トーリック超ケーラー多様体に
埋め込まれた
コンパクト特殊ラグランジュ部分多様体

服部　広大

慶應義塾大学

1　特殊ラグランジュ部分多様体

特殊ラグランジュ部分多様体は，カラビ・ヤウ多様体において定義される中間次元実部分多様体で，ホモロジー群の中で体積最小を与える重要なクラスである．複素 m 次元ケーラー多様体 (M,J,ω) の標準束 $K_M=\Lambda^{m,0}T^*M$ が正則な自明化 $\Omega\in H^0(M,K_M)$ をもち，さらにケーラー形式との間で

$$\omega^m=(-1)^{m(m-1)/2}m!\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Big)^m\Omega\wedge\overline{\Omega}$$

という関係が満たされるときに (M,J,ω,Ω) をカラビ・ヤウ多様体と呼ぶ．また，M の実 m 次元部分多様体 L が

$$\omega|_L=\mathrm{Im}\Omega|_L=0$$

を満たすとき，これを特殊ラグランジュ部分多様体と呼ぶ．コンパクトな特殊ラグランジュ部分多様体は，それ自身の定めるホモロジー類の中で体積最小な部分多様体であることが [2] において示されている．

一般のカラビ・ヤウ多様体において特殊ラグランジュ部分多様体を構成することは，いくつか構成が知られているものの，さほど容易ではない．しかし，超ケーラー多様体と呼ばれる，カラビ・ヤウ多様体の特別なクラスに対しては，複素幾何的な方法で容易に構成できることが知られている．超ケーラー多様体とは，実 $4n$ 次元リーマン多様体 (X,g) であって，

$I_1I_2I_3=-1$ を満たす3つの複素構造 I_1,I_2,I_3 をもち，さらに各 $(X,I_\alpha,\omega_\alpha)$ がケーラー多様体となるようなものである．ただし，$\omega_\alpha=g(I_\alpha\cdot,\cdot)$ とする．このとき，$(X,I_1,\omega_1,(\omega_2+\sqrt{-1}\omega_3)^n)$ はカラビ・ヤウ多様体である．超ケーラー多様体の実 $2n$ 次元部分多様体 L は

$$\omega_2|_L=\omega_3|_L=0$$

を満たすとき正則ラグランジュ部分多様体と呼ばれる．特に，このとき L は (X,I_1) の複素部分多様体となる．

正則ラグランジュ部分多様体の定義は，3つのケーラー形式のうちの2つが L 上で消えているということが本質的である．故に，例えば定数 $\theta\in\mathbb{R}$ に対して

$$\omega_1|_L=(-\sin\theta\omega_2+\cos\theta\omega_3)|_L=0$$

を満たすような実 $2n$ 次元部分多様体 L を θ-正則ラグランジュ部分多様体と呼ぶとすると，これは複素多様体 $(X,\cos\theta I_2+\sin\theta I_3)$ の複素部分多様体である．このとき，以下の命題が単純な計算で確かめられる．

命題 1.1. 任意の $k=1,2,\cdots,2n$ に対し，$k\pi/n$-正則ラグランジュ部分多様体は，$(X,I_1,\omega_1,(\omega_2+\sqrt{-1}\omega_3)^n)$ の特殊ラグランジュ部分多様体である．

この命題の逆が成立するかどうかは微妙な問題である．もし成立してしまうと，超ケーラー多様体の中で特殊ラグランジュ部分多様体を構成することは，代数幾何学的な問題に帰着されてしまうことになる．本講演の主結果は，命題 1.1 の逆命題に対する反例の構成である．

定理 1.2. 以下を満たすような実 $4n\geq 8$ 次元トーリック超ケーラー多様体 (X,g,I_1,I_2,I_3) と，その部分多様体 $L_1,L_2,\cdots,L_{2n}$，そしてコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の族 $\{L_t\}_{0<t<\delta}$ が存在する．(i) 各 L_k はコンパクト $k\pi/n$-正則ラグランジュ部分多様体である．(ii) L_k と L_{k+1} は一点で横断的に交わり，L_{2n} と L_1 も一点で横断的に交わる．異なる L_k と L_l が交わるのは，これらの場合に限る．(iii) L_t は $t\to 0$ において $\bigcup_{k=1}^{2n}L_k$ に，カレントの意味で収束する．(iv) L_t いかなる θ に対しても，θ-正則ラグランジュ部分多様体にはなり得ない．

2 Joyceによる貼り合わせの手法

定理1.2の証明は，本質的にはJoyceによって開発された特殊ラグランジュ部分多様体の貼り合わせによる構成法[3][4]を適用することで証明される．本章ではJoyceの結果を復習し，かつ彼の結果を我々の考えたい状況に合わせて記述しなおす.

