# ヒルベルト空間内の不変超曲面を発する正則化された平均曲率流

小池直之 (東京理科大・理)

## 1. 動機

1980 年代から、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ 内の超曲面、一般に部分多様体を発する平均曲率流の (はめ込みの発展としての) 研究は、Huisken をはじめ、多くの幾何学者により行われている。初期超曲面 (あるいは、初期部分多様体)$f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ を発する平均曲率流 $f_t(: M \hookrightarrow \mathbb{R}^m)$ の短時間における (一意) 存在性を保障するためには、$M$ のコンパクト性、あるいは、$M$ のある ($\mathbb{R}^m$ の等長変換からなる) リー群作用 $G$ による不変性とその作用による軌道空間 $f(M)/G$ のコンパクト性を課さなければならない。一般のリーマン多様体 $\widetilde{M}$ 内の部分多様体を発する平均曲率流の (はめ込みの発展としての) 研究も、Huisken をはじめ、多くの幾何学者により行われている。様々な幾何学量 (これらはテンソル場) の満たす発展方程式は、$M$ および $\widetilde{M}$ の局所座標による幾何学量 (テンソル場) の成分の満たす発展方程式を得ることで遂行される。外の空間がユークリッド空間の場合は、それが線形空間であるため、取扱いがより簡単になる。

(無限次元) ヒルベルト空間 $V$ 内の (無限次元) 部分多様体を発する平均曲率流の研究を行うためには、まず、その部分多様体の平均曲率ベクトル場を定義しなければならない。それは、各法ベクトルに対する形作用素の無限個のスペクトル (=主曲率) のリーゾナブルな或る種の級数和として定義されるべきである。さらに、その部分多様体上の誘導計量に関する測地的閉球体は、パラコンパクトであるが、コンパクトでないため、初期超曲面 (あるいは、初期部分多様体)$f: M \hookrightarrow V$ を発する平均曲率流 $f_t(: M \hookrightarrow V)$ の短時間における (一意) 存在性を保障するためには、$f(M)$ のある ($V$ の等長変換からなる) 無限次元リー群作用 $G$ による不変性とその作用による軌道空間 $f(M)/G$ のコンパクト性を仮定せざるおえない。また、$M$ はヒルベルト多様体であるため、局所座標をとることができない。それゆえ、様々な幾何学量 (これらはベクトルバンドルの切断とみなせる) の満たす発展方程式を、ベクトルバンドルの理論における計算テクニックを用いて求めることにする。

このような背景の下、今回、(可分な) ヒルベルト空間 $V$ 内の正則化可能と呼ばれる超曲面 $f: M \hookrightarrow V$ で、$V$ の等長変換からなる概自由な無限次元ヒルベルトリー群作用 $G \curvearrowright V$ の下で不変であり、かつ、$f(M)/G$ がコンパクトになるようなものを発する正則化された平均曲率流と呼ばれる曲率流を, ある条件下で研究した。また、この研究は、軌道空間 $V/G$(これは、リーマンオービフォールドである) 内のサブオービフォールドを発する平均曲率流の研究に適用することができる。

## 2. 正則化可能な部分多様体

$M$ をヒルベルト多様体, $V$ を (可分な) ヒルベルト空間とし、$f$ を $M$ から $V$ への ($C^\infty$) はめ込みとする。$f$ の形テンソルを $A$ で表す。$f$ が次の 3 条件を満たすとき、$f: M \hookrightarrow V$ は、**固有フレッドホルム部分多様体 (はめ込み)** と呼ばれる：

(i) $f$ の余次元は有限である。

(ii) $f$ の法指数写像 $\exp^\perp$ の単位法ボールバンドルへの制限は固有写像である。

(iii) 法指数写像 $\exp^\perp$ の $T^\perp M$ の各点 $v$ における微分写像 $\exp^\perp_{*v}$ は、フレッドホルム作用素である。
ここで、$T^\perp M$ は $f$ の法バンドルを表す。

