δ は

---

*本稿は研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2014」の予稿に加筆・修正を行ったものである。

[†]E-mail: baba@fukushima-nct.ac.jp

$\mathfrak{a}$ 上のルート系になることが示される。Δ_+ を Δ の正ルート系としたとき，

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_+} \mathfrak{h}_\lambda,$$
$$\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_+} \mathfrak{q}_\lambda$$

が成り立つ。ただし，

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}(A)X = 0, \forall A \in \mathfrak{a}\}, \quad \mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{q} \mid \mathrm{ad}(A)X = 0, \forall A \in \mathfrak{a}\}$$

とする。各 $\lambda \in \Delta$ に対して λ の符号を $(m^+(\lambda), m^-(\lambda))$ で表す。

2 主結果

G/H の s 表現に対する双曲軌道の局所軌道型は次の 3 段階を踏むことによって分類することができる。

(Step1) 双曲軌道の軌道空間をベクトル型極大分離的可換部分空間に関する制限ルート系から定まる Weyl 領域を用いて記述する。
(Step2) 主双曲軌道（双曲軌道の中で最も次元が高い軌道）の局所軌道型を計算する。
(Step3) 局所軌道型が制限ルート系の Dynkin 図形の部分図形と対応することを用いてすべての局所軌道型を計算する。

(Step 1) $\mathfrak{a}$ をベクトル型極大分離的可換部分空間とし，$\mathfrak{a}$ に関する G/H の制限ルート系を Δ とする。$N := \{h \in H \mid \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}, Z := \{h \in H \mid \mathrm{Ad}(h)A = A, \forall A \in \mathfrak{a}\}$ としたとき，$W := N/Z$ を G/H の（$\mathfrak{a}$ に関する）Weyl 群といい，$\varphi(hZ) := \mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}} (\forall h \in N)$ によって定義される準同型写像 $\varphi : W \to GL(\mathfrak{a})$ によって W を $GL(\mathfrak{a})$ の部分群としてみなす。ここで，W は Δ の Weyl 群 $\mathcal{W}(\Delta)$ に一致するとは限らないことに注意する。各 $\lambda \in \Delta$ に対して，超平面 $\lambda^{-1}(0) (\subset \mathfrak{a})$ に関する鏡映を s_λ で表す。$\Delta^a := \{\lambda \in \Delta \mid m^+(\lambda) > 0\}$ とし，$s_\lambda \, (\lambda \in \Delta^a)$ によって生成される $\mathcal{W}(\Delta)$ の部分群を $\mathcal{W}(\Delta^a)$ で表す。$\mathcal{W}(\Delta^a)$ の $\mathcal{W}(\Delta)$ における指数を l とする。このとき，次の結果を得る。

定理 1([2]) $\{w_1, \ldots, w_l\}$ を $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系としたとき，G/H の s 表現に対する双曲軌道の局所軌道型全体から成る集合は次の集合に一致する:

$$\bigcup_{i=1}^{l} \{[\mathfrak{h}_\Theta] \mid \Theta \subset w_i \cdot \Psi\}$$

ただし，$\mathfrak{h}_\Theta = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_\Theta \cap \Delta_+} \mathfrak{h}_\lambda$, $\Delta_\Theta = \Delta \cap \sum_{\lambda \in \Theta} \boldsymbol{R}\lambda$ とする。

2.1 $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系

$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系の与え方はルート系 Δ, Δ^a の型によって場合分けして考える。なお，Berger([4]) の半単純対称対の分類表をもとに計算した Δ, Δ^a の型および $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の指数を表 3，表 4 で与える。従って，これらの表から $\Delta \neq \Delta^a$ となるものは次の表 1 に限られることがわかる。

表 1: Δ, Δ^a の型（ただし，$\Delta = \Delta^a$ を除く）

Type of Δ	Type of Δ^a
A_{n-1}	$A_{p-1} + A_{n-p-1}$
B_n	$B_p + B_{n-p}$, $D_p + B_{n-p}$
C_n	A_{n-1}, D_n, $C_p + C_{n-p}$
D_n	A_{n-1}, $D_p + D_{n-p}$
$(BC)_n$	$C_p + (BC)_{n-p}$, $(BC)_p + (BC)_{n-p}$
E_6	$A_1 + A_5$, D_5
E_7	A_7, $A_1 + D_6$, E_6
E_8	$A_1 + E_7$, D_8
F_4	C_4, B_4, $A_1 + C_3$
G_2	$A_1 + A_1$

Δ が古典型の場合で，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系を与える。ルート系については以下の記号を用いる。

$$
\begin{aligned}
A_n &= \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1\}, \\
B_n &= \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\
C_n &= \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\
D_n &= \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}, \\
(BC)_n &= \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm e_i, \pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}.
\end{aligned}
$$

例 1（$(\Delta, \Delta^a) = (C_n, A_{n-1})$ の場合）$A_{n-1} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \subset C_n$ としても一般性を失わない。このとき，

$$
\left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i^{l_i} \;\middle|\; l_i = 0, 1 \right\}
$$

は $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系を与える。ただし，$t_i \in \mathcal{W}(\Delta)\,(1 \leq i \leq n)$ は次の式で定める：

$$
t_i = \begin{cases} s_{e_i - e_{i+1}} \cdots s_{e_{n-1} - e_n} s_{2e_n} s_{e_{n-1} - e_n} \cdots s_{e_i - e_{i+1}} & (1 \leq i \leq n-1), \\ s_{2e_n} & (i = n) \end{cases}
$$

例 2（$(\Delta, \Delta^a) = (C_n, D_n)$ の場合）$D_n = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset C_n$ としても一般性を失わない。このとき，$\{\mathrm{id}, s_{2e_n}\}$ は $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系を与える。

例 3（$(\Delta, \Delta^a) = (D_n, A_{n-1})$ の場合）$A_{n-1} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \subset D_n$ としても一般性を失わない。このとき，

$$
\left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (s_{e_i - e_{i+1}} s_{e_i + e_{i+1}})^{l_i} \;\middle|\; l_i = 0, 1 \right\}
$$

は $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系を与える。

例 4（$(\Delta, \Delta^a) = (A_{n-1}, A_{p-1} + A_{n-p-1})$ の場合）

$$
A_{p-1} + A_{n-p-1} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq p\} \cup \{e_i - e_j \mid p+1 \leq i \neq j \leq n\} \subset A_{n-1}
$$

としても一般性を失わない。$p = 0, n$ のとき，$\Delta = \Delta^a$ であるので $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) = \{\mathrm{id}\}$ を得る。また，$p = 1, 2, \ldots, n-1$ のとき，次の結果を得る。

命題 2 $\Gamma = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n-1\}(\subset \Delta), \Gamma^a = \Gamma \cap \Delta^a$ および $\tilde{\Gamma} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq p-1\} \cup \{e_i - e_j \mid p \leq i \neq j \leq n-1\}$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) = \mathcal{W}(\Gamma)/\mathcal{W}(\Gamma^a) \cup \left\{ w s_{e_{n-1}-e_n} \cdots s_{e_p - e_{p+1}} \mid w \in \mathcal{W}(\Gamma)/\mathcal{W}(\tilde{\Gamma}) \right\}$$