本章においては以下，(M, J, ω, Ω)を複素m次元カラビ・ヤウ多様体とする．$\iota : L \to M$をラグランジュはめ込みとして，ιは$L \backslash \{p_+, p_-\}$上で埋め込みであり，$\iota(L)$は$\iota(p_+) = \iota(p_-) = p \in M$において横断的に交わるものとする．$L$は連結である必要はないが，向き付けを固定されているとせよ．

定理 2.1 ([3][4]). (J_0, ω_0)を$\mathbb{C}^m$上の標準的なケーラー構造とする．このとき，次の性質を満たす$\mathbb{C}$線形写像$v : T_pM \to \mathbb{C}^m$が存在する; *(i)* vはケーラー構造を保つ同型写像であり，*(ii)* $0 < \varphi_1 \leq \cdots \leq \varphi_m < \pi$かつ

$$\begin{aligned} v \circ \iota_*(T_{x_+}L) &= \mathbb{R}^m = \{(t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{C}^m;\ t_i \in \mathbb{R}\}, \\ v \circ \iota_*(T_{x_-}L) &= \mathbb{R}^m_\varphi = \{(t_1 e^{\sqrt{-1}\varphi_1}, \cdots, t_m e^{\sqrt{-1}\varphi_m}) \in \mathbb{C}^m;\ t_i \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

を満たすような$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$が存在し，*(iii)* vは$\iota_*(T_{x_+}L)$と$\mathbb{R}^m$の向きを保ち，さらに$\varphi_1, \cdots, \varphi_m$の値と$v, \iota_*(T_{x_-}L)$によって誘導される$\mathbb{R}^m_\varphi$の向きは$v$の取り方に依存しない.

この定理に登場する$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$を，$(L, p_+)$と$(L, p_-)$のなす特性角と呼ぶことにする．ここで$\Omega_0 := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$とし，$\iota : L \to M$が特殊ラグランジュはめ込みであると仮定する．すると，定理2.1から導かれる$v : T_pM \to \mathbb{C}^m$は$(ii)$の条件より$v^*\Omega_0 = \Omega_p$を満たすことが分かる．すると，$\iota_*(T_{p_\pm}L)$が特殊ラグランジュ部分空間であることから，ある$k = 1, 2, \cdots m-1$に対して$\varphi_1 + \cdots + \varphi_m = k\pi$が成立する．このとき，$p \in M$は$k$-型の交叉点であると言うことにする．この「型」は$p_+$と$p_-$の順序に依存する．もし順番を逆にしたら，$\pi - \varphi_m, \cdots, \pi - \varphi_1$が特性角となり，$p \in M$は$m-k$-型の交叉点となる．

次に$\mathcal{V} = \{1, \cdots, A\}$とし，$(\mathcal{V}, \mathcal{E}, s, t)$を箙とする．すなわち，$\mathcal{V}$は頂点の集合で，$\mathcal{E}$は有限個の向きづけられた辺の集合，そして$s, t$は$\mathcal{E}$から$\mathcal{V}$への写像であり$s(h)$，$t(h)$はそれぞれ$h \in \mathcal{E}$の出元と出先を表わすものとする．部分集合$S \subset \mathcal{E}$は，$t(h_k) = s(h_{k+1}), t(h_l) = s(h_1)$を任意の$k = 1, \cdots, l-1$に対して満たすような$h_1, h_2, \cdots, h_l$に対して$S = \{h_1, h_2, \cdots, h_l\}$と書け

るとき，サイクルと呼ぶ．任意の $h \in \mathcal{E}$ が $\mathcal{E}$ あるサイクルに含まれるとき，$\mathcal{E}$ はサイクルで覆われているということにする．このような状況で，以下の定理が成り立つ．