ここで、固有フレッドホルム部分多様体の各形作用素はコンパクト作用素になることを注意しておく。この概念は、1989 年に Terng([T]) によって導入された。更に、$f$ の各法ベクトル $v$ に対し、形作用素 $A_v$ の正則化されたトレース $\mathrm{Tr}_r\,A_v$ と $A_v^2$ の通常のトレース $\mathrm{Tr}\,A_v^2$ が存在するとき、$f: M \hookrightarrow V$ は**正則化可能な部分多様体**と呼ばれる。ここで、$\mathrm{Tr}_r\,A_v$ は次のように定義される：

$$\mathrm{Tr}_r\,A_v := \sum_{i=1}^{\infty}(\mu_i^+ + \mu_i^-)$$
$$(\mu_1^- \leq \mu_2^- \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \mu_2^+ \leq \mu_1^+ \,:\, A_v \text{ のスペクトラム })$$

この概念は、2006 年に、Heintze-Liu-Olmos([HLO]) によって導入された。正則化可能な部分多様体 $f: M \hookrightarrow V$ に対し、その**正則化された平均曲率ベクトル場**が次式を満たす法ベクトル場 $H$ として定義される：

$$\langle H, v\rangle = \mathrm{Tr}_r\,A_v \ (\forall\, v \in T^\perp M)$$

ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は、$V$ の内積を表す。また、$H$ のノルム $||H||$ は、**正則化された平均曲率 (関数)** とよばれる。特に、$H=0$ であるとき、 $f: M \hookrightarrow V$ は**極小**であると呼ばれる。一方、ベクトル値関数 $f$ の正則化されたラプラシアン $\triangle_r f$ が、次式によって定義される：

$$\langle \triangle_r f, v\rangle = \mathrm{Tr}_r \langle(\nabla df)(\cdot,\cdot), v\rangle^\sharp \ \ (\forall\, v \in T^\perp M)$$

ここで、$\nabla$ は $f$ による $M$ の誘導計量 $g$ のリーマン接続を表し、$(\cdot)^\sharp$ は 2 次共変テンソル場 $(\cdot)$ の $g$ による $(1,1)$ 次テンソル化を表す。容易に $\triangle_r f = H$ が成り立つことを示すことができる。

**例 2.1.** $G$ を両側不変計量を与えられたコンパクト半単純リー群，$M(\subset G)$ を $G$ 内の埋め込まれた部分多様体とし，$\phi: H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ を $G$ に対する **parallel transport 写像**とする。この写像は、次のように定義される：

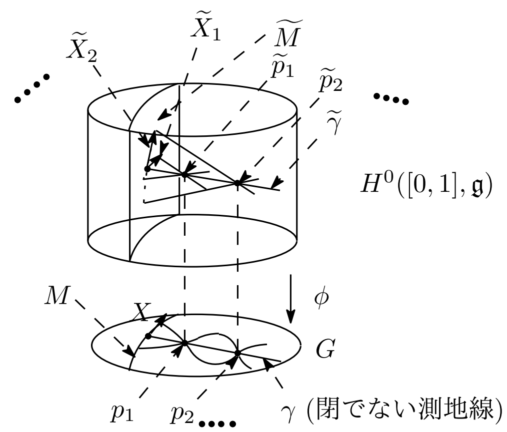
$$\phi(u) := g_u(1) \ \ (u \in H^0([0,1],\mathfrak{g}))$$
$$(\ g_u \in H^1([0,1],G) \ \ \text{s.t.} \ \ \text{“}g_u(0)=e,\, (R_{g_u(t)})_*^{-1}(g_u'(t)) = u(t) \ (\forall\, t \in [0,1])\text{”}\ )$$

