

3次元 Lorentz-Minkowski 空間の 平均曲率 0 曲面の型変化

藤森 祥一 (岡山大学)

2014 年 9 月 5-6 日, 東京理科大学

本稿では Wayne Rossman 氏 (神戸大学), 梅原雅顕氏 (東京工業大学), 山田光太郎氏 (東京工業大学), Seong-Deog Yang 氏 (Korea University) との共同研究 [10] で得られた結果を中心に紹介する.

1 序

M を Riemann 面とする. g を M 上の有理型関数, η を M 上の正則 1 形式で $(1+|g|^2)^2\eta\bar{\eta}$ が M 上の正定値計量を定めるとする. このとき

$$\hat{f} := \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\eta$$

は 3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 の極小曲面 (すなわち平均曲率 0 のはめ込み) を与える. \mathbf{R}^3 の完備な極小曲面は豊富に存在し, その大域的性質について多くの研究が行われている. 一方, 上と同じ M, g, η (ただし $|g|$ は恒等的に 1 ではないとする) に対して

$$f := \operatorname{Re} \int (1 + g^2, i(1 - g^2), 2g)\eta$$

は $(+, +, -)$ 型の 3次元 Lorentz-Minkowski 空間 \mathbf{R}_1^3 への (特異点付き) 空間的極大曲面 (すなわち平均曲率 0 の空間的曲面) を与えることが知られている ([18]). 完備な (特異点のない) 空間的極大曲面は平面に限られることが知られている ([2]) が, ある種の特異点を許容しその上で改めて完備性を定義することで, 完備な例が豊富に存在し大域的に興味深い性質をもつことが分かってきている ([6, 7, 8, 9, 14, 19, 20]).

特に折り目特異点 (fold singularity) と呼ばれる特異点をもつ空間的極大曲面 f は, その折り目特異点を介して時間的極小曲面 (すなわち平均曲率 0 の時間的はめ込み) f^* に実解析的に拡張される ([11, 12, 13, 17, 15]). このとき折り目特異点の集合 (の \mathbf{R}_1^3 への像) を γ で表すと, γ の近くでは

$$(1.1) \quad f \cup \gamma \cup f^*$$

は \mathbf{R}_1^3 へのはめ込みを与えている. このはめ込みを**平均曲率 0 はめ込み**と呼び, 特に (1.1) が埋め込みのときは**平均曲率 0 埋め込み**と呼ぶことにする. 平均曲率 0 埋め込みの例は,

常螺旋面

$$(1.2) \quad \mathcal{H} := \{(x, y, t) \in \mathbf{R}_1^3; x \sin t = y \cos t\}$$

や Scherk 型曲面

$$(1.3) \quad \mathcal{S}_0 := \{(x, y, t) \in \mathbf{R}_1^3; t = \log \cosh x - \log \cosh y\}$$

などが知られている (図 1.1, [18, 3, 15]) が, 非自明な位相をもつ例は知られていなかった.

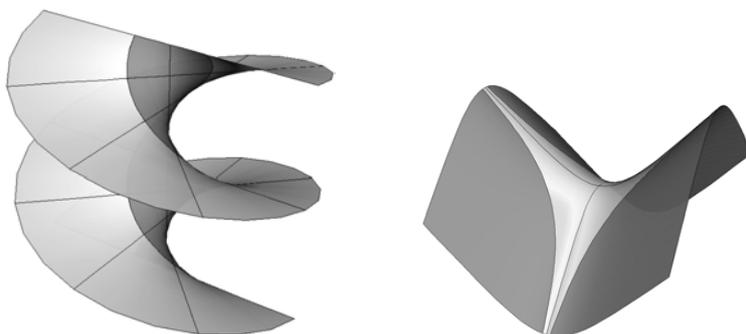


図 1.1: 平均曲率 0 埋め込みの例. 左: 常螺旋面. 右: Scherk 型曲面. 白い部分が空間的極大曲面, 黒い部分が時間的極小曲面に対応している.

我々はまず \mathbf{R}^3 の Schwarz D 曲面という極小曲面をもとに, 折り目特異点のみをもつ \mathbf{R}_1^3 の 3 重周期的空間的極大曲面の 1 径数族を構成した. そしてその折り目特異点を時間的極小曲面に拡張することで, 3 重周期的でその基本ピースが種数 3 の閉曲面と同相, かつ特異点のない平均曲率 0 埋め込みの 1 径数族を構成した (図 1.2). さらにこの 1 径数族の極限として上述の常螺旋面や Scherk 型曲面が得られることも示した.

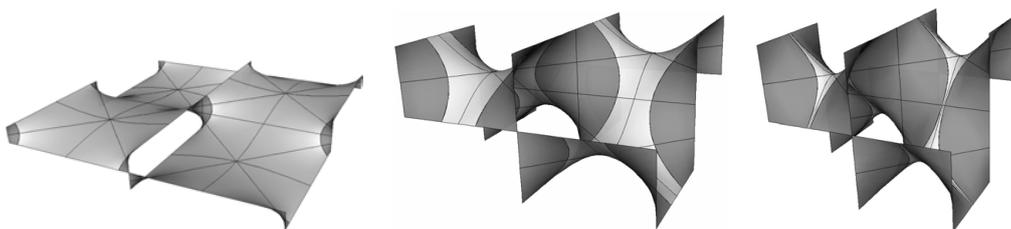


図 1.2: Schwarz D 型の空間的極大曲面を折り目特異点に沿って実解析的に拡張した平均曲率 0 埋め込み. 左: $a = 0.1$, 中央: $a = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2} \approx 0.52$, 右: $a = 0.9$. 白い部分が空間的極大曲面, 黒い部分が時間的極小曲面に対応している.

2 3重周期的極大曲面

2.1 Schwarz P 型, Schwarz D 型の極大曲面族

本節では Schwarz P 曲面や Schwarz D 曲面と呼ばれる \mathbf{R}^3 の 3 重周期的極小曲面の 1 径数族をもとに \mathbf{R}_1^3 の 3 重周期的な空間的極大曲面の 1 径数族を構成する. \mathbf{R}_1^3 の標準座標系として (x, y, t) または (x_1, x_2, x_3) を用いる.

