3次元ハイゼンベルグ群内の極小曲面について

北海道大学・理学研究院 小林 真平
Shimpei Kobayashi
Department of mathematics, Hokkaido University

序

3次元ハイゼンベルグ群内の極小曲面に対する可積分系の手法を用いた構成法について解説したい．本研究は，ミュンヘン工科大学のドルフマイスター氏と山形大学の井ノ口氏との共同研究に基づく．詳細は参考文献 [5] を参照して頂きたい．

可積分系の手法による曲面からリー群への調和写像の研究は，ウーレンベックによるものがよく知られている [10]．この手法は，アフィン調和写像まで拡張されている [6]．しかしながら一方で，リー群の左不変計量に関しては，調和写像は可積分系の方程式を定めないと考えられている（ウーレンベックの場合はコンパクトリー群の両側不変計量に関する調和性，アフィン調和写像の場合は両側不変接続に関する調和性である）．

本研究では 3 次元ハイゼンベルグ群への等長はめ込みが調和である場合は（つまり極小曲面の場合），双曲面へのある（非等角）調和写像から構成できることを示した（双曲面は対称空間であり，対称空間への調和写像は可積分系を定めることはよく知られている）．この双曲面への写像は正規ガウス写像と呼ばれるものであり，曲面から自然に定まる．ハイゼンベルグ群の曲面が極小であることと，正規ガウス写像が（非等角）調和写像であることが同値であるのは以前から知られていた（井ノ口 [8]，ダニエル [4] 参照）．本研究では，スピノルとディラック方程式による定式化を通じて（タイマノフ [9] 参照），可積分系が自然に現れることを見る．

1　3次元ハイゼンベルグ群内の曲面

3 次元ハイゼンベルグ群 $\mathrm{Nil}_3 = (\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3), \cdot)$ には次のような左不変リーマン計量が入る事が知られている：

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \omega^2.$$

ここで $\omega = dx_3 + \frac{1}{2}(x_2dx_1 - x_1dx_2)$ は接触 1 形式である．従って，(Nil_3, ds^2) は 3 次元リーマン等質接触多様体になる．リーマン面 M から Nil_3 へのはめ込み

$$f : M \to \mathrm{Nil}_3$$

を考え，M 上の等角座標を $z = x+iy$ とする．Nil_3 のリー代数を $\mathfrak{nil}_3$ とし，$\{e_1, e_2, e_3\}$ を自然な基底とする．このとき $f^{-1}\partial_z f$ は複素関数 ϕ_k $(k = 1, 2, 3)$ を用いて $f^{-1}\partial_z f = \sum_{k=1}^{3} \phi_k e_k$ と書ける．f が等角はめ込みということから，ある複素関数 ψ_i $(i = 1, 2)$ が存在して（同時に零にはならない），

$$\phi_1 = (\overline{\psi_2})^2 - \psi_1^2, \ \ \phi_2 = i((\overline{\psi_2})^2 + \psi_1^2), \ \ \phi_3 = 2\psi_1\overline{\psi_2},$$

と書ける．ψ_i $(i = 1, 2)$ を曲面 f の**スピノル**と呼ぶ．曲面の計量を

$$ds^2 = e^u(dx^2 + dy^2)$$

で表す事とする．N を曲面 f に沿う単位法ベクトル場とし，$e^{u/2}f^{-1}N$ を考える．関数 h を

$$h = \langle e^{u/2}f^{-1}N, e_3\rangle$$

で定義し，**支持関数**と呼ぶ（支持関数は法ベクトル場とレーブベクトル場との間の角度を表している）．次に $f^{-1}N$ を考えると，$f^{-1}N$ は $\mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{nil}_3$ への写像と思うことができ，これを立体射影で $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ へ写した写像を g とおき**正規ガウス写像**と呼ぶ.

計量の係数関数 e^u，支持関数 h, 正規ガウス写像 g はスピノル ψ_1, ψ_2 を用いて次のように書く事ができる：

$$e^u = 4(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2, \quad h = 2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2), \quad g = \frac{\psi_2}{\psi_1}.$$

ベルディンスキーはタイマノフによるディラック方程式による曲面の研究（[9] 参照）を発展させてスピノルの満たすべき偏微分方程式系を求めた.

定理 1 ([2]). $\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし $f : \mathbb{D} \to \mathrm{Nil}_3$ を等角はめ込みとする．このとき，$\tilde{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ は次の方程式を満たす：

$$\partial_z\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\tilde{U}, \ \ \partial_{\bar{z}}\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\tilde{V}.$$

ここで

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_z + \frac{1}{2}H_z e^{-w/2+u/2} & -e^{w/2} \\ Be^{-w/2} & 0 \end{pmatrix}, \ \ \tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{B}e^{-w/2} \\ e^{w/2} & \frac{1}{2}w_{\bar{z}} + \frac{1}{2}H_{\bar{z}} e^{-w/2+u/2} \end{pmatrix}$$

である．H は平均曲率で，B はアブレッシュとローゼンバーグによって導入された 2 次微分の係数関数（定数倍は除く，[1] 参照），w は次を満たす複素関数である：

$$e^{w/2} = -\frac{H}{2}e^{u/2} + \frac{i}{4}h.$$

注意 1.