ここで、$H^0([0,1],\mathfrak{g})$ は $G$ のリー代数 $\mathfrak{g}$ における $H^0$ 曲線全体のなす (可分な) ヒルベルト空間を表し、$H^1([0,1],G)$ は $G$ における $H^1$ 曲線全体のなすヒルベルトリー群を表す。このとき、$\widetilde{M} := \phi^{-1}(M)$ は $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の正則化可能な部分多様体になることが示される ([HLO] 参照)。$M$ と $\widetilde{M}$ の焦点構造の関係は、図 1 のようになる。$M$ が curvature-adapted(つまり、$R(v)(T_xM) \subset T_xM,\ [A_v, R(v)] = 0\ (\forall\, x \in M, \forall\, v \in T_xM)$) の場合を考える。ここで、$R$ は $G$ の曲率テンソルを表し、$R(v)$ は法ヤコビ作用素 $R(\cdot,v)v$ を表す。この場合、$\widetilde{M}$ の形作用素のスペクトラムは、以下に述べるように $M$ の形作用素と法ヤコビ作用素のスペクトラム達を用いて明確に記述することができる。$M$ の点 $x$ における単位法ベクトル $v$ をとり、$v_u^L$ を $v$ の $u \in \phi^{-1}(x)$ への水平リフトとする。$M$ と $\widetilde{M}$ の形作用素を、各々、$A$ と $\widetilde{A}$ で表すことにする。$D_\lambda^A := \mathrm{Ker}(A_v - \lambda\,\mathrm{id})\ (\lambda \in \mathrm{Spec}\,A_v)$ とし、$D_\mu^R := \mathrm{Ker}(R(v) - \mu\,\mathrm{id})\ (\mu \in \mathrm{Spec}\,R(v))$

とする。このとき、$\operatorname{Spec}\widetilde{A}_{v^L}\setminus\{0\}$ は次によって与えられる：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Spec}\widetilde{A}_{v^L}\setminus\{0\}\\
&=\{\lambda\,|\,\lambda\in\operatorname{Spec}A_v\ \text{s.t.}\ D^A_\lambda\cap D^R_0\neq\{0\}\}\\
&\quad\bigcup\left\{\frac{\mu}{\arctan(\mu/\lambda)+j\pi}\,\middle|\,(\lambda,\mu)\in\operatorname{Spec}A_v\times\operatorname{Spec}R(v)\ \text{s.t.}\ D^A_\lambda\cap D^R_\mu\neq\{0\},\ j\in\mathbb{Z}\right\}\\
&\quad\bigcup\left\{\frac{\mu}{j\pi}\,\middle|\,\mu\in\operatorname{Spec}R(v)\ \text{s.t.}\ D^R_\mu\cap T^\perp_xM\neq\{0\},\ j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}
\end{aligned}$$

([K1] 参照)。また、$\widetilde{M}$ の正則化された平均曲率ベクトル場は、$M$ の平均曲率ベクトル場の水平リフトになることが示される。




$X$ ：焦点 $p_i$ ($i\in\mathbb{N}$) 達の共通の零化空間に属するベクトル

$\widetilde{X}_i$ ($i\in\mathbb{N}$) ：焦点 $\widetilde{p}_i$ の零化空間に属するベクトル
($\widetilde{X}_i$ ($i\in\mathbb{N}$) 達は 1 次独立である)

図 1

## 3. 正則化された平均曲率流

$V$ を (可分な) ヒルベルト空間とし、$f_t : M\hookrightarrow V\,(0\leq t<T)$ を正則化可能な部分多様体の $C^\infty$ 族とする。$f_t$ 達を用いて写像 $F : M\times[0,T)\to V$ を $F(x,t):=f_t(x)$ $((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定義する。$H_t$ を $f_t$ の正則化された平均曲率ベクトル場とし、$F$ に沿うベクトル場 $H$ を $H_{(x,t)}=(H_t)_x$ $((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定義する。次の発展方程式が成り立つとき、$f_t\,(0\leq t<T)$ を**正則化された平均曲率流**と呼ぶ。

$$\frac{\partial F}{\partial t}=H(=(\triangle_t)_rf_t)$$

ここで、$(\triangle_t)_rf_t$ は $f_t$ の正則化されたラプラシアンを表す。一般に、初期データを正則化可能な部分多様体の有界閉領域に制限したとしても、(その有界閉領域はコンパクトでないので) それを発する短時間における正則化された平均曲率流の存在性と一意性を示すことはできない。しかし、以下に述べる状況において、その存在性と一意性が示される。$G\curvearrowright V$ をヒルベルトリー群 $G$ の概自由な等長作用で、その各軌道が極小な正則化可能な部分多様体になるようなものとする。このとき、軌道空間 $V/G$ はリーマンオービフォールドになる。$\phi : V\to V/G$ を $G$ 作用の軌道写像とする。$f : M\hookrightarrow V$