種数 3 のコンパクト Riemann 面 M_a を

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbf{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1\}$$

で定義する. ただし $a \in (0, 1)$ は定数とする. M_a 上の有理型関数 g と正則 1 形式 η_θ を

$$g := z, \quad \eta_\theta := e^{i\theta} \frac{dz}{w}$$

で定める. ただし $\theta \in [0, \pi)$ は定数とする.

$$(2.1) \quad \hat{f}_{a,\theta} := \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\eta_\theta.$$

とおくと $\hat{f}_{a,\theta}$ は \mathbf{R}^3 の極小曲面を定める. 特に $a = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$ のとき, すなわち $a^4 + a^{-4} = 14$ のとき, $\hat{f}_{a,0}, \hat{f}_{a,\pi/2}$ はそれぞれ **Schwarz P 曲面**, **Schwarz D 曲面** という 3 重周期的極小曲面である. また, $a \in (0, 1)$ に対して $\hat{f}_{a,0}, \hat{f}_{a,\pi/2}$ はそれぞれ **Schwarz P 族**, **Schwarz D 族** と呼ばれる 3 重周期的極小曲面の 1 径数族である (図 2.1). Schwarz P 曲面および Schwarz D 曲面の周期については, 庄田敏宏氏 (佐賀大学) のウェブページに詳しい計算がある. (g, η_θ) を $\hat{f}_{a,\theta}$ の **Weierstrass data** という.

一方, 上と同じ M_a, G, η_θ に対して,

$$(2.2) \quad f_{a,\theta} := \operatorname{Re} \int (1 + g^2, i(1 - g^2), 2g)\eta_\theta.$$

とおくと $f_{a,\theta}$ は \mathbf{R}_1^3 の特異点付き空間的極大曲面を定める.

注意 2.1. 一般に C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ に対して, M のある開かつ稠密な部分集合 W が存在して制限写像 f_W が平均曲率 0 の空間的はめ込みを定め, かつ各 $p \in M$ に対して $df(p) \neq 0$ が成り立つとき, f を **極大面** という ([20]). $f_{a,\theta}$ は極大面である.

$f_{a,\theta}$ は M_a 上 well-defined ではないが, \mathbf{R}^3 の Schwarz P, D 曲面と同様の周期計算を行うことで次が得られる.

命題 2.2 ([10]). $b = b(a) := a^4 + a^{-4}$ とおく. $b \in (2, \infty)$ である. また, 各 $a \in (0, 1)$ に

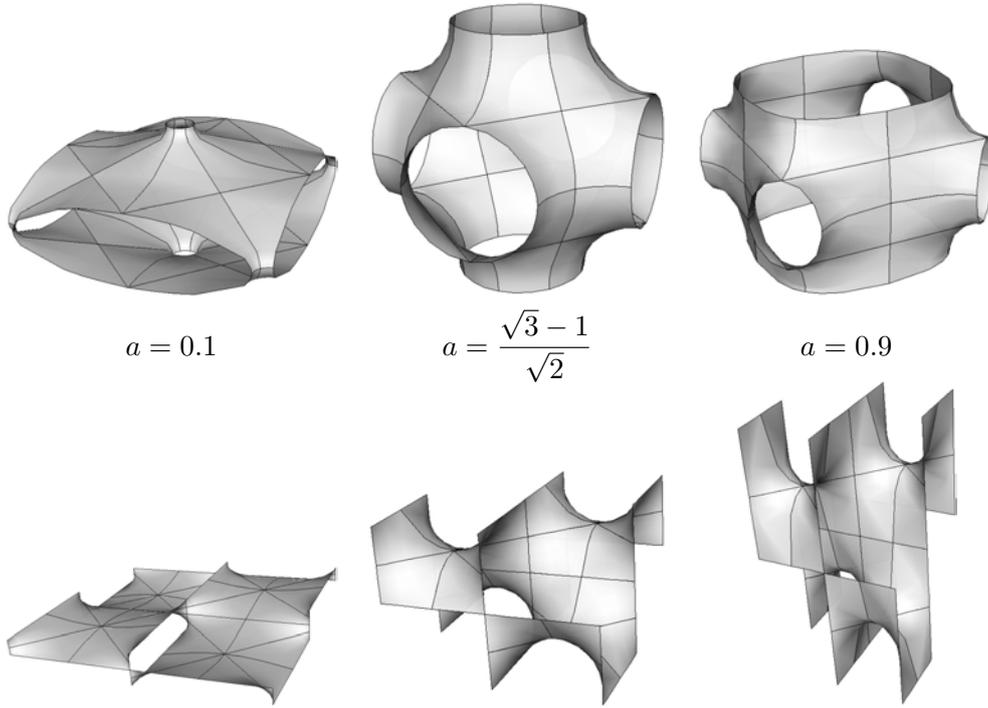


図 2.1: 上: Schwarz P 族. 下: Schwarz D 族.

対して, 正の実数 $q_j(a)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を次で定める.

$$q_1(a) := \int_0^\infty \frac{4ds}{\sqrt{(b+2)s^4 - 2(b-6)s^2 + b+2}},$$

$$q_2(a) := \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + s^2 + (b+2)/16}},$$

$$q_3(a) := \int_0^\infty \frac{4ds}{\sqrt{(b+2)s^4 + 2(b-6)s^2 + b+2}},$$

$$q_4(a) := \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 - s^2 + (b+2)/16}}.$$

さらに $v_j(a), v'_j(a) \in \mathbf{R}_1^3$ ($j = 1, 2, 3$) を

$$v_1(a) := (q_2(a), 0, 0), \quad v_2(a) := (0, q_2(a), 0), \quad v_3(a) := (0, 0, q_1(a)),$$

$$v'_1(a) := (q_4(a), 0, q_3(a)), \quad v'_2(a) := (0, q_4(a), q_3(a)), \quad v'_3(a) := (0, -q_4(a), q_3(a))$$

で定め,

$$\Lambda_a := \left\{ \sum_{j=1}^3 m_j v_j(a); m_j \in \mathbf{Z} \right\}, \quad \Lambda'_a := \left\{ \sum_{j=1}^3 m_j v'_j(a); m_j \in \mathbf{Z} \right\},$$

とおく. このとき, $f_{a,0}, f_{a,\pi/2}$ の実周期はそれぞれ Λ_a, Λ'_a に含まれる. すなわち $f_{a,0}, f_{a,\pi/2}$ はともに 3 重周期的極大曲面である. $f_{a,0}, f_{a,\pi/2}$ をそれぞれ $\mathbf{R}_1^3/\Lambda_1, \mathbf{R}_1^3/\Lambda'_a$ への写像と見なせば $f_{a,0}, f_{a,\pi/2}$ はともに M_a 上 well-defined である (図 2.2).