命題 2 によって $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系は再帰的に与えることができる。（二項係数 ${}_n\mathrm{C}_p$ が ${}_n\mathrm{C}_p = {}_{n-1}\mathrm{C}_{p-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_p$ によって再帰的に計算できるのと同じ考え方である。）

例 5（$(\Delta, \Delta^a) = (B_n, B_p + B_{n-p}), (C_n, C_p + C_{n-p}), ((BC)_n, C_p + (BC)_{n-p}), ((BC)_n, (BC)_p + (BC)_{n-p})$ の場合）

$$B_p + B_{n-p} = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid p+1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset B_n$$

としても一般性を失わない。このとき，$\Lambda = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}(\subset \Delta, \Lambda \cong A_{n-1})$，$\Lambda^a = \Delta^a \cap \Lambda (\cong A_{p-1} + A_{n-p-1})$ とすると，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) \cong \mathcal{W}(\Lambda)/\mathcal{W}(\Lambda^a)$ が示される。従って，$\mathcal{W}(\Lambda)/\mathcal{W}(\Lambda^a)$ については例 4 を適用することによって，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系を与えることができる。同様な議論によって $(\Delta, \Delta^a) = (C_n, C_p + C_{n-p}), ((BC)_n, C_p + (BC)_{n-p}), ((BC)_n, (BC)_p + (BC)_{n-p})$ の場合も $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) \cong \mathcal{W}(\Lambda)/\mathcal{W}(\Lambda^a)$ が示すことができる。

例 6（$(\Delta, \Delta^a) = (D_n, D_p + D_{n-p}), (B_n, D_p + B_{n-p})$ の場合）

$$D_p + D_{n-p} = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid p+1 \leq i < j \leq n\} \subset D_n$$

としても一般性を失わない。このとき，$\Lambda = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}(\subset \Delta)$，$\Lambda^a = \Delta^a \cap \Lambda$ とすると，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) \cong \{(s_{e_p - e_{p+1}} s_{e_p + e_{p+1}})^l w \mid l = 0, 1, w \in \mathcal{W}(\Lambda)/\mathcal{W}(\Lambda^a)\}$ が示される。従って，$\mathcal{W}(\Lambda)/\mathcal{W}(\Lambda^a)$ については例 4 を適用することによって，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の完全代表系を与えることができる。同様な議論によって $(\Delta, \Delta^a) = (B_n, D_p + B_{n-p})$ の場合も，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) \cong \{(s_{e_p - e_{p+1}} s_{e_p + e_{p+1}})^l w \mid l = 0, 1, w \in \mathcal{W}(\Lambda)/\mathcal{W}(\Lambda^a)\}$ が示すことができる。

注意 Δ が例外型の場合は未計算である。（ルート系や Weyl 群の性質を利用して効率的な計算方法を構築しないと困難である。ちなみに $\sharp(\mathcal{W}(E_8)/\mathcal{W}(D_8)) = 135$ が最多となっている。）

2.2 主双曲軌道の局所軌道型の決定

(Step 2) 主双曲軌道の局所軌道型は $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})(= \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}(A)X = 0, \forall A \in \mathfrak{a}\})$ に一致することを用いて次の手順によって求めることができる。

（手順 1）$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ を中心と半単純部分への分解を考え，G/H に付随する佐武図形を用いて半単純部分を計算する。

（手順 2）G/H の階数と $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ の半単純部分の階数を用いて $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ の中心を求める。

ここで，G/H に付随する佐武図形とは，$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^C$ のカルタン部分代数 $\tilde{\mathfrak{a}}^C$ に関するルートを $\mathfrak{a}$ および以下の包含関係をみたす $\mathfrak{q}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$，$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ にそれぞれ制限して得られるものである。ただし，θ は σ と可換な $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合で，θ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ で表す。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q} & & \mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}} \\
\cup & & \cup \\
\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}},\ \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} & \subset \tilde{\mathfrak{a}} \subset & \tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}
\end{array}
$$

この手順をもとに，すべての半単純擬リーマン対称空間に対して主双曲軌道の局所軌道型を決定したのが次の結果である。

定理 3 半単純擬リーマン対称空間の s 表現に対して，主双曲軌道の局所軌道型は表 5，表 6 で与えられる。

(Step 3) 特異双曲軌道の局所軌道型の計算には，主双曲軌道の局所軌道型と Δ の Dynkin 図形の部分図形に対応する擬リーマン対称空間が用いられる。部分図形に対応する擬リーマン対称空間の構成方法およびこれらを用いた局所軌道型の計算公式は [1] で与えている。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が古典型かつ $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) = \{\mathrm{id}\}$ となる場合，双曲軌道の局所軌道型全体から成る集合は表 7 で与えられる。

注意 (1) 局所軌道型全体から成る集合は定理 1 によって与えたが，G/H がリーマン対称空間の場合と異なり調べるべき軌道はいくつかの Weyl 領域に分かれている。この議論は次の例が示すように局所軌道型の分類において本質的であることがわかる。

例 7（$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(4, \boldsymbol{R}), \mathfrak{so}(2,2))$ の場合）$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の制限ルート系の Dynkin 図形は次で与えられる。

$$
\overset{\lambda_1}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{\lambda_2}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{\lambda_3}{\circ}
\qquad
\begin{pmatrix} m^+(\lambda_i) & m^+(2\lambda_i) \\ m^-(\lambda_i) & m^-(2\lambda_i) \end{pmatrix}
=
\begin{cases}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (i = 1, 3) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (i = 2)
\end{cases}
$$

$\Psi = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ とする。表 4 より主双曲軌道の局所軌道型は $\{0\}$ である。$\Delta = A_3, \Delta^a = A_1 + A_2$ であるから，命題 2 より

$$
\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a) = \{\mathrm{id}, s_2, s_1s_2, s_3s_2, s_1s_3s_2, s_2s_1s_3s_2\}
$$

を得る。ただし，$s_i\,(i = 1, 2, 3)$ は $\lambda_i^{-1}(0)$ に関する鏡映を表す。各 $w \in \mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ に対して，$\{[\mathfrak{h}_\Theta] \mid \Theta \subset w \cdot \Psi\}$ を求めた結果が表 2 である。従って，この場合の局所軌道型全体から成る集合 $\mathcal{L}_h(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は

$$
\left\{
\begin{array}{c}
[\{0\}], [\mathfrak{so}(2,0)], [\mathfrak{so}(1,1)], [\mathfrak{so}(0,2)], [\mathfrak{so}(2,0) + \mathfrak{so}(0,2)], \\
{[\mathfrak{so}(1,2)], [\mathfrak{so}(1,1) + \mathfrak{so}(1,1)], [\mathfrak{so}(2,1)], [\mathfrak{so}(2,2)]}
\end{array}
\right\}
$$

であることがわかる。このことから，逆に $\mathcal{L}_h(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のすべての元を与える Weyl 領域（もしくは $w_i \cdot \Psi$）が存在しないこともわかる。