定理 2.2 ([3][4])**.** $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, s, t)$ を箙とし，各 $\alpha \in \mathcal{V}$ に対して (M, J, ω, Ω) に埋め込まれた滑らかなコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体 L_α が与えられているとする．各 $h \in \mathcal{E}$ に対して $L_{s(h)}$ と $L_{t(h)}$ はただ 1 点 p において横断的に交わるとし，さらに p は 1-型の交叉点と仮定する．また，$\alpha \neq \beta$ が辺で結ばれていなければ $L_\alpha \cap L_\beta$ は空集合であるとせよ．このとき，もし $\mathcal{E}$ がサイクルで覆われているならば，M のコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の族 $\{\tilde{L}_t\}_{0<t<\delta}$ であって，$t \to 0$ で $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{V}} L_\alpha$ にカレントの意味で収束するようなものが存在する．

この定理は，Joyce によって示された [3] の Theorem 9.7 を箙の言葉を用いて書き換えたものである．定理 1.2 は，この定理をあるトーリック超ケーラー多様体に適用することで得られる．

3　トーリック超ケーラー多様体

ここではトーリック超ケーラー多様体の構成を復習する．まず，$u_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{Z}$ 加群の間の全射準同型写像とし，この写像はリー群の準同型 $\hat{u} : T^d \to T^n$ 及びリー環の準同型 $u : \mathbf{t}^d \to \mathbf{t}^n$ を自然に誘導する．次に $K := \mathrm{Ker}\ \hat{u} \in T^d$ とおき，そのリー環を $\mathbf{k} := \mathrm{Ker}\ u \in \mathbf{t}^d$ とする．$u^* : (\mathbf{t}^n)^* \to (\mathbf{t}^d)^* :$ を u の随伴写像とすると，任意のベクトル空間 V に対して $u^* : V \otimes (\mathbf{t}^n)^* \to V \otimes (\mathbf{t}^d)^*$ が誘導される．ここでは煩雑さを避けるため，同じ記号を使うことにする．

トーラス T^d は，四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^d$ に $(x_1, \cdots, x_d) \cdot (g_1, \cdots, g_d) := (x_1 g_1, \cdots, x_d g_d)$ によって作用する．ただし $x_k \in \mathbb{H}$，$g_k \in S^1$ とする．すると，この作用は $\mathbb{H}^d$ の超ケーラー構造を保ち，超ケーラー運動量写像 $\mu_d : \mathbb{H}^d \to \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (t^d)^*$ が $\mu_d(x_1, \cdots, x_d) = (x_1 i \overline{x_1}, \cdots, x_d i \overline{x_d})$ によって定まる．ただし，$\mathrm{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{H}$ の純虚数たちのなす部分空間とせよ．

次に $\hat{\iota} : K \to T^d$ と $\iota : \mathbf{k} \to \mathbf{t}^d$ を包含写像とし $\mu_K := \iota^* \circ \mu_d : \mathbb{H}^d \to \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes \mathbf{k}^*$ を $\mathbb{H}^d$ 上の K 作用に関する超ケーラー運動量写像とする．このとき，各 $\lambda \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes \mathbf{k}^*$ に対し超ケーラー商 $X(u, \lambda) := \mu_K^{-1}(\iota^*(\lambda))/K$ を得る．このようにして得られる超ケーラー多様体 $X(u, \lambda)$ をトーリック超

ケーラー多様体という．$X(u,\lambda)$ 上の複素構造を $I_{\lambda,1}, I_{\lambda,2}, I_{\lambda,3}$ とし，対応するケーラー形式を $\omega_\lambda = (\omega_{\lambda,1}, \omega_{\lambda,2}, \omega_{\lambda,3})$ と書くことにする．

ここで，$X(u,\lambda)$ はいつでも多様体になるとは限らないが，滑らかな多様体となるための必要十分条件は以下のように記述される．まず $e_1, \cdots, e_d \in \mathbb{R}^d$ を標準基底として，$u_k := u(e_k) \in \mathbf{t}^n$ とおく．そして

$$H_k = H_k(\lambda) := \{y \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^*;\ \langle y, u_k\rangle + \lambda_k = 0\},$$