を正則化可能な部分多様体で、$f(M)$ が $G$ 不変、かつ、$(\phi\circ f)(M)$ がコンパクトになるようなものとする。このとき、$f$ を発する正則化された平均曲率流が短時間において (一意的に) 存在することが示される。

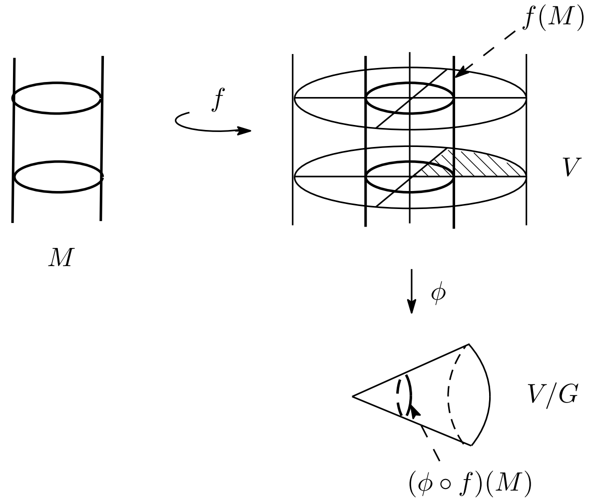



図 2

**例 3.1.** $G$ を両側不変計量を与えられたコンパクト半単純リー群，$K$ を $G$ の閉部分群とし、$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を、各々、$G$, $K$ のリー代数とする。対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が簡約分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ をもつとする。また、$\Gamma$ を $G$ の離散部分群とする。ヒルベルトリー群 $P(G, \Gamma\times K)$ を次のように定義する：

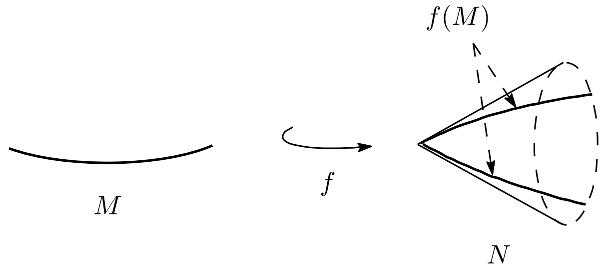
$$P(G, \Gamma\times K) := \{g\in H^1([0,1], G)\,|\,(g(0), g(1))\in\Gamma\times K\}$$

$P(G, \Gamma\times K)$ は $H^0([0,1], \mathfrak{g})$ にゲージ作用の接続への作用として作用する。ここで、$H^0([0,1], \mathfrak{g})$ は $[0,1]$ 上の自明な $G$ バンドルの $H^0$ 接続のなす空間であり、$H^1([0,1], G)$ は $[0,1]$ 上の自明な $G$ バンドルのゲージ変換群であることを注意しておく。この作用は、各軌道が極小な正則化可能な部分多様体になるような概自由な等長作用となり、軌道空間 $H^0([0,1], \mathfrak{g})/P(G, \Gamma\times K)$ は、$\Gamma\backslash G/K$ となる。