$f_{a,0}, f_{a,\pi/2}$ はそれぞれ \mathbf{R}^3 の Schwarz P 曲面, Schwarz D 曲面と同じ Weierstrass data から構成されているので, $f_{a,0}$ を Schwarz P 型の極大曲面族, $f_{a,\pi/2}$ を Schwarz D 型の極大曲面族とよぶ.

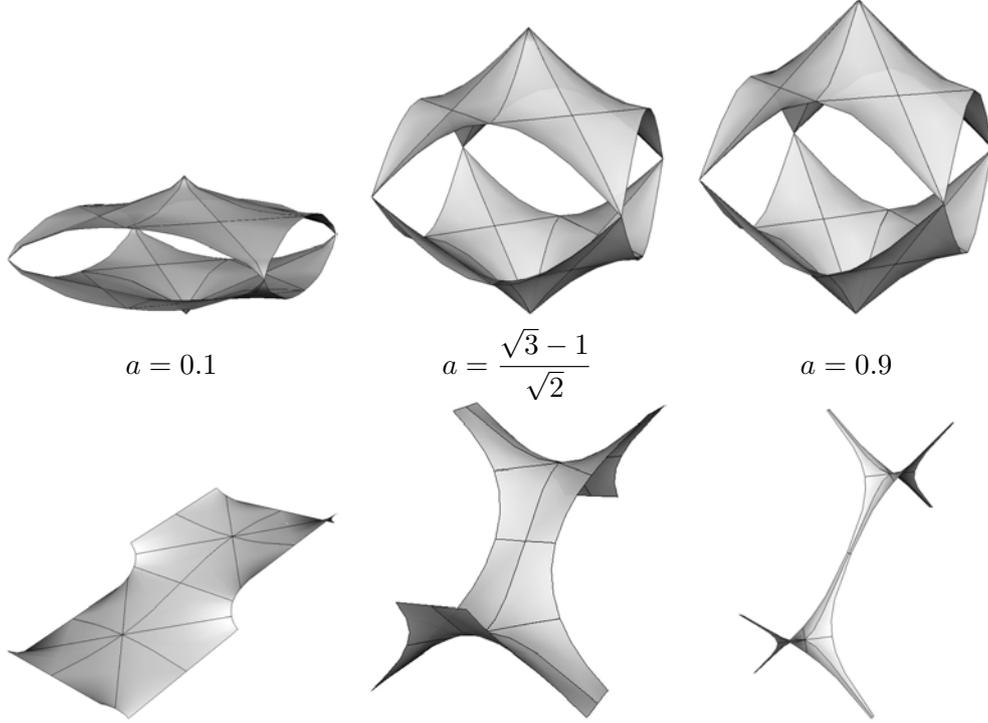


図 2.2: 上: Schwarz P 型の極大曲面族. 下: Schwarz D 型の極大曲面族.

$f_{a,\theta}$ の第 1 基本形式は

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \eta_{\theta} \bar{\eta}_{\theta}$$

で与えられる. $p \in M_a$ が特異点 (すなわち ds^2 が退化する点) であることと, $|g(p)| = 1$ が成り立つことは同値である. さらに特異点 p において $\text{Im}(dg/(g^2\eta)) \neq 0$ が成り立つとき, この特異点はカスプ片であることが知られている ([9, Fact 1.3]). このことから $\theta \neq 0, \pi/2$ ならば任意の $a \in (0, 1)$ に対して $f_{a,\theta}$ の特異点はカスプ片のみであることが分かる. 一方, $\theta = 0$ ならば $f_{a,0}$ の特異点は錐的特異点のみであることが分かる ([9, Lemma 2.3]). また, 錐的特異点をもつ極大曲面に対して, その共役曲面の対応する点は折り目特異点になっている ([16]). よって $f_{a,\pi/2}$ の特異点は折り目特異点のみであることが分かる.

2.2 1 径数族の極限

ここでは前節で構成した Schwarz P 型および D 型の極大曲面の 1 径数族

$$f_{a,0} : M_a \rightarrow \mathbf{R}_1^3/\Lambda_a, \quad f_{a,\pi/2} : M_a \rightarrow \mathbf{R}_1^3/\Lambda'_a, \quad a \in (0, 1)$$

の極限を考察する.

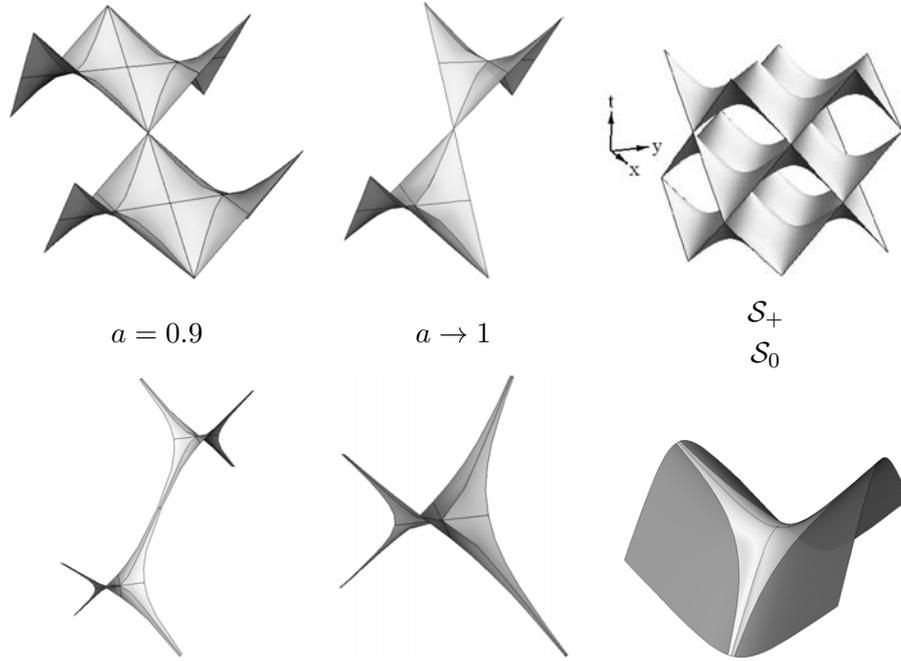


図 2.3: 極限: $a \rightarrow 1$. 上: Schwarz P 型極大曲面. 下: Schwarz D 型極大曲面.