1. アブレッシュとローゼンバーグは，Nil_3 内の平均曲率一定曲面に対して，2 次微分 Bdz^2 が正則 2 次微分になることを示した（一般に，より広いクラスの 3 次元等質多様体の平均曲率一定曲面に対して同様の事を示した）.
2. 定理の偏微分方程式系の $\partial_z \tilde{\psi}$ の第 2 列目と $\partial_{\bar{z}} \tilde{\psi}$ の第 1 列目はタイマノフの一連の研究における“ ディラック方程式 ”であり，$e^{w/2}$ は“ ディラックポテンシャル ”と呼ばれる：

$$\partial_z \psi_2 = -e^{w/2}\psi_1, \quad \partial_{\bar{z}} \psi_1 = e^{w/2}\psi_2.$$

2　可積分系と 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面

次にモレー・カルタン形式の 1 径数族を考える：

$$\alpha^\lambda := U^\lambda dz + V^\lambda d\bar{z}. \tag{1}$$

ここで

$$U^\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}w_z + \frac{1}{2}H_z e^{-w/2+u/2} & -\lambda^{-1}e^{w/2} \\ \lambda^{-1}Be^{-w/2} & -\frac{1}{4}w_z \end{pmatrix}, \quad V^\lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}w_{\bar{z}} & -\lambda \bar{B} e^{-w/2} \\ \lambda e^{w/2} & \frac{1}{4}w_{\bar{z}} + \frac{1}{2}H_{\bar{z}} e^{-w/2+u/2} \end{pmatrix}.$$

ここで λ は $\mathbb{S}^1$ 上を動くとする．このとき，Nil_3 の極小曲面の特徴付けが得られる.

定理 2 ([5] の定理 5.2). $f : \mathbb{D} \to \mathrm{Nil}_3$ を等角はめ込みとし， 単位法ベクトル場 $f^{-1}N$ は $\mathbb{S}^2$ の上半球に写像しているとする． また α^λ を (1) で定義された 1 形式とする．このとき，次は同値である：

1. f は極小曲面である.
2. $d + \alpha^\lambda$ は $\mathbb{D} \times \mathrm{SU}_{1,1}$ 上の平坦接続の 1 径数族である.
3. 正規ガウス写像 g は 2 次元双曲空間 $\mathbb{H}^2$ への（非等角）調和写像である.

注意 2.

1. 定理の仮定「$f^{-1}N$ は $\mathbb{S}^2$ の上半球に写像する」は，はめ込みの“ 垂直性 ”を用いると幾何学的に述べる事ができるが，簡単のためこのように述べた.
2. *1.* と *3.* の同値性は [8, 4] で得られている．この定理の新しい所は，極小性を平坦接続の 1 径数族を用いて特徴付けしたという事である.

この事から，Nil_3 の中の極小曲面を構成する為に（非コンパクト）対称空間への調和写像の理論を用いる事ができる（リーマン面から対称空間への調和写像のループ群による構成方法は [7] によって知られている）.

注意 3. 極小曲面（$H=0$）の場合に，モレー・カルタン形式の 1 径数族 α^λ から定まる写像 F^λ つまり以下を満たす写像 F^λ を考える：

$$F^{\lambda-1}dF^\lambda = \alpha_\lambda,\ \ F^\lambda(z_*) = \mathrm{id}.$$

U^λ, V^λ の対称性と $F^\lambda(z_*) = \mathrm{id}$ から F^λ が $\mathrm{SU}_{1,1}$ のループ群 $\Lambda\mathrm{SU}_{1,1}$ の元である事がわかる．この F^λ を**拡張動標構**と呼ぶ．拡張動標構 F^λ のパラメータ λ に関する 2 階微分をすることによって，Nil_3 の極小曲面を得る公式が得られる（Sym の公式と呼ばれる [3, 5]）．

参考文献

[1] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.*, **28**:1–28, 2005.

[2] D. A. Berdinskiĭ. Surfaces of constant mean curvature in the Heisenberg group (Russian). *Mat. Tr.*, **13**(2):3–9, 2010. English translation: *Siberian Adv. Math.*, **22**(2):75–79, 2012.

[3] S. Cartier. Surfaces des espaces homogènes de dimension 3. *Thèse de Doctorat, Université Paris-Est Marne-la-Vallée*, 2011. `http://perso-math.univ-mlv.fr/users/cartier.sebastien/`.

[4] B. Daniel. The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):674–695, 2011.

[5] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, *arXiv:1210.7300*, 2012.

[6] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for affine harmonic maps into Lie groups, *preprint*, arXiv:1405.0333.

[7] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, *Comm. Anal. Geom.*, **6**(2):633–668, 1998.

[8] J. Inoguchi. Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Differ. Geom. Dyn. Syst.* (Electronic), **10**:163–169, 2008.

[9] I. A. Taĭmanov, The two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces, *Russian Math. Surverys*, **61**(1):79 – 159, 2006.

[10] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model, *J. Differ. Geom.*, **30** (1989), no. 1, 1–50.