(2) G/H の s 表現に対する楕円軌道の局所軌道型は G/H に付随する c-dual の s 表現に対する双曲軌道の局所軌道型に一致する。従って，楕円軌道の局所軌道型の分類は双曲軌道の局所軌道型の分類に帰着される。

表 2: $(\mathfrak{sl}(4,\boldsymbol{R}),\mathfrak{so}(2,2))$ の局所軌道型

$\Theta(\subset \Psi)$	$\mathfrak{h}_\Theta$	$\Theta(\subset s_2\Psi)$	$\mathfrak{h}_\Theta$
Ψ	$\mathfrak{so}(2,2)$	$s_2\Psi$	$\mathfrak{so}(2,2)$
$\{e_2-e_3,e_3-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,2)$	$\{e_3-e_2,e_2-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,2)$
$\{e_1-e_2,e_3-e_4\}$	$\mathfrak{so}(2,0)+\mathfrak{so}(0,2)$	$\{e_1-e_3,e_2-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,1)+\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_1-e_2,e_2-e_3\}$	$\mathfrak{so}(2,1)$	$\{e_1-e_3,e_3-e_2\}$	$\mathfrak{so}(2,1)$
$\{e_3-e_4\}$	$\mathfrak{so}(0,2)$	$\{e_2-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_2-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_3-e_2\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_1-e_2\}$	$\mathfrak{so}(2,0)$	$\{e_1-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\Theta(\subset s_1s_2\Psi)$	$\mathfrak{h}_\Theta$	$\Theta(\subset s_3s_2\Psi)$	$\mathfrak{h}_\Theta$
$s_1s_2\Psi$	$\mathfrak{so}(2,2)$	$s_3s_2\Psi$	$\mathfrak{so}(2,2)$
$\{e_3-e_1,e_1-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,2)$	$\{e_4-e_2,e_2-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,2)$
$\{e_2-e_3,e_1-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,1)+\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_1-e_4,e_2-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)+\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_2-e_3,e_3-e_1\}$	$\mathfrak{so}(2,1)$	$\{e_1-e_4,e_4-e_2\}$	$\mathfrak{so}(2,1)$
$\{e_1-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_2-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_3-e_1\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_4-e_2\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_2-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_1-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\Theta(\subset s_1s_3s_2\Psi)$	$\mathfrak{h}_\Theta$	$\Theta(\subset s_2s_1s_3s_2\Psi)$	$\mathfrak{h}_\Theta$
$s_1s_3s_2\Psi$	$\mathfrak{so}(2,2)$	$s_2s_1s_3s_2\Psi$	$\mathfrak{so}(2,2)$
$\{e_4-e_1,e_1-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,2)$	$\{e_4-e_1,e_1-e_2\}$	$\mathfrak{so}(2,1)$
$\{e_2-e_4,e_1-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)+\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_3-e_4,e_1-e_2\}$	$\mathfrak{so}(2,0)+\mathfrak{so}(0,2)$
$\{e_2-e_4,e_4-e_1\}$	$\mathfrak{so}(2,1)$	$\{e_3-e_4,e_4-e_1\}$	$\mathfrak{so}(1,2)$
$\{e_1-e_3\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_1-e_2\}$	$\mathfrak{so}(2,0)$
$\{e_4-e_1\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_4-e_1\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$
$\{e_2-e_4\}$	$\mathfrak{so}(1,1)$	$\{e_3-e_4\}$	$\mathfrak{so}(0,2)$
$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$

表 3: Δ,Δ^a の型，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の指数：$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が古典型の場合

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$	Type of Δ	Type of Δ^a	Index	Remarks
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}))$	$(BC)_m$	B_m	1	$n=2m+1$
	C_m	D_m	2	$n=2m$
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})^2,\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1	
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{su}^*(2n))$	C_n	C_n	1	
$(\mathfrak{su}^*(2n)^2,\mathfrak{su}^*(2n))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1	
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{su}(p,n-p))$	A_{n-1}	$A_{p-1}+A_{n-p-1}$	${}_nC_p$	
$(\mathfrak{su}(p,n-p)^2,\mathfrak{su}(p,n-p))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n>2p$
	C_p	C_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(p,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sl}(n-p,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n>2p$
	C_p	C_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{so}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}^*(2n))$	D_n	A_{n-1}	2^{n-1}	
$(\mathfrak{so}^*(2n)^2,\mathfrak{so}^*(2n))$	$(BC)_m$	$(BC)_m$	1	$n=2m+1$
	C_m	C_m	1	$n=2m$
$(\mathfrak{so}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	$(BC)_m$	$(BC)_m$	1	$n=2m+1$
	C_m	C_m	1	$n=2m$
$(\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(p,n-p))$	B_m	D_q+B_{m-q}	$2{}_mC_q$	$n=2m+1$, $p=2q$
	B_m	B_q+B_{m-q}	${}_mC_q$	$n=2m+2$, $p=2q+1$
	D_m	D_q+D_{m-q}	$2{}_mC_q$	$n=2m$, $p=2q$
$(\mathfrak{so}(p,n-p)^2,\mathfrak{so}(p,n-p))$	B_p	B_p	1	$n>2p$
	D_p	D_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(p,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(n-p,\boldsymbol{C}))$	B_p	B_p	1	$n>2p$
	D_p	D_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	C_n	A_{n-1}	2^n	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R})^2,\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	C_n	C_n	1	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	C_n	C_n	1	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	C_n	C_p+C_{n-p}	${}_nC_p$	
$(\mathfrak{sp}(p,n-p)^2,\mathfrak{sp}(p,n-p))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n>2p$
	C_p	C_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(p,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sp}(n-p,\boldsymbol{C}))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n>2p$
	C_p	C_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{so}(p,n-p))$	A_{n-1}	$A_{p-1}+A_{n-p-1}$	${}_nC_p$	
$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{so}(p,n-p))$	$(BC)_p$	B_p	1	$n>2p$
	C_p	D_p	2	$n=2p$
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(p,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(n-p,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	$(BC)_p$	B_p	1	$n>2p$
	C_p	D_p	2	$n=2p$
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	A_{n-1}	$A_{p-1}+A_{n-p-1}$	${}_nC_p$	
$(\mathfrak{su}(2p,2(n-p)),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n>2p$
	C_p	C_p	1	$n=2p$
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(2p)+\mathfrak{su}^*(2(n-p))+\boldsymbol{R})$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n>2p$
	C_p	C_p	1	$n=2p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$	Type of Δ	Type of Δ^a	Index	Remarks
$(\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1	
$(\mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1	
$(\mathfrak{su}(n, n), \mathfrak{so}^*(2n))$	C_n	C_n	1	
$(\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(2))$	C_n	C_n	1	
$(\mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(2))$	$(BC)_m$	$(BC)_m$	1	$n = 2m + 1$
	C_m	C_m	1	$n = 2m$
$(\mathfrak{su}(n, n), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$	$(BC)_m$	$(BC)_m$	1	$n = 2m + 1$
	C_m	C_m	1	$n = 2m$
$(\mathfrak{su}(n, n), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{R})$	C_n	A_{n-1}	2^n	
$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{so}(2))$	$(BC)_m$	$C_q + (BC)_{m-q}$	${}_mC_q$	$n = 2m + 1$ $p = 2q$
	$(BC)_m$	$C_q + (BC)_{m-q}$	${}_mC_q$	$n = 2m + 2$ $p = 2q + 1$
	C_m	$C_q + C_{m-q}$	${}_mC_q$	$n = 2m$ $p = 2q$
$(\mathfrak{so}(2p, 2(n-p)), \mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{so}(2))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n > 2p$
	C_p	C_p	1	$n = 2p$
$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2p) + \mathfrak{so}^*(2(n-p)))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n > 2p$
	C_p	C_p	1	$n = 2p$
$(\mathfrak{so}(n, n), \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}))$	D_n	A_{n-1}	2^{n-1}	
$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}))$	$(BC)_m$	B_m	1	$n = 2m + 1$
	C_m	D_m	2	$n = 2m$
$(\mathfrak{so}(n, n), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R})$	$(BC)_m$	B_m	1	$n = 2m + 1$
	C_m	D_m	2	$n = 2m$
$(\mathfrak{so}^*(4n), \mathfrak{su}^*(2n) + \boldsymbol{R})$	C_n	A_{n-1}	2^n	
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{so}(2))$	C_n	$C_p + C_{n-p}$	${}_nC_p$	
$(\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{so}(2))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n > 2p$
	C_p	C_p	1	$n = 2p$
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(p, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n-p, \boldsymbol{R}))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1	$n > 2p$
	C_p	C_p	1	$n = 2p$
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R})$	C_n	A_{n-1}	2^n	
$(\mathfrak{sp}(n, n), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}))$	C_n	A_{n-1}	2^n	
$(\mathfrak{sp}(2n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}))$	C_n	C_n	1	
$(\mathfrak{sp}(n, n), \mathfrak{su}^*(2n) + \boldsymbol{R})$	C_n	C_n	1	