$a \rightarrow 1$ のとき, Riemann 面 M_a は 4 点 $(z, w) = (\pm e^{\pm\pi i/4}, 0)$ を特異点にもつ 2 つの Riemann 球面 $C \cup \{\infty\}$ に崩壊する. そして $f_{a,\theta}$ の極限は $M_1 := (C \cup \{\infty\}) \setminus \{\pm e^{\pm\pi i/4}\}$ 上で定義された

$$g = z, \quad \eta_\theta = \pm e^{i\theta} \frac{dz}{z^4 + 1} \quad (\theta \in [0, \pi))$$

を Weierstrass data とする 2 つの合同な極大曲面になる. $g = z, \eta_\theta = e^{i\theta}(z^4 + 1)^{-1}dz$ を Weierstrass data とする M_1 上の極大曲面を $f_{1,\theta}$ と書くことにすると, $f_{1,0}$ は錐的特異点をもつ 3 重周期的極大曲面で, 4 つのエンド $z = \pm e^{\pm\pi i/4}$ の $f_{1,0}$ による像は光的直線になっている. さらに $f_{1,0}$ は

$$S_+ := \{(x, y, t) \in \mathbf{R}_1^3; \cos t = \cos x \cos y\}$$

で定義される 3 重周期的極大曲面の部分集合と一致する ($f_{1,0}$ を光的直線に沿って実解析的に拡張すると S_+ と一致する. 図 2.3 上). 一方, $f_{1,\pi/2}$ は折り目特異点をもつ M_1 上 well-defined な極大曲面であり, (1.3) で定義される平均曲率 0 埋め込み S_0 ([18, 3]) の空間的曲面の部分に一致する ($f_{1,\pi/2}$ を折り目特異点に沿って実解析的に拡張すると S_0 と一致する. 図 2.3 下).

次に $a \rightarrow 0$ の極限を見るために, まず曲面を $\sqrt{a^4 + a^{-4}}f_{a,\theta}$ と拡大してから $a \rightarrow 0$ とする. このとき Riemann 面 M_a は 2 点 $(z, w) = (0, 0), (\infty, \infty)$ を特異点にもつ 2 つの Riemann 球面 $C \cup \{\infty\}$ に崩壊する. そして $f_{a,\theta}$ の極限は $M_0 := C \setminus \{0\}$ 上で定義された

$$g = z, \quad \eta_\theta = \pm e^{i\theta} \frac{dz}{z^2} \quad (\theta \in [0, \pi))$$

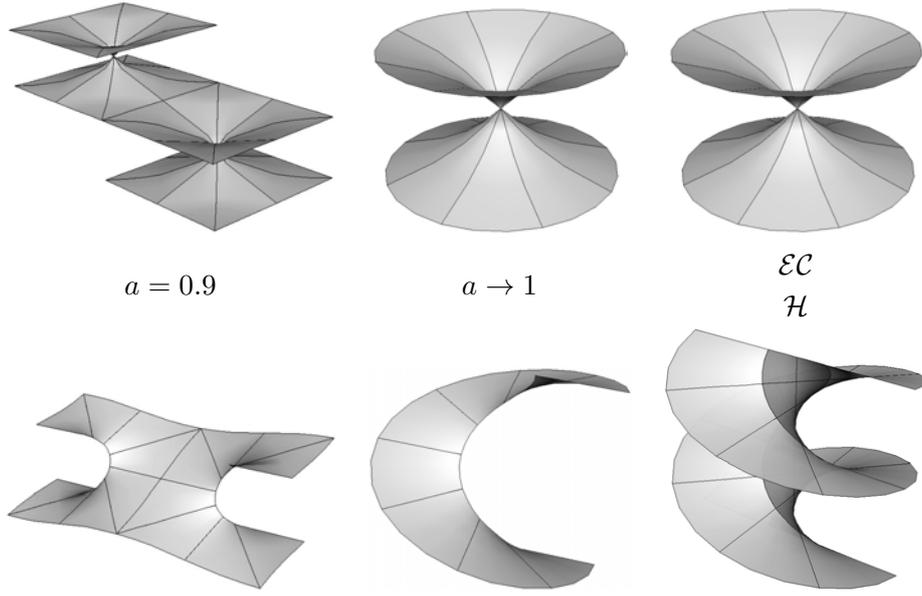


図 2.4: 極限: $a \rightarrow 0$. 上: Schwarz P 型極大曲面. 下: Schwarz D 型極大曲面.

を Weierstrass data とする 2 つの合同な極大曲面になる. $g = z, \eta_\theta = e^{i\theta} z^{-2} dz$ を Weierstrass data とする M_0 上の極大曲面を $f_{0,\theta}$ と書くことにすると, $f_{0,0}$ は錐的特異点をもつ M_0 well-defined な極大曲面で,

$$\mathcal{EC} := \{(x, y, t) \in \mathbf{R}_1^3; \sinh^2 t = x^2 + y^2\}$$

で定義される極大曲面と一致する (図 2.4 上). 一方, $f_{0,\pi/2}$ の極限は折り目特異点をもつ 1 重周期的な極大曲面で, (1.2) で定義される平均曲率 0 埋め込み \mathcal{H} ([18, 3]) の空間的曲面の部分に一致する ($f_{0,\pi/2}$ を折り目特異点に沿って実解析的に拡張すると \mathcal{S}_0 と一致する. 図 2.4 下).

注意 2.3. $f_{1,0}$ を光的直線に沿って解析的に拡張すると, 拡張された部分は時間的曲面ではなく空間的 (極大) 曲面になる. これはいつも成り立つわけではなく, 空間的極大曲面を光的直線に沿って拡張すると時間的極小曲面が得られることもある ([4]).

3 Schwarz D 型極大曲面から平均曲率 0 埋め込みへの実解析拡張

折り目特異点をもつ空間的極大曲面 $f_{0,\pi/2}, f_{1,\pi/2}$ を特異点に沿って実解析的に拡張すると, 拡張された部分は時間的極小曲面となることを前節で見た. 第 1 節で紹介した通り, このことは折り目特異点をもつ空間的極大曲面に関して一般に成り立つ.

そこで本節では, 前節で構成した Schwarz D 型の 3 重周期的極大曲面の 1 径数族 $f_{a,\pi/2}$, $a \in (0, 1)$ (特異点は折り目特異点のみ) を折り目特異点に沿って実解析的に拡張し, それが平均曲率 0 埋め込みになることを見る. 以下記述を簡単にするため, $f_{a,\pi/2}$ を単に f_a と書くことにする.

f_a の微分を直接計算することで次の補題が得られる.

補題 3.1. 次の (1)–(3) が成り立つ.