とおく．ただし，$y = (y_1, y_2, y_3)$ に対して

$$\langle y, u_k\rangle = (\langle y_1, u_k\rangle,\ \langle y_2, u_k\rangle,\ \langle y_3, u_k\rangle) \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\mathbb{H}$$

とする．

定理 3.1 ([1]). $X(u,\lambda)$ が滑らかな多様体となることと，次の $(*1)(*2)$ が成立することは同値である．$(*1)$ $n+1$ 個の元からなる任意の部分集合 $\tau \subset \{1, 2, \cdots, d\}$ に対して，$\bigcap_{k\in\tau} H_k$ は空である．$(*2)$ n 個の元からなる任意の部分集合 $\tau \subset \{1, 2, \cdots, d\}$ に対して，$\bigcap_{k\in\tau} H_k$ が空でないのは $\{u_k;\ k \in \tau\}$ が $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底となるとき，かつその場合に限る．

$\mathbb{H}^d$ 上の T^d 作用は $X(u,\lambda)$ 上の $T^n = T^d/K$ 作用を誘導し，しかもその作用は $X(u,\lambda)$ の超ケーラー構造を保ち，超ケーラー運動量写像 $\mu_\lambda = (\mu_{\lambda,1},\ \mu_{\lambda,2},\ \mu_{\lambda,3}) : X(u,\lambda) \to \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^*$ が

$$u^*(\mu_\lambda([x])) := \mu_d(x) - \lambda,$$

によって定まる．ただし，$[x] \in X(u,\lambda)$ は $x \in \mu_K^{-1}(\iota^*(\lambda))$ を含む同値類である．

4 構成

本章では，あるトーリック超ケーラー多様体 $X(u,\lambda)$ に対して定理 2.2 を用いてコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体を構成する．

定義 4.1. 部分集合 $\triangle \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^*$ は，ある $q \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^*$ に対して

$$V(q,\sigma) := q + \sigma \otimes (\mathbf{t}^n)^*$$

のコンパクト凸部分集合であって，$V(q,\sigma)$ 内での $\triangle$ の境界 $\partial\triangle$ が

$$\partial\triangle = \triangle \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{N} H_k \Big)$$

を満たすとき，σ-デルザントポリトープであるという．

$\sigma = \sigma(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ となるとき，$L_\triangle := \mu_\lambda^{-1}(\triangle)$ は，部分多様体として滑らかであれば常に θ-正則ラグランジュ部分多様体であることが簡単にわかる．$L_\triangle$ 上では T^n 作用が閉じているので，$(L_\triangle, I^\sigma_{\lambda,1}|_{L_\triangle})$ はトーリックケーラー多様体とみなすことができる．このとき，ケーラー形式は $\omega^\sigma_{\lambda,1}|_{L_\triangle}$ であり，$\mu^\sigma_{\lambda,1} : L_\triangle \to (\mathbf{t}^n)^*$ が運動量写像となる．特に $L_\triangle$ は $I^\sigma_{\lambda,1}$ によって自然に向きづけられている．そこで，$\overline{L}_\triangle$ を $L_\triangle$ と微分同相で反対の向きを入れた向きづけられた多様体とする．$X(u,\lambda)$ が滑らかであれば，u と λ は定理 3.1 の $(*1)(*2)$ を満たすので，$\triangle$ が通常のトーリック幾何の意味でのデルザントポリトープであることが容易にわかる．従って，$L_\triangle$ は滑らかなトーリック多様体となる．

定義 4.2. $\alpha = 0, 1$ に対して，$\triangle_\alpha$ は $\sigma(\theta_\alpha)$-デルザントポリトープであるとする．

$$Q(r) := \{(t_1, \cdots, t_n) \in (\mathbf{t}^n)^*;\ t_1 \geq 0, \cdots, t_n \geq 0, t_1^2 + \cdots + t_n^2 < r^2\}$$

とおく．このとき，$\triangle_0 \cap \triangle_1 = \{q\}$ であって

$$\begin{aligned} \psi(\triangle_0 - q) \cap B(r) &= \sigma(\theta_0) \otimes Q(r), \\ \psi(\triangle_1 - q) \cap B(r) &= \sigma(\theta_0 + \theta) \otimes Q(r), \end{aligned}$$