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(n, m), \mathfrak{su}(i, j) + \mathfrak{su}(n-i, m-j) + \mathfrak{so}(2))$

Type of Δ	Type of Δ^a	Index	Remarks
C_n	$C_i + C_{n-i}$	${}_nC_i$	$i + j = n = m$
$(BC)_n$	$C_i + (BC)_{n-i}$	${}_nC_i$	$n < i + j = m$
$(BC)_{m+n-(i+j)}$	$(BC)_{m-j} + (BC)_{n-i}$	${}_{m+n-(i+j)}C_{n-i}$	$n \leq m < i + j$
$(BC)_n$	$(BC)_i + C_{n-i}$	${}_nC_i$	$n = i + j < m$
$(BC)_n$	$(BC)_i + (BC)_{n-i}$	${}_nC_i$	$n < i + j < m$
$(BC)_{i+j}$	$(BC)_i + (BC)_j$	${}_{i+j}C_i$	$i + j < n \leq m$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(n, m), \mathfrak{so}(i, j) + \mathfrak{so}(n-i, m-j))$

Type of Δ	Type of Δ^a	Index	Remarks
D_n	$D_i + D_{n-i}$	$2{}_nC_i$	$i + j = n = m$
B_n	$D_i + B_{n-i}$	$2{}_nC_i$	$n < i + j = m$
$B_{m+n-(i+j)}$	$B_{m-j} + B_{n-i}$	${}_{m+n-(i+j)}C_{n-i}$	$n \leq m < i + j$
B_n	$B_i + D_{n-i}$	$2{}_nC_i$	$n = i + j < m$
B_n	$B_i + B_{n-i}$	${}_nC_i$	$n < i + j < m$
B_{i+j}	$B_i + B_j$	${}_{i+j}C_i$	$i + j < n \leq m$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n, m), \mathfrak{sp}(i, j) + \mathfrak{sp}(n-i, m-j))$

Type of Δ	Type of Δ^a	Index	Remarks
C_n	$C_i + C_{n-i}$	${}_nC_i$	$i + j = n = m$
$(BC)_n$	$C_i + (BC)_{n-i}$	${}_nC_i$	$n < i + j = m$
$(BC)_{m+n-(i+j)}$	$(BC)_{m-j} + (BC)_{n-i}$	${}_{m+n-(i+j)}C_{n-i}$	$n \leq m < i + j$
$(BC)_n$	$(BC)_i + C_{n-i}$	${}_nC_i$	$n = i + j < m$
$(BC)_n$	$(BC)_i + (BC)_{n-i}$	${}_nC_i$	$n < i + j < m$
$(BC)_{i+j}$	$(BC)_i + (BC)_j$	${}_{i+j}C_i$	$i + j < n \leq m$

表 4: Δ, Δ^a の型，$\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)$ の指数：$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が例外型の場合

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$	Type of Δ	Type of Δ^a	Index
$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(4, \boldsymbol{R}))$	E_6	$A_1 + A_5$	36
$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	C_4	3
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{sp}(4, \boldsymbol{R}))$	F_4	C_4	3
$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(2, 2))$	E_6	D_5	27
$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{so}(5, 5) + \boldsymbol{R})$	BC_2	B_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{sp}(2, 2))$	BC_2	B_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{su}(3, 3) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	$A_1 + C_3$	12
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{su}(4, 2) + \mathfrak{su}(2))$	F_4	B_4	3
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{so}(6, 4) + \mathfrak{so}(2))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{su}(4, 2) + \mathfrak{su}(2))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}^*(10) + \mathfrak{so}(2))$	BC_2	$C_1 + BC_1$	2
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{su}(5, 1) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{so}^*(10) + \mathfrak{so}(2))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}(8, 2) + \mathfrak{so}(2))$	BC_2	B_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$	A_2	A_1	3
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{so}(9, 1) + \boldsymbol{R})$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$	A_2	A_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{su}^*(6) + \mathfrak{su}(2))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{sp}(3, 1))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{su}^*(6) + \mathfrak{su}(2))$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{sp}(3, 1))$	A_2	A_2	1
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{sl}(8, \boldsymbol{R}))$	E_7	A_7	72
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}(4, 4))$	E_7	$A_1 + D_6$	63
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{so}(6, 6) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	C_4	3
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{su}(4, 4))$	F_4	C_4	3
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}^*(8))$	E_7	E_6	56
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{6(6)} + \boldsymbol{R})$	C_3	A_2	8
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{su}^*(8))$	C_3	A_2	8
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{so}^*(12) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	$A_1 + C_3$	12
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{so}(8, 4) + \mathfrak{su}(2))$	F_4	B_4	3
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-14)} + \mathfrak{so}(2))$	C_3	$C_1 + C_2$	3
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{so}(10, 2) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{6(-14)} + \mathfrak{so}(2))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-26)} + \boldsymbol{R})$	C_3	A_2	8
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{6(2)} + \mathfrak{so}(2))$	C_3	C_3	1
$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{so}^*(12) + \mathfrak{su}(2))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{su}(6, 2))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{6(2)} + \mathfrak{so}(2))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{so}^*(12) + \mathfrak{su}(2))$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{su}(6, 2))$	C_3	C_3	1
$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}^*(16))$	E_8	$A_1 + E_7$	120
$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{7(7)} + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	$A_1 + C_3$	12
$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{so}^*(16))$	F_4	$A_1 + C_3$	12