- (1) $z = t$ ($0 \leq t < 1$) の f_a による像は x_2 -軸に平行な線分である.
- (2) $z = e^{\pi i/4} t$ ($a \leq t < 1$) の f_a による像は直線 $\{x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$ に平行な線分である.
- (3) $z = e^{\pi i/4} t$ ($0 \leq t \leq a$) の f_a による像は平面 $\{x_1 = x_2\}$ と平行なある平面に含まれ, f_a はこの平面に直交する.

f_a の特異点集合は $|z| = 1$ に対応しているから, その f_a による像は光的曲線

$$(3.1) \quad \gamma_a(s) := \int_0^s \xi_a(t) (1, -\cos t, -\sin t) dt, \quad \left(\xi_a(t) := \frac{2}{\sqrt{2 \cos 4t + a^4 + a^{-4}}} \right).$$

で与えられる. ここで

$$\tilde{f}_a(u, v) := \frac{1}{2} (\gamma_a(u+v) + \gamma_a(u-v)),$$

とおくと, \tilde{f}_a は時間的極小曲面で

$$(3.2) \quad \tilde{f}_a(u, 0) = \gamma_a(u),$$

が成り立ち, かつ \tilde{f}_a は $f_{a, \pi/2}$ の実解析的拡張になっている ([5]).

$\tilde{f}_a(u, v)$ は $|v|$ が十分小さければはめ込みになるが, $\partial \tilde{f}_a / \partial u$ と $\partial \tilde{f}_a / \partial v$ を直接計算することで, 特に次が得られる.

補題 3.2. $\tilde{f}_a(u, v)$ は $\mathbf{R} \times (0, \pi)$ 上で (時間的) はめ込みになる.

次の補題も \tilde{f}_a の微分を直接計算することで得られる.

補題 3.3. \tilde{f}_a は以下の直線または線分を含む.

- (1) $\tilde{f}_a(u, \pi/2)$ ($u \in \mathbf{R}$) は x_3 -軸に平行な直線である.
- (2) $\tilde{f}_a(0, v)$ ($0 < v < \pi$) は x_2 -軸に平行な線分である.
- (3) $\tilde{f}_a(\pi/4, v)$ ($0 < v < \pi$) は直線 $\{x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$ に平行な線分である.

\mathbf{R}^3 の極小曲面における鏡像原理と同様に, 空間的極大曲面や時間的極小曲面についても次の鏡像原理が成り立つ.

事実 3.4 (cf. [1, Theorem 3.10], [15, Lemmas 4.1 and 4.2]).

- (1) 空間的極大曲面が空間的直線を含むならば, 曲面はこの直線に関して対称である.
- (2) 空間的極大曲面がある時間的平面に直交しているならば, 曲面はこの平面に関して対称である.

(3) 時間的極小曲面が空間的直線または時間的直線を含むならば, 曲面はこの直線に関して (局所的に) 対称である.

(4) 時間的極小曲面が空間的平面または時間的平面に直交しているならば, 曲面はこの平面に関して (局所的に) 対称である.

今 $\tilde{f}_a(u, 0)$ ($u \in \mathbf{R}$) は折り目特異点であり $\tilde{f}_a(u, \pi/2)$ ($u \in \mathbf{R}$) は直線であるから, 事実 3.4 (3) により $\tilde{f}_a(u, \pi)$ ($u \in \mathbf{R}$) もまた折り目特異点であって, この特異点に沿って \tilde{f}_a を Schwarz D 型極大曲面に実解析的に拡張することができる. また,

$$(3.3) \quad \Omega_a^{\min} := \{\tilde{f}_a(u, v) \in \mathbf{R}_1^3; 0 \leq u \leq \pi/4, 0 < v \leq \pi/2\}$$

とおくと, 補題 3.2 により Ω_a^{\min} は時間的はめ込みであり, その境界 $\partial\Omega_a^{\min}$ は次の 3 つの線分

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A^{\min} &:= \{\tilde{f}_a(0, v) \in \mathbf{R}_1^3; 0 < v \leq \pi/2\}, \\ \mathcal{L}_B^{\min} &:= \{\tilde{f}_a(\pi/4, v) \in \mathbf{R}_1^3; 0 < v \leq \pi/2\}, \\ \mathcal{L}_C^{\min} &:= \{\tilde{f}_a(u, \pi/2) \in \mathbf{R}_1^3; 0 \leq u \leq \pi/4\}, \end{aligned}$$

および特異点集合 $\gamma_a(s)$ ($0 \leq s \leq \pi/4$) からなる. 事実 3.4 により, \tilde{f}_a は Ω_a^{\min} の境界の線分に関する鏡映を繰り返すことによって得られる.

一方,

$$(3.4) \quad \Omega_a^{\max} := \{f_a(z) \in \mathbf{R}_1^3; 0 \leq |z| < 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$$

とおくと Ω_a^{\max} は空間的はめ込みであり, 補題 3.1 および事実 3.4 により f_a は Ω_a^{\max} の (折り目特異点以外の) 境界に関する鏡映を繰り返すことによって得られる.

Ω_a^{\max} の境界 $\partial\Omega_a^{\max}$ は

$$\{z \in \mathbf{C}; 0 \leq |z| < 1, \arg z = 0\} \quad \text{and} \quad \{z \in \mathbf{C}; a \leq |z| < 1, \arg z = \pi/4\},$$

の像に対応する 2 本の線分,

$$\{z \in \mathbf{C}; 0 \leq |z| \leq a, \arg z = \pi/4\},$$

の像に対応する平面曲線, および特異点集合 $\gamma_a(s)$ ($0 \leq s \leq \pi/4$) からなる.

$$(3.5) \quad \Omega_a^1 := \Omega_a^{\max} \cup \{\gamma_a(s); 0 \leq s \leq \pi/4\} \cup \Omega_a^{\min}$$

とおく. Ω_a^{\max} と Ω_a^{\min} とは $\gamma_a(s)$ ($0 \leq s \leq \pi/4$) を通して実解析的に繋がっているので, Ω_a^1 は (平均曲率 0 の) はめ込みであることが分かる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A^{\max} &:= \{f_a(z) \in \mathbf{R}_1^3; 0 \leq |z| < 1, \arg z = 0\}, \\ \mathcal{L}_B^{\max} &:= \{f_a(z) \in \mathbf{R}_1^3; a \leq |z| < 1, \arg z = \pi/4\}, \\ \mathcal{L}_C^{\max} &:= \{f_a(z) \in \mathbf{R}_1^3; 0 \leq |z| \leq a, \arg z = \pi/4\}. \end{aligned}$$