# 4. サブオービフォールドを発する平均曲率流

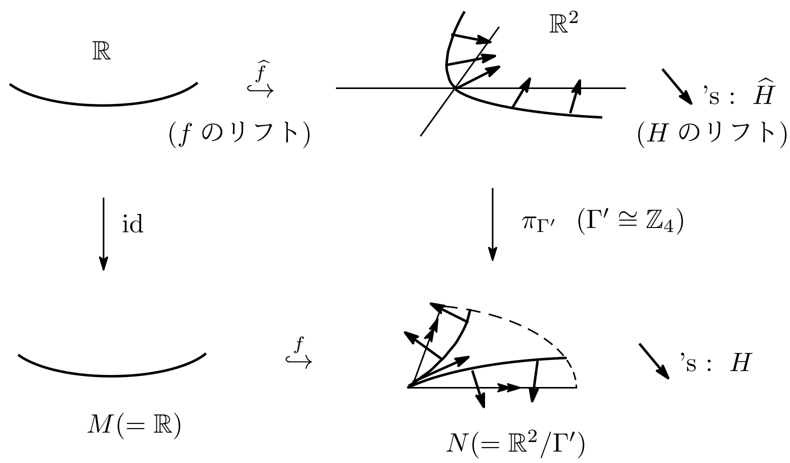
$N$ を $(n+r)$ 次元リーマンオービフォールド，$M$ を $n$ 次元オービフォールドとし、$f: M\hookrightarrow N$ をオービはめ込みとする。$f_t$ $(0\le t<T)$ を $f_0=f$ となるオービはめ込みの $C^\infty$ 族とする。$f_t$ 達を用いて写像 $F: M\times[0,T)\to V$ を $F(x,t) := f_t(x)$ $((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定義する。$H_t$ を $f_t$ の平均曲率オービベクトル場とし、$F$ に沿うベクトル場 $H$ を $H_{(x,t)}=(H_t)_x$ $((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定義する。発展方程式 $\frac{\partial F}{\partial t}=H$ が成り立つとき、$f_t\,(0\le t<T)$ を**平均曲率流**と呼ぶ。

**例 4.1.**



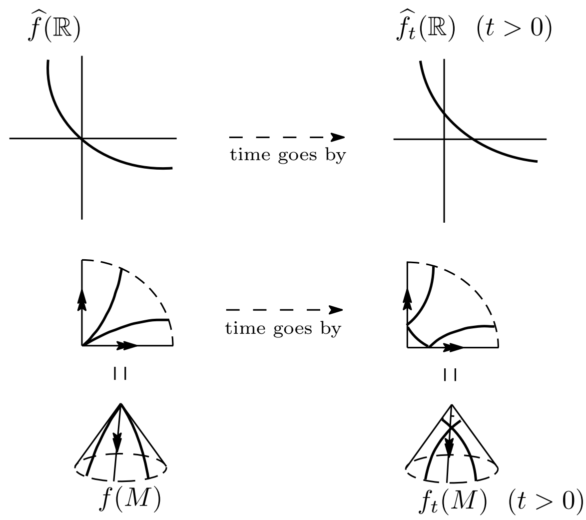
$f(M)$
$M$
$f$
$N$


図 3



$\mathbb{R}$
$\overset{\widehat{f}}{\hookrightarrow}$
($f$ のリフト)
$\mathbb{R}^2$
's : $\widehat{H}$
($H$ のリフト)
id
$\pi_{\Gamma'}$ $(\Gamma' \cong \mathbb{Z}_4)$
$\overset{f}{\hookrightarrow}$
's : $H$
$M(=\mathbb{R})$
$N(=\mathbb{R}^2/\Gamma')$

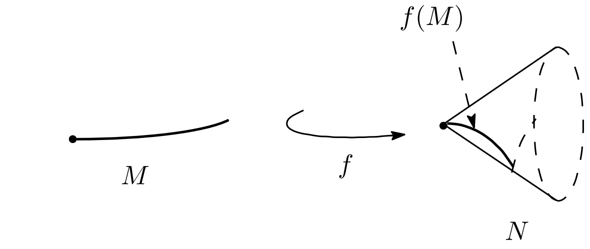

図 4



$\widehat{f}(\mathbb{R})$
$\widehat{f}_t(\mathbb{R})$ $(t>0)$
time goes by
time goes by
$f(M)$
$f_t(M)$ $(t>0)$