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$	Type of Δ	Type of Δ^a	Index
$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}(8, 8))$	E_8	D_8	135
$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{e}_{7(-5)} + \mathfrak{su}(2))$	F_4	B_4	3
$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{so}(12, 4))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{7(-5)} + \mathfrak{su}(2))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{e}_{7(-25)} + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	$A_1 + C_3$	12
$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{sp}(3, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	F_4	$A_1 + C_3$	12
$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{sp}(2, 1) + \mathfrak{su}(2))$	F_4	B_4	3
$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{so}(5, 4))$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{sp}(2, 1) + \mathfrak{su}(2))$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(8, 1))$	BC_1	C_1	1
$(\mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}))$	G_2	$A_1 + A_1$	3
$(\mathfrak{g}_{2(2)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{g}_{2(2)})$	G_2	$A_1 + A_1$	3
$(\mathfrak{g}_{2(2)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}))$	G_2	G_2	1
$(\mathfrak{g}_{2(2)} + \mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{g}_{2(2)})$	G_2	G_2	1
$(\mathfrak{f}_{4(4)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{f}_{4(4)})$	F_4	$A_1 + C_3$	12
$(\mathfrak{f}_{4(4)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{sp}(3, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{f}_{4(4)} + \mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$	F_4	B_4	3
$(\mathfrak{f}_{4(-20)} + \mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{so}(9, \boldsymbol{C}))$	BC_1	BC_1	1
$(\mathfrak{e}_{6(6)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{6(6)})$	F_4	C_4	3
$(\mathfrak{e}_{6(6)} + \mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{e}_{6(6)})$	E_6	E_6	1
$(\mathfrak{e}_{6(6)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{sp}(4, \boldsymbol{C}))$	E_6	E_6	1
$(\mathfrak{e}_{6(2)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{6(2)})$	E_6	$A_1 + A_5$	36
$(\mathfrak{e}_{6(2)} + \mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{e}_{6(2)})$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{6(2)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{6(-14)})$	E_6	D_5	27
$(\mathfrak{e}_{6(-14)} + \mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{e}_{6(-14)})$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{so}(10, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$	BC_2	BC_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{6(-26)})$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{6(-26)} + \mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{e}_{6(-26)})$	A_2	A_2	1
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{f}_4^{\boldsymbol{C}})$	A_2	A_2	1
$(\mathfrak{e}_{7(7)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{7(7)})$	E_7	A_7	72
$(\mathfrak{e}_{7(7)} + \mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{7(7)})$	E_7	E_7	1
$(\mathfrak{e}_{7(7)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{sl}(8, \boldsymbol{C}))$	E_7	E_7	1
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{7(-5)})$	E_7	$A_1 + D_6$	63
$(\mathfrak{e}_{7(-5)} + \mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{7(-5)})$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{so}(12, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}))$	F_4	F_4	1
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_{7(-25)})$	E_7	E_6	56
$(\mathfrak{e}_{7(-25)} + \mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{7(-25)})$	C_3	C_3	1
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}^{\boldsymbol{C}}, \mathfrak{e}_6^{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{C})$	C_3	C_3	1