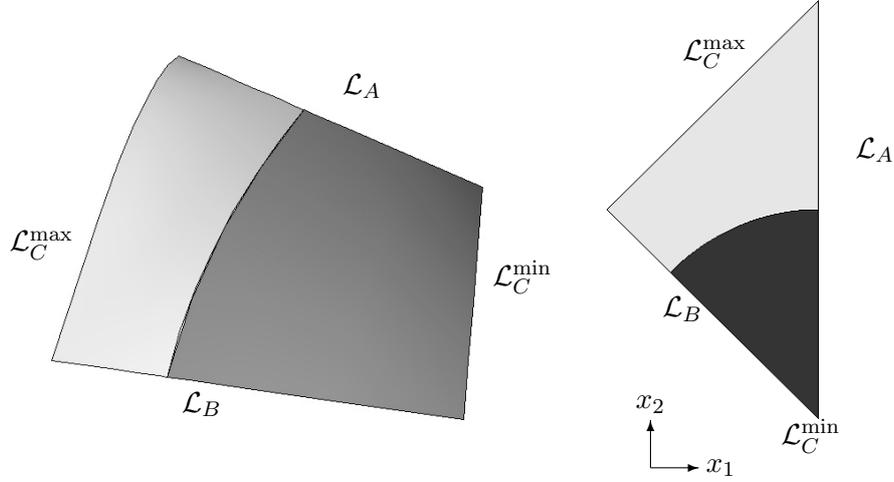


図 3.1: 左: (3.5) で定義された Ω_a^1 . 真ん中の曲線が特異点集合 $\gamma_a(s)$ で, その左側が Ω_a^{\max} , 右側が Ω_a^{\min} . 右: 線分 \mathcal{L}_C^{\min} が 1 点に見えるように別の視点から見た Ω_a^1 . 上側が Ω_a^{\max} , 下側が Ω_a^{\min} .

とおくと補題 3.1 により \mathcal{L}_A^{\max} は x_2 -軸に平行な線分, \mathcal{L}_B^{\max} は

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}_1^3; x_0 = 0, x_1 + x_2 = 0\}$$

に平行な線分であり, \mathcal{L}_C^{\max} は

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}_1^3; x_1 = x_2\}$$

に平行な平面に含まれる.

従って \mathcal{L}_A^{\max} と \mathcal{L}_A^{\min} , および \mathcal{L}_B^{\max} と \mathcal{L}_B^{\min} はそれぞれ同一直線上にある. $\mathcal{L}_A := \mathcal{L}_A^{\max} \cup \mathcal{L}_A^{\min}$, $\mathcal{L}_B := \mathcal{L}_B^{\max} \cup \mathcal{L}_B^{\min}$ とおく. Ω_a^1 の境界 $\partial\Omega_a^1$ の x_1x_2 -平面への射影は直角二等辺三角形になる (図 3.1). この二等辺三角形およびその内部を Δ で表す. また, 線分 \mathcal{L}_C^{\min} の長さを $|\mathcal{L}_C^{\min}|$ で表す.

Ω_a^1 がはめ込みであることはすでに見たが, $\gamma_a(s)$ の x_1x_2 -平面への射影が凸曲線であることと $\gamma_a(s)$ の x_3 -成分が単調増加であることに注意して Ω_a^{\min} および Ω_a^{\max} の振る舞いを詳しく考察すると次の命題を得る.

命題 3.5 ([10, Proposition 3.4]). 各 $a \in (0, 1)$ に対して Ω_a^1 は埋め込みである. さらに Ω_a^1 は底面が Δ で高さが $|\mathcal{L}_C^{\min}|$ の (直角二等辺) 三角柱の閉包に含まれる.

次に Ω_a^1 の平面曲線 \mathcal{L}_C^{\max} による鏡映を考え, Ω_a^1 とその鏡像との和集合を Ω_a^2 で表す (図 3.2). すると Ω_a^2 も埋め込まれており, その境界は 5 本の線分からなる (\mathcal{L}_B とその鏡像は同一直線上にある).

\mathcal{L}_A の鏡像を \mathcal{L}'_A で表す. Ω_a^2 をさらに \mathcal{L}_A および \mathcal{L}'_A に関する鏡映によって 4 倍に拡張し, それらの和集合を Ω_a^8 で表す. すると Ω_a^8 も埋め込まれておりその境界は 4 本の水平 (空間的) な線分および 4 本の垂直 (時間的) な線分, 計 8 本の線分からなる (図 3.3).

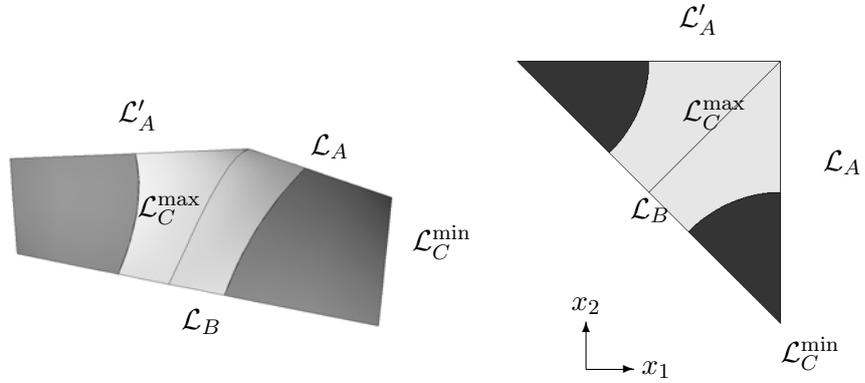


図 3.2: 左: Ω_a^2 , すなわち Ω_a^1 とその \mathcal{L}_C^{\max} に関する鏡像. \mathcal{L}_C^{\max} の右側が元の Ω_a^1 で左側がその鏡像. 白く見える部分が空間的曲面で黒く見える部分が時間的曲面. 右: 別の視点から見た Ω_a^2 . 右下が元の Ω_a^1 で左上がその鏡像.

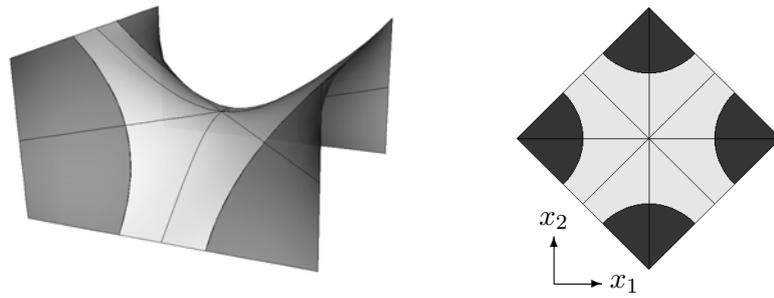


図 3.3: 左: Ω_a^8 , すなわち Ω_a^2 とその \mathcal{L}_A および \mathcal{L}'_A に関する鏡像. 手前が元の Ω_a^2 . 右: 別の視点から見た Ω_a^8 .