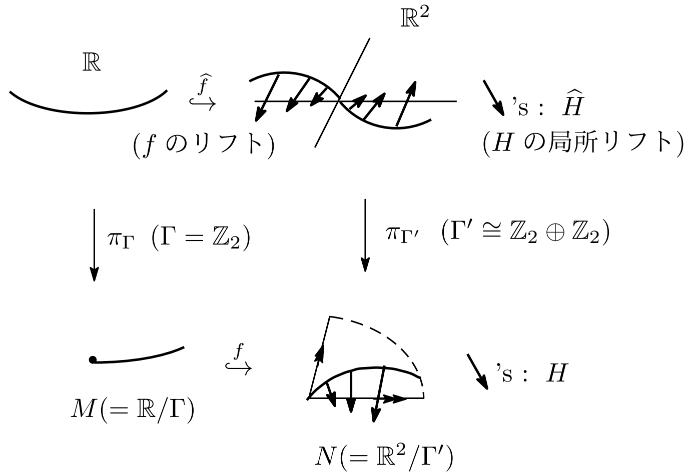

図 5

**例 4.2.**



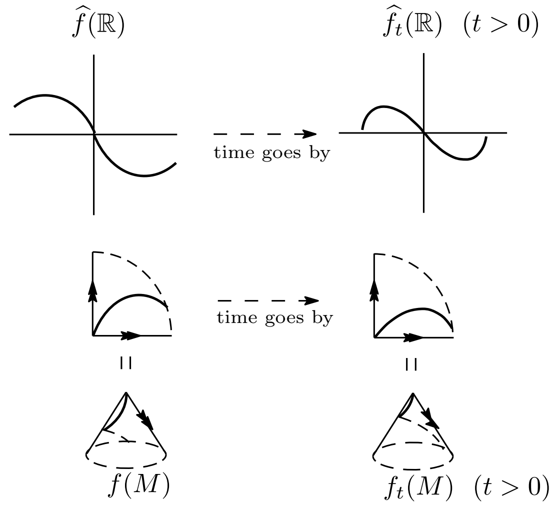
$f(M)$
$M$
$f$
$N$


図 6



$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}$
$\hat{f}$
's : $\widehat{H}$
($f$ のリフト)
($H$ の局所リフト)
$\pi_\Gamma$ $(\Gamma = \mathbb{Z}_2)$
$\pi_{\Gamma'}$ $(\Gamma' \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$
$f$
's : $H$
$M(= \mathbb{R}/\Gamma)$
$N(= \mathbb{R}^2/\Gamma')$


図 7



$\widehat{f}(\mathbb{R})$
$\widehat{f}_t(\mathbb{R})$ $(t > 0)$
time goes by
time goes by
$f(M)$
$f_t(M)$ $(t > 0)$


図 8

$M$ がコンパクトであるとき、任意のオービはめ込み $f:M\hookrightarrow N$ に対し、$f$ を発する平均曲率流が短時間において (一意的に) 存在することが示される。

## 5．正則化された平均曲率流に沿う幾何学量の発展

$G\curvearrowright V$ をヒルベルトリー群 $G$ の概自由な等長作用で、その各軌道が極小な正則化可能な部分多様体になるようなものとする。$\phi:V\to V/G$ を $G$ 作用の軌道写像とする。$f:M\hookrightarrow V$ を正則化可能な部分多様体で、$f(M)$ が $G$ 不変、かつ、$(\phi\circ f)(M)$ がコンパクトになるようなものとし、$f_t:M\hookrightarrow V\,(0\le t<T)$ を、$f$ を発する正則化された平均曲率流とする。$f_t$ を用いて、写像 $F:M\times[0,T)\to V$ を $F(x,t):=f_t(x)\ ((x,t)\in M\times[0,T))$ によって定義する。この節において、正則化された平均曲率流 $f_t$ に沿う基本的な幾何学量が満たす発展方程式を求める。$\pi_M:M\times[0,T)\to M$ を自然な射影とする。$\mathcal{H}_t$ をリーマンオービ沈めこみ $\phi\circ f_t\,(:M\to(\phi\circ f_t)(M))$ の水平分布とし、$\mathcal{H}$ を、$\mathcal{H}_t$ を用いて定義される $TM$ の $\pi$ による誘導バンドル $\pi_M^*(TM)$ の部分バンドルとする。また、$\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}$ を $\pi_M^*(TM)$ から $\mathcal{H}$ への直交射影とする。$\pi_M^*(TM)_{(x,t)}=\{(x,t)\}\times T_xM$ は、$(T_xM)^L_{(x,t)}(\subset T_{(x,t)}(M\times[0,T)))$ と同一視されるので、$\pi_M^*(TM)$ は、$T(M\times[0,T))$ の部分バンドルと見なされる。それゆえ、$\mathcal{H}$ も $T(M\times[0,T))$ の部分バンドルと見なされる。ここで、$\pi_M^*(TM)_{(x,t)}$ は、$T_xM$ とも同一視されることを注意しておく。