表 5: 主双曲軌道の局所軌道型：$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が古典型の場合

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$	主双曲軌道の局所軌道型	Remarks
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}))$	$\boldsymbol{R}^{[(n-1)/2]}+\mathfrak{so}(2)^{[n/2]}$	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})^2,\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}))$	$\boldsymbol{R}^{n-1}$	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}))$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{su}^*(2n))$	$\boldsymbol{R}^{n-1}+\mathfrak{so}(2)^n$	
$(\mathfrak{su}^*(2n)^2,\mathfrak{su}^*(2n))$	$\boldsymbol{R}^{n-1}+\mathfrak{sp}(1)^n$	
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{C})^n$	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{su}(p,n-p))$	$\mathfrak{so}(2)^{n-1}$	
$(\mathfrak{su}(p,n-p)^2,\mathfrak{su}(p,n-p))$	$\boldsymbol{R}^p+\mathfrak{so}(2)^p+\mathfrak{su}(n-2p)$	$n>2p$
	$\boldsymbol{R}^p+\mathfrak{so}(2)^{p-1}$	$n=2p$
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(p,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sl}(n-p,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	$\boldsymbol{C}^p+\mathfrak{sl}(n-2p,\boldsymbol{C})$	$n>2p$
	$\boldsymbol{C}^{p-1}$	$n=2p$
$(\mathfrak{so}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}^*(2n))$	$\mathfrak{so}(2)^n$	
$(\mathfrak{so}^*(2n)^2,\mathfrak{so}^*(2n))$	$\boldsymbol{R}^m+\mathfrak{su}(2)^m+\mathfrak{so}(2)$	$n=2m+1$
	$\boldsymbol{R}^m+\mathfrak{su}(2)^m$	$n=2m$
$(\mathfrak{so}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})^m+\boldsymbol{C}$	$n=2m+1$
	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})^m$	$n=2m$
$(\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(p,n-p))$	$\mathfrak{so}(2)^m$	$n=2m+1$ $p=2q$
	$\mathfrak{so}(2)^m+\boldsymbol{R}$	$n=2m$ $p=2q+1$
	$\mathfrak{so}(2)^m$	$n=2m$ $p=2q$
$(\mathfrak{so}(p,n-p)^2,\mathfrak{so}(p,n-p))$	$\boldsymbol{R}^p+\mathfrak{so}(n-2p)$	
$(\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(p,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(n-p,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{so}(n-2p,\boldsymbol{C})$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{so}(2)^n$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R})^2,\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	$\boldsymbol{R}^n$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	$\mathfrak{so}(2)^n$	
$(\mathfrak{sp}(p,n-p)^2,\mathfrak{sp}(p,n-p))$	$\boldsymbol{R}^p+\mathfrak{sp}(1)^p+\mathfrak{sp}(n-2p)$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(p,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sp}(n-p,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{C})^p+\mathfrak{sp}(n-2p,\boldsymbol{C})$	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{so}(p,n-p))$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{so}(p,n-p))$	$\mathfrak{so}(n-2p)$	
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(p,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(n-p,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	$\boldsymbol{R}^p+\mathfrak{sl}(n-2p,\boldsymbol{R})$	$n>2p$
	$\boldsymbol{R}^{p-1}$	$n=2p$
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	$\mathfrak{sp}(1)^n$	
$(\mathfrak{su}(2p,2(n-p)),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})^p+\mathfrak{sp}(n-2p)$	
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(2p)+\mathfrak{su}^*(2(n-p))+\boldsymbol{R})$	$\boldsymbol{R}^p+\mathfrak{sp}(1)^p+\mathfrak{su}^*(2(n-2p))$	$n>2p$
	$\boldsymbol{R}^{p-1}+\mathfrak{sp}(1)^p$	$n=2p$
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{R})^n$	
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{so}^*(2n))$	$\mathfrak{u}(1)^n$	
$(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{so}^*(2n))$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$	$\boldsymbol{R}^{n-1}$	
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$	$\boldsymbol{R}^m+\mathfrak{su}(2)^m+\mathfrak{so}(2)$	$n=2m+1$
	$\boldsymbol{R}^{m-1}+\mathfrak{su}(2)^m$	$n=2m$
$(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{C})^m+\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{R})$	$n=2m+1$
	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{C})^m$	$n=2m$
$(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(2)^{n-1}$	
$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{su}(p,n-p)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{su}(2)^m+\mathfrak{so}(2)$	$n=2m+1$ $p=2q$
	$\mathfrak{su}(2)^m+\mathfrak{so}(2)$	$n=2(m+1)$ $p=2q+1$
	$\mathfrak{su}(2)^m$	$n=2m$ $p=2q$
$(\mathfrak{so}(2p,2(n-p)),\mathfrak{su}(p,n-p)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{su}(1,1)^p+\mathfrak{u}(n-2p)$	
$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{so}^*(2p)+\mathfrak{so}^*(2(n-p)))$	$\mathfrak{so}(2)^p+\mathfrak{so}^*(2(n-2p))$	
$(\mathfrak{so}(n,n),\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}))$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{so}(2)^{[n/2]}$	
$(\mathfrak{so}(n,n),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	$\boldsymbol{R}+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})^m$	$n=2m+1$
	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})^m$	$n=2m$
$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{sp}(1)^n$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{su}(p,n-p)+\mathfrak{so}(2))$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{sp}(p,n-p),\mathfrak{su}(p,n-p)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{u}(1)^p+\mathfrak{u}(n-2p)$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(p,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sp}(n-p,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{R})^p+\mathfrak{sp}(n-2p,\boldsymbol{R})$	
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	$\{0\}$	
$(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{sp}(1)^n$	
$(\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{R})^n$	
$(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{u}(1)^n$	
$(\mathfrak{su}(n,m),\mathfrak{su}(i,j)+\mathfrak{su}(n-i,m-j)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(2)^{n-1}$	$i+j=n=m$
	$\mathfrak{so}(2)^n+\mathfrak{su}(m-n)$	$n<i+j=m$
	$\mathfrak{so}(2)^{m+n-(i+j)}+\mathfrak{su}(i+j-n,i+j-m)$	$n\leq m<i+j$
	$\mathfrak{so}(2)^n+\mathfrak{su}(m-n)$	$n=i+j<m$
	$\mathfrak{so}(2)^{n+1}+\mathfrak{su}(i+j-n)+\mathfrak{su}(m-(i+j))$	$n<i+j<m$
	$\mathfrak{so}(2)^{i+j}+\mathfrak{su}(n-(i+j),m-(i+j))$	$i+j<n\leq m$
$(\mathfrak{so}(n,m),\mathfrak{so}(i,j)+\mathfrak{so}(n-i,m-j))$	$\{0\}$	$i+j=n=m$
	$\mathfrak{so}(m-n)$	$n<i+j=m$
	$\mathfrak{so}(i+j-n,i+j-m)$	$n\leq m<i+j$
	$\mathfrak{so}(m-n)$	$n=i+j<m$
	$\mathfrak{so}(i+j-n)+\mathfrak{so}(m-(i+j))$	$n<i+j<m$
	$\mathfrak{so}(n-(i+j),m-(i+j))$	$i+j<n\leq m$
$(\mathfrak{sp}(n,m),\mathfrak{sp}(i,j)+\mathfrak{sp}(n-i,m-j))$	$\mathfrak{sp}(1)^n$	$i+j=n=m$
	$\mathfrak{sp}(1)^n+\mathfrak{sp}(m-n)$	$n<i+j=m$
	$\mathfrak{sp}(1)^{m+n-(i+j)}+\mathfrak{sp}(i+j-n,i+j-m)$	$n\leq m<i+j$
	$\mathfrak{sp}(1)^n+\mathfrak{sp}(m-n)$	$n=i+j<m$
	$\mathfrak{sp}(1)^n+\mathfrak{sp}(i+j-n)+\mathfrak{sp}(m-(i+j))$	$n<i+j<m$
	$\mathfrak{sp}(1)^{i+j}+\mathfrak{sp}(n-(i+j),m-(i+j))$	$i+j<n\leq m$