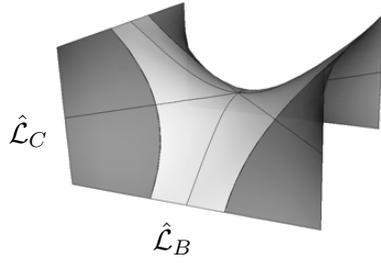


図 3.4: Ω_a^8 および $\hat{\mathcal{L}}_B, \hat{\mathcal{L}}_C$.

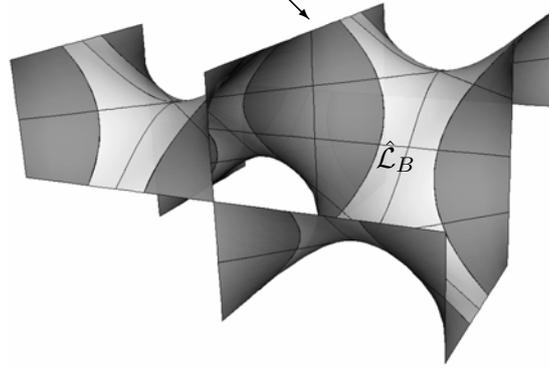


図 3.5: Ω_a^{32} , すなわち Ω_a^8 とその $\hat{\mathcal{L}}_B$ および $\hat{\mathcal{L}}_C$ に関する鏡像.

ここで Ω_a^8 を x_3 -軸のまわりに $\pi/4$ 回転し, x_3 -成分が小さい方の水平な線分 (図 3.1 および図 3.2 で \mathcal{L}_B と書かれている線分) が x_1 -軸と平行になるようにする. すると Ω_a^8 の境界 $\partial\Omega_a^8$ は x_1 -軸と平行な 2 本の線分, x_2 -軸と平行な 2 本の線分および x_3 -軸と平行な 4 本の線分からなる. この中から x_1 -軸と平行な線分の 1 つを $\hat{\mathcal{L}}_B$, x_3 -軸と平行な線分で $\hat{\mathcal{L}}_C$ のとなりにある線分の 1 つを $\hat{\mathcal{L}}_C$ と名付ける (図 3.4).

$\hat{\mathcal{L}}_B$ および $\hat{\mathcal{L}}_C$ の長さをそれぞれ $|\hat{\mathcal{L}}_B|, |\hat{\mathcal{L}}_C|$ で表す. Ω_a^8 を, $\hat{\mathcal{L}}_B$ および $\hat{\mathcal{L}}_C$ に関する鏡映を考えることでさらに 4 倍に拡張し, それらの和集合を Ω_a^{32} で表す. すると Ω_a^{32} は埋め込まれており, さらに Ω_a^{32} は底面が $2|\hat{\mathcal{L}}_B|$ を 1 辺の長さとする正方形, 高さが $2|\hat{\mathcal{L}}_C|$ の直方体の閉包に含まれる (図 3.5).

よって Ω_a^{32} を

$$\left(2\varepsilon_0|\hat{\mathcal{L}}_C|, 2\varepsilon_1|\hat{\mathcal{L}}_B|, 2\varepsilon_2|\hat{\mathcal{L}}_B|\right), \quad \varepsilon_j = \pm 1 \quad (j = 0, 1, 2)$$

だけ平行移動したものは, Ω_a^{32} のある境界の線分に関する鏡像と一致させることができるから, Ω_a^{32} を $\left(2\varepsilon_0|\hat{\mathcal{L}}_C|, 2\varepsilon_1|\hat{\mathcal{L}}_B|, 2\varepsilon_2|\hat{\mathcal{L}}_B|\right)$ ($\varepsilon_j = \pm 1, j = 0, 1, 2$) だけ平行移動したものと Ω_a^{32} は実解析的に繋がる. 従って,

$$\Omega_a := \left\{ \Omega_a^{32} + (2m_0|\hat{\mathcal{L}}_C|, 2m_1|\hat{\mathcal{L}}_B|, 2m_2|\hat{\mathcal{L}}_B|) ; m_0, m_1, m_2 \in \mathbf{Z} \right\} \subset \mathbf{R}_1^3$$

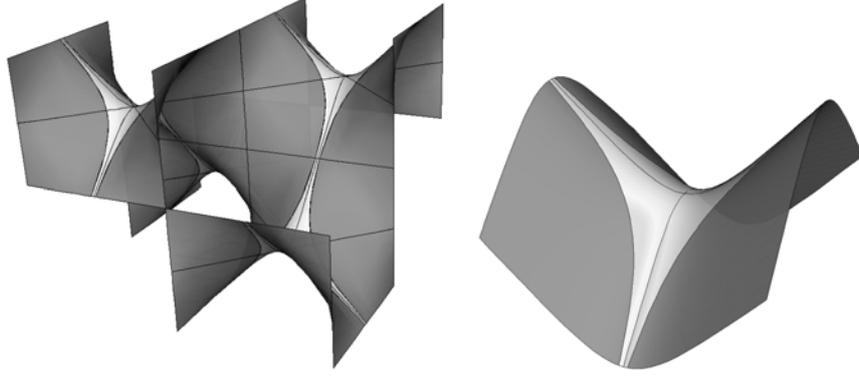


図 3.6: 左: $\Omega_{a=0.9}^{32}$. 右: その極限 $a \rightarrow 1$.

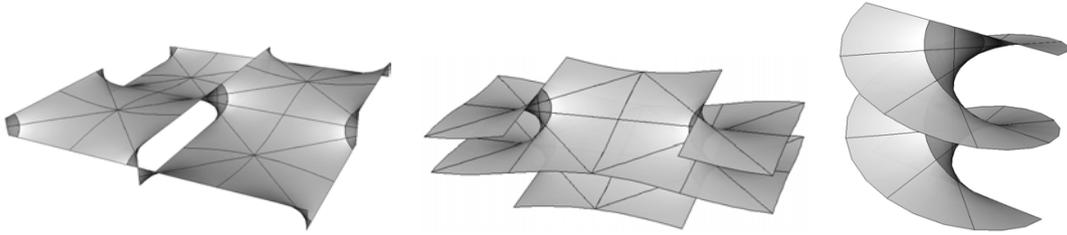


図 3.7: 左: $\Omega_{a=0.1}^{32}$. 中央: 別の視点から見た $\Omega_{a=0.1}^{32}$. 右: その極限 $a \rightarrow 0$.