を満たす充分小さな $r > 0$ と $\psi \in GL_n\mathbb{Z}$ 及び $\theta_0 \in \mathbb{R}$ が存在するとき，$\triangle_0$ と $\triangle_1$ は θ の角をなして標準的に交わる，という．ただし $\psi : (\mathbb{Z}^n)^* \to (\mathbb{Z}^n)^*$ は $\mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^* \to \mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^*$ を自然に誘導するものとする．

以上の設定の元で定理 2.2 を適用し，以下の主定理を得る．

定理 4.3. $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, s, t)$ を箙とする．$X(u,\lambda)$ をトーリック超ケーラー多様体，$\{\triangle_k\}_{k\in\mathcal{V}}$ を $\mathrm{Im}\mathbb{H} \otimes (\mathbf{t}^n)^*$ の部分集合の有限族として，各 $\triangle_k$ はある $\theta_k \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma(\theta_k)$-デルザントポリトープであり，任意の $h \in \mathcal{E}$ に対して $\triangle_{s(h)}$ と $\triangle_{t(h)}$ は π/n の角をなして標準的に交わり，そうでなければ $\triangle_{k_1} \cap \triangle_{k_2} = \emptyset$ または $k_1 = k_2$ であると仮定する．さらに，$\mathcal{E}$ はサイクルで覆われているとせよ．このとき，コンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の族 $\{\tilde{L}_t\}_{0<t<\delta}$ で，$\bigcup_{k\in\mathcal{V}} L_{\triangle_k}$ にカレントの意味で収束するものが存在する．

定理 4.4. 定理 4.3 の仮定の下で，$\mathcal{E}$ は空でないとする．*(*もし $\mathcal{E}$ が空であれば，$\tilde{L}_t = \coprod_{k \in \mathcal{V}} L_{\triangle_k}$ となるので定理 4.3 の主張は自明である．*)* このとき，定理 4.3 で得られる $\tilde{L}_t$ はいかなる θ に対しても θ-正則ラグランジュ部分多様体とはなり得ない．

ここまでは，Joyce の結果をトーリック超ケーラー多様体に適用して焼き直しただけである．問題は，定理 4.3 の仮定を満たす筋と，$X(u, \lambda)$ 及び $\{\triangle_k\}_{k \in \mathcal{V}}$ を探してくることである．今のところ，そのような例は手を動かして個々に探すしかない．その結果，実際に存在が確認されたのは以下の例である．

定理 4.5. ある実 $4n$ 次元のトーリック超ケーラー多様体 $X(u, \lambda)$ に埋め込まれた，

$$2n(\mathbb{P}^1)^n \# (S^1 \times S^{2n-1})$$

と微分同相なコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体で，いかなる θ に対しても θ-正則ラグランジュ部分多様体とはなり得ないものが存在する．

定理 4.6. ある実 8 次元のトーリック超ケーラー多様体 $X(u, \lambda)$ に埋め込まれた，$2\mathbb{P}^2 \# 2\overline{\mathbb{P}^2} \# (S^1 \times S^3)$ と微分同相なコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体で，いかなる θ に対しても θ-正則ラグランジュ部分多様体とはなり得ないものが存在する．

定理 4.7. ある実 8 次元のトーリック超ケーラー多様体 $X(u, \lambda)$ に埋め込まれた，

$$(3N + 1)(\mathbb{P}^1)^2 \# N(S^1 \times S^3)$$

と微分同相なコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体で，いかなる θ に対しても θ-正則ラグランジュ部分多様体とはなり得ないものが存在する．

参考文献

[1] Roger Bielawski and A. Dancer. The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, 8(4):727–760, 2000.

[2] Reese Harvey and H. Blaine Lawson. Calibrated geometries. *Acta Mathematica*, 148(1):47–157, 1982.

[3] Dominic Joyce. Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. V. Survey and applications. *J. Differential Geom.*, 63(2):279–347, 2003.

[4] Dominic Joyce. Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. III. Desingularization, the unobstructed case. *Ann. Global Anal. Geom.*, 26(1):1–58, 2004.