表 6: 主双曲軌道の局所軌道型：$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が例外型の場合

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$	主双曲軌道の局所軌道型
$(\mathfrak{g}_{2(2)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{g}_{2(2)})$	$\mathfrak{so}(2)^2$
$(\mathfrak{g}_{2(2)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{g}_{2(2)}+\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{g}_{2(2)})$	$\boldsymbol{R}^2$
$(\mathfrak{f}_{4(4)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{f}_{4(4)})$	$\mathfrak{so}(2)^4$
$(\mathfrak{f}_{4(4)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{sp}(3,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{f}_{4(4)}+\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{f}_{4(4)})$	$\boldsymbol{R}^4$
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{f}_{4(-20)})$	$\mathfrak{so}(2)^4$
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}+\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$	$\boldsymbol{R}+\mathfrak{so}(7)$
$(\mathfrak{f}_{4(-20)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{so}(9,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{so}(7,\boldsymbol{C})$
$(\mathfrak{e}_{6(6)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{6(6)})$	$\mathfrak{so}(2)^4+\boldsymbol{R}^2$
$(\mathfrak{e}_{6(6)}+\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{e}_{6(6)})$	$\boldsymbol{R}^6$
$(\mathfrak{e}_{6(6)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{sp}(4,\boldsymbol{C}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{6(2)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{6(2)})$	$\mathfrak{so}(2)^6$
$(\mathfrak{e}_{6(2)}+\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{e}_{6(2)})$	$\mathfrak{so}(2)^2+\boldsymbol{R}^4$
$(\mathfrak{e}_{6(2)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{sl}(6,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C}))$	$\boldsymbol{C}^2$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{6(-14)})$	$\mathfrak{so}(2)^6$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}+\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{e}_{6(-14)})$	$\mathfrak{so}(2)+\boldsymbol{R}^2+\mathfrak{su}(4)$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{so}(10,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C})$	$\mathfrak{sl}(4,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C}$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{6(-26)})$	$\mathfrak{so}(2)^4+\boldsymbol{R}^2$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}+\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{e}_{6(-26)})$	$\boldsymbol{R}^2+\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{f}_4^{\boldsymbol{C}})$	$\mathfrak{so}(8,\boldsymbol{C})$
$(\mathfrak{e}_{7(7)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{7(7)})$	$\mathfrak{so}(2)^7$
$(\mathfrak{e}_{7(7)}+\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{e}_{7(7)})$	$\boldsymbol{R}^7$
$(\mathfrak{e}_{7(7)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{sl}(8,\boldsymbol{C}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{7(-5)})$	$\mathfrak{so}(2)^7$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}+\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{e}_{7(-5)})$	$\boldsymbol{R}^3+\mathfrak{su}(2)^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{so}(12,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C}))$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_{7(-25)})$	$\mathfrak{so}(2)^7$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}+\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{7(-25)})$	$\boldsymbol{R}^3+\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)}^{\boldsymbol{C}},\mathfrak{e}_6^{\boldsymbol{C}}+\boldsymbol{C})$	$\mathfrak{so}(8,\boldsymbol{C})$
$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sp}(4,\boldsymbol{R}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sl}(6,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\boldsymbol{R}^2$
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{sp}(4,\boldsymbol{R}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sp}(2,2))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{so}(5,5)+\boldsymbol{R})$	$\boldsymbol{R}+\mathfrak{sl}(4,\boldsymbol{R})$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{sp}(2,2))$	$\mathfrak{so}(4)$
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{su}(3,3)+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{so}(2)^2$
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{su}(4,2)+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(2)^2$
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{so}(6,4)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{su}(2,2)$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{su}(4,2)+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(2)^2+\mathfrak{su}(2)^2$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{so}^*(10)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{su}(4)$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{su}(5,1)+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{so}(2)^2+\mathfrak{su}(2)^2$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$	主双曲軌道の局所軌道型
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{so}^*(10)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{su}(2,2)$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{so}(8,2)+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{su}(4)$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$	$\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{so}(9,1)+\boldsymbol{R})$	$\boldsymbol{R}+\mathfrak{so}(7)$
$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$	$\mathfrak{so}(7,1)$
$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{f}_{4(4)})$	$\mathfrak{so}(4,4)$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{sp}(3,1))$	$\mathfrak{so}(4)^2$
$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{su}^*(6)+\mathfrak{su}(2))$	$\boldsymbol{R}^2$
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{sp}(3,1))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{f}_{4(4)})$	$\mathfrak{so}(5,3)$
$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{su}^*(6)+\mathfrak{su}(2))$	$\boldsymbol{R}+\mathfrak{so}(5)+\mathfrak{so}(3)$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{sl}(8,\boldsymbol{R}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{su}(4,4))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{so}(6,6)+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{su}(4,4))$	$\mathfrak{so}(2)^3$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{su}^*(8))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{e}_{6(6)}+\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(4,4)$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{su}^*(8))$	$\mathfrak{so}(4)^2$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{so}^*(12)+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{su}(2)^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{so}(8,4)+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{su}(2)^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{6(-14)}+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{so}(10,2)+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})+\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{so}(6)$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{e}_{6(-14)}+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{so}(2,6)$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{6(-26)}+\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{e}_{6(2)}+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(4,4)$
$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{so}^*(12)+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{su}(6,2))$	$\mathfrak{so}(2)^3$
$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{e}_{6(2)}+\mathfrak{so}(2))$	$\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{so}(2,6)$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{so}^*(12)+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})+\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{so}(6)$
$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{su}(6,2))$	$\mathfrak{so}(4)^2$
$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{so}^*(16))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{e}_{7(7)}+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{so}(4,4)$
$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{so}^*(16))$	$\mathfrak{so}(4)^2$
$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{so}(8,8))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_{7(-5)}+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(4,4)$
$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{so}(12,4))$	$\mathfrak{so}(4)^2$
$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{e}_{7(-5)}+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_{7(-25)}+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{sp}(3,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{sp}(2,1)+\mathfrak{su}(2))$	$\{0\}$
$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{so}(5,4))$	$\mathfrak{so}(4,3)$
$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{sp}(2,1)+\mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(3)$
$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{so}(8,1))$	$\mathfrak{so}(7)$
$(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}))$	$\{0\}$

表 7: 局所軌道型：$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が古典型かつ $\mathcal{W}(\Delta)/\mathcal{W}(\Delta^a)=\{\mathrm{id}\}$ の場合

(I) $\Delta=\Delta^a=A_r$, $\Psi=\{e_i-e_{i+1}\mid 1\le i\le r\}$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k+\sum_{l=1}^{k+1}\mathfrak{sl}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}=n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}^*(2n)+\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(2n))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k+\sum_{l=1}^{k+1}\mathfrak{su}^*(2(i_l-i_{l-1}))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}=n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k+1}\mathfrak{so}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}=n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k+1}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}=n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k+1} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} = n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k+1} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} = n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k+1} \mathfrak{so}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} = n$

(II) $\Delta = \Delta^a = B_r$, $\Psi = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{e_r\}$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(p, n-p) + \mathfrak{so}(p, n-p), \mathfrak{so}(p, n-p))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{so}(n-2p)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{so}(p - i_k, n-p-i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(p, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n-p, \boldsymbol{C}))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n-2p)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(p - i_k, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n-p-i_k, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

(III) $\Delta = \Delta^a = C_r$, $\Psi = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{2e_r\}$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{su}^*(2n))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k-1} + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{su}^*(2(n - i_k))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(n, n) + \mathfrak{su}(n, n), \mathfrak{su}(n, n))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^{k-1} + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{su}(n - i_k, n - i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{C}^{k-1} + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{C}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n - i_k, \boldsymbol{C})^2 + \boldsymbol{C}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}^*(4n) + \mathfrak{so}^*(4n), \mathfrak{so}^*(4n))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{so}^*(4(n - i_k))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(4n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2(n - i_k), \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n - i_k, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n - i_k, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n, n) + \mathfrak{sp}(n, n), \mathfrak{sp}(n, n))$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \Psi)$	$\Psi \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{sp}(n - i_k, n - i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{C}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})+\mathfrak{sp}(n-i_k,\boldsymbol{C})^2$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}(2n,2n),\mathfrak{sp}(n,n))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})+\mathfrak{sp}(n-i_k,n-i_k)$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}^*(4n),\mathfrak{su}^*(2n)+\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k-1}+\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{su}^*(2(i_l-i_{l-1}))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k}+\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{su}^*(2(i_l-i_{l-1}))+\mathfrak{su}^*(2(n-i_k))^2+\boldsymbol{R}$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{so}^*(2n))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}^*(2(n-i_k))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k-1}+\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sl}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k}+\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sl}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(n-i_k,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}^*(4n),\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k-1}+\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{su}^*(2(i_l-i_{l-1}))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^{k}+\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{su}^*(2(i_l-i_{l-1}))+\mathfrak{sl}(2(n-i_k),\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}(2n,2n),\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{C})+\mathfrak{sp}(2(n-i_k),\boldsymbol{R})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}(2n,2n),\mathfrak{su}(n,n)+\mathfrak{so}(2))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})+\mathfrak{su}(n-i_k,n-i_k)+\mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{so}^*(2n)+\mathfrak{so}^*(2n))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}^*(2(i_l-i_{l-1}))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}^*(2(i_l-i_{l-1}))+\mathfrak{so}^*(2(n-i_k))^2$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{su}(n,n)+\mathfrak{so}(2))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}^*(2(i_l-i_{l-1}))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}^*(2(i_l-i_{l-1}))+\mathfrak{su}(n-i_k,n-i_k)+\mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})+\mathfrak{sp}(n-i_k,\boldsymbol{R})^2$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{sp}(i_l-i_{l-1},\boldsymbol{R})+\mathfrak{sp}(n-i_k,\boldsymbol{C})$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_{k-1}}-e_{i_{k-1}+1},2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}^*(2(i_l-i_{l-1}))$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k=n$