は \mathbf{R}_1^3 の埋め込まれた 3 重周期的曲面になる. すなわち,

$$\Gamma_a := \left\{ (2m_0|\hat{\mathcal{L}}_C|, 2m_1|\hat{\mathcal{L}}_B|, 2m_2|\hat{\mathcal{L}}_B|) \in \mathbf{R}_1^3; m_0, m_1, m_2 \in \mathbf{Z} \right\} \subset \mathbf{R}_1^3$$

とおくと Ω_a^{32} は \mathbf{R}_1^3/Γ_a 内の埋め込まれた曲面になる. 図 1.2 と図 2.1 の下の図を見比べると Ω_a は \mathbf{R}^3 の Schwarz D 曲面と同相であることがわかるから, Ω_a^{32} を \mathbf{R}_1^3/Γ_a の曲面と見なせばこれは種数 3 の向きづけられた閉曲面と同相である.

最後に Ω_a の極限であるが, 前節の極大曲面のときと同様の考察で, $a \rightarrow 1$ とすると (1.3) の \mathcal{S}_0 と合同な曲面が 2 つ得られ (図 3.6), Ω_a に $\sqrt{a^4 + a^{-4}}$ をかけて拡大してから $a \rightarrow 0$ とすると (1.2) の \mathcal{H} と合同な曲面が 2 つ得られる (図 3.7).

以上をまとめて次の結果を得る.

主定理. Schwarz D 型の極大曲面の 1 径数族 $\{X_a\}_{0 < a < 1}$ を折り目特異点に沿って実解析的に拡張することで, 平均曲率 0 埋め込みの 1 径数族

$$\tilde{X}_a : \Sigma_a \rightarrow \mathbf{R}_1^3/\Gamma_a \quad (0 < a < 1)$$

が得られる. ただし Γ_a は \mathbf{R}_1^3 のある格子で, Σ_a は種数 3 の向きづけられた閉曲面である (図 1.2). さらにこの 1 径数族は (1.3) の \mathcal{S}_0 と (1.2) の \mathcal{H} を極限にもつ.

注意 3.6. 同様の方法で, \mathbf{R}^3 の Schwarz H 曲面と呼ばれる 3 重周期的極小曲面の共役曲面の Weierstrass data

$$M_a := \{(z, w) \in (\mathbf{C} \cup \{\infty\})^2; w^2 = z(z^3 + a^3)(z^3 + a^{-3})\} \quad (0 < a < 1),$$

$$g := z, \quad \eta := i \frac{dz}{w}$$

からも \mathbf{R}_1^3 の平均曲率 0 曲面の 1 径数族が得られる. コンピュータによる実験では, この 1 径数族も全て埋め込まれているように見える (図 3.8 参照).

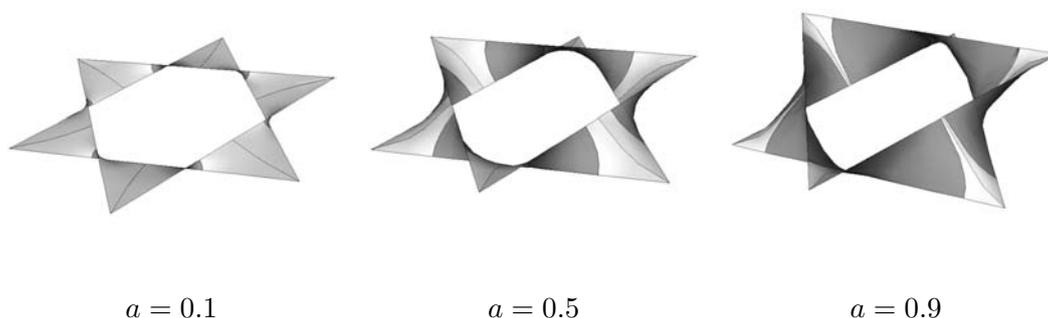


図 3.8: Schwarz H 型の平均曲率 0 曲面.

参考文献

- [1] L. J. Alías, R. M. B. Chaves and P. Mira, *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 289–316.
- [2] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math., **15** (1970), 223–230.
- [3] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in \mathbf{L}^3 containing a light-like line*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), 975–978.
- [4] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, to appear in Osaka Math. J.
- [5] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, to appear in Math. J. Okayama Univ.

- [6] I. Fernández and F. J. López, *Periodic maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^3* , Math. Z., **256** (2007), 573–601.
- [7] I. Fernández, F. J. López, and R. Souam, *The space of complete embedded maximal surfaces with isolated singularities in 3-dimensional Lorentz-Minkowski space L^3* , Math. Ann. **332** (2005), 605–643.
- [8] S. Fujimori and F. J. López, *Nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 311–328.
- [9] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Result. Math. **56** (2009), 41–82.
- [10] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Michigan Math. J. **63** (2014), 189–207.
- [11] C. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta. Math. Sinica. **1** (1985), 173–180.
- [12] C. Gu, *A global study of extremal surfaces in 3-dimensional Minkowski space*, Differential geometry and differential equations (Shanghai, 1985), Lecture Notes in Math. **1255**, Springer (1987), 26–33.
- [13] C. Gu, *Extremal surfaces of mixed type in Minkowski space \mathbf{R}^{n+1}* , Variational methods (Paris, 1988), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **4**, Birkhäuser Boston (1990), 283–296.
- [14] T. Imaizumi and S. Kato, *Flux of simple ends of maximal surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$* Hokkaido Math. J. **37** (2008) 561–610.
- [15] Y. W. Kim, S.-E Koh, H. Shin and S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, J. Korean Math. Soc. **48** (2011), 1083–1100.
- [16] Y. W. Kim and S.-D. Yang, *Prescribing singularities of maximal surfaces via a singular Björling representation formula*, J. Geom. Phys., **57** (2007), no. 11, 2167–2177.
- [17] V. A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izvestiya Math. **67** (2003), 209–224.
- [18] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{L}^3* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.

- [19] O. Kobayashi, *Maximal surfaces with conelike singularities*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 609–617.
- [20] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 13–40.

藤森 祥一

〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1 岡山大学 大学院自然科学研究科

E-mail address: fujimori@math.okayama-u.ac.jp

Website: <http://www.math.okayama-u.ac.jp/~fujimori/>