$\Theta(\subset\Psi)$	$\Psi\setminus\{e_{i_1}-e_{i_1+1},\dots,e_{i_k}-e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k}\mathfrak{so}^*(2(i_l-i_{l-1}))+\mathfrak{su}^*(2(n-i_k))+\boldsymbol{R}$
Remarks	$0=i_0<i_1<\cdots<i_k<n$

(IV) $\Delta = \Delta^a = D_r$, $\mathit{\Psi} = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le r-1\} \cup \{e_{r-1} + e_r\}$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(n,n) + \mathfrak{so}(n,n), \mathfrak{so}(n,n))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}}, e_{n-1} + e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}}, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{so}(n - i_k, n - i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_{n-1} + e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n - i_k, \boldsymbol{C})^2$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

(V) $\Delta = \Delta^a = (BC)_r$, $\mathit{\Psi} = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le r-1\} \cup \{e_r\}$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{su}(p, n-p), \mathfrak{su}(p, n-p))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{su}(n - 2p)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(p, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n-p, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{C}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n - 2p, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{C}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(p - i_k, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n - p - i_k, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}^*(2(2n+1)) + \mathfrak{so}^*(2(2n+1)), \mathfrak{so}^*(2(2n+1)))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2) + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{so}^*(2(2(n - i_k) + 1))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(2(2n+1), \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{C} + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2(n - i_k) + 1, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(p, n-p) + \mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{sp}(p, n-p))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{sp}(n - 2p)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{sp}(p - i_k, n - p - i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(p, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(n-p, \boldsymbol{C}))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, 2e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(p - i_k, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(n - 2p, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(p - i_k, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(n - p - i_k, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(2p, 2(n-p)), \mathfrak{sp}(p, n-p))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(n - 2p)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(p - i_k, n - p - i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{su}^*(2p) + \mathfrak{su}^*(2(n-p)) + \boldsymbol{R})$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{su}^*(2(n - 2p))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{su}^*(2(p - i_k)) + \mathfrak{su}^*(2(n - p - i_k)) + \boldsymbol{R}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}^*(2(2n+1)), \mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(2))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2) + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2) + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{su}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{sl}(2(n - i_k) + 1, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(2n+1, 2n+1), \mathfrak{sp}(2n+1, \boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(2(n - i_k) + 1, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(2p, 2(n-p)), \mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{so}(2))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{su}(p-i_k, n-p-i_k) + \mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2p) + \mathfrak{so}^*(2(n-p)))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{so}^*(2(p - i_k)) + \mathfrak{so}^*(2(n - p - i_k))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{so}(2))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\mathfrak{u}(n-2p) + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{su}(p-i_k, n-p-i_k) + \mathfrak{so}(2)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(p, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n-p, \boldsymbol{R}))$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n-2p, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(p - i_k, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n-p-i_k, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

(VI) $\Delta = (BC)_r$, $\Delta^a = B_r$, $\mathit{\Psi} = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{e_r\}$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{R}))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \mathfrak{so}(2)^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(2(n-i_k)+1, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(p, n-p), \mathfrak{so}(p, n-p))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n-2p)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(p - i_k, n-p-i_k)$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sl}(p, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(n-p, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R})$ $(n > 2p)$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_p\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(n-2p, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = p$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R}^k + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sl}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(p - i_k, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(n - p - i_k, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < p$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}^*(2(2n+1)), \mathfrak{so}(2n+1, \boldsymbol{C}))$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}^*(2(i_l - i_{l-1}))$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{so}^*(2(i_l - i_{l-1})) + \mathfrak{so}(2(n - i_k) + 1, \boldsymbol{C})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(2n+1, 2n+1), \mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R})$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_{k-1}} - e_{i_{k-1}+1}, e_n\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\boldsymbol{R} + \sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R})$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = n$

$\Theta(\subset \mathit{\Psi})$	$\mathit{\Psi} \setminus \{e_{i_1} - e_{i_1+1}, \dots, e_{i_k} - e_{i_k+1}\}$
$\mathfrak{h}_\Theta$	$\sum_{l=1}^{k} \mathfrak{sp}(i_l - i_{l-1}, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(2(n - i_k) + 1, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{R}$
Remarks	$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$

今後の研究計画

(1) s 表現の半単純軌道の局所軌道型の構造の決定およびそれらを分類する方法の構築

双曲軌道や楕円軌道の場合での方法を半単純軌道の場合に拡張することを試みる。具体的には，半単純擬リーマン対称空間 G/H の Cartan 部分空間に関する制限ルート系 ([10], [8]) を用いて 2 主結果の (Step 1) から (Step 3) に相当するものについて記述を与えていくことを計画している。

(2) s 表現の軌道をモデルとした部分多様体幾何の展開

半単純軌道は擬リーマン部分多様体の構造を持つことから，リーマン幾何学の場合と同様擬リーマン幾何学においてもこれら軌道は幾何学的性質の良い部分多様体の例を与えている。例えば，Geatti-Gorodski は s 表現の正則元（半単純元でその軌道の次元が半単純軌道の中で最も高いもの）を通る軌道が擬リーマンの場合での等径部分多様体になることを明らかにした ([5])。一方で，球面内の austere 部分多様体の具体例としてリーマン対称空間の s 表現を用いた方法が Ikawa-Sakai-Tasaki([7]) によって与えられた。この方法を擬リーマン対称空間の s 表現の場合に拡張することを計画している。austere 部分多様体の概念は擬リーマンの場合でも拡張されており ([6])，擬リーマン対称空間の s 表現に対するある種の軌道がその例を与えることを示すことができた ([3])。よって，それらすべてを分類することを計画している。

参考文献

[1] K. Baba, *Local orbit types of s-representations for exceptional semisimple symmetric spaces*, SUT J. Math. **44** (2008), 307–328.

[2] K. Baba, *Local orbit types of the isotropy representations for semisimple pseudo-Riemannian symmetric spaces*, arxiv:1312.5053.

[3] K. Baba, *On the geometry of the orbits of s-representations for semisimple pseudo-Riemannian symmetric spaces*, in preparation.

[4] M. Berger, *Les espaces symétriques noncompacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), 85–177.

[5] L. Geatti and C. Gorodski, *Polar orthogonal representations of real reductive algebraic groups*, Journal of Algebra **320** (2008), 3036–3061.

[6] Y. Dong, *On Indefinite Special Lagrangian Submanifolds in Indefinite Complex Euclidean spaces*, J. of Geom. and Physics **59** (2009), 710–726.

[7] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 437–481.

[8] T. Oshima and T. Matsuki, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 399–414.

[9] T. Oshima and J. Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Adv. Stud. Math. **4** (1984), 433–497.

[10] T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 331–357.

[11] W. Rossmann, *The structure of semisimple symmetric spaces*, Canad. J. Math. **31** (1979), 157–180.

[12] H. Tamaru, *The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups*, Differential Geom. Appl. **11** (1999), 29–38.