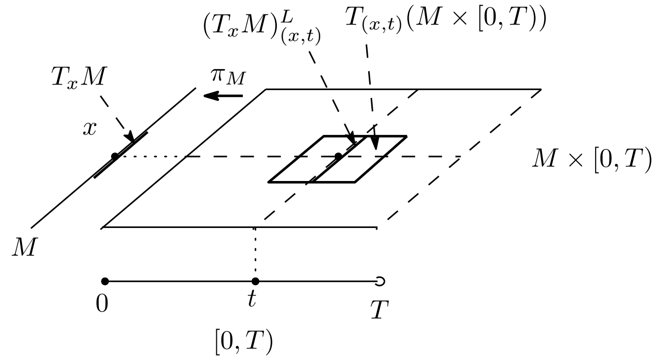



図 9

次に、いくつかの記号を準備することにする。まず、テンソル場に関して、いくつかの記号を準備する。$g_t,\,h_t,\,A_t,\,\xi_t$ を、各々、$f_t$ の誘導計量，第 2 基本形式，形テンソル，および，単位法ベクトル場とし、$g,\,h$ を、各々、$g_t,\,h_t$ を用いて定義される $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$ の切断，$A$ を、$A_t$ を用いて定義される $\pi_M^*(T^{(1,1)}M)$ の切断とし、$\xi$ を $\xi_t$ を用いて定義される $F^*(TV)$ の切断とする。また、$g_{\mathcal{H}},\,h_{\mathcal{H}},\,A_{\mathcal{H}}$ を、各々、$g,h,A$ の水平成分とする。

$$\left(\begin{array}{l} g_{\mathcal{H}}:=g\circ(\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}\times\mathrm{pr}_{\mathcal{H}})\ \text{or}\ g|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}},\\ h_{\mathcal{H}}:=h\circ(\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}\times\mathrm{pr}_{\mathcal{H}})\ \text{or}\ h|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}},\\ A_{\mathcal{H}}:=\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}\circ A\circ\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}\ \text{or}\ (\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}\circ A)|_{\mathcal{H}} \end{array}\right)$$

次に、接続に関して、いくつかの記号を準備する。$\nabla^t$ を $g_t$ のリーマン接続とし、$\pi_M^*(TM)$ の接続

$\nabla$ を、$\nabla^t$ を用いて次のように定義する：

$$(\nabla_X Y)_{(x,t)} := (\nabla^t_X Y)_x,\ \ (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y)_{(x,t)} = \frac{dY_{(x,\cdot)}}{dt}$$
$$(X,\,Y \in \Gamma(\pi_M^*(TM)))$$

ここで、$\frac{dY_{(x,\cdot)}}{dt}$ は、ベクトル値関数 $t \mapsto Y_{(x,t)}\ (\in T_xM)$ の微分を表す。$\mathcal{H}$ の接続 $\nabla^{\mathcal{H}}$ を $\nabla^t$'s を用いて次のように定義する：

$$(\nabla^{\mathcal{H}}_X Y)_{(x,t)} := \mathrm{pr}_{\mathcal{H}_t}((\nabla^t_X Y)_x),\ \ (\nabla^{\mathcal{H}}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y)_{(x,t)} = \frac{dY_{(x,\cdot)}}{dt}$$
$$(X \in \Gamma(\pi_M^*(TM)),\, Y \in \Gamma(\mathcal{H}))$$

$\nabla$ から誘導される $\pi_M^*(T^{(r,s)}M)$ の接続も同じ記号 $\nabla$ で表し、同様に、$\nabla^{\mathcal{H}}$ から誘導される $\mathcal{H}$ の $(r,s)$ 次テンソルバンドル $\mathcal{H}^{(r,s)}$ の接続も同じ記号 $\nabla^{\mathcal{H}}$ で表すことにする。$\nabla$ に関する水平ラプラス作用素 $\triangle_{\mathcal{H}}$ を次のように定義する：

$$(\triangle_{\mathcal{H}} S)_{(x,t)} := \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} S\ \ (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M)))$$
$$((e_1,\cdots,e_n):\ \mathcal{H}_{(x,t)} \text{ の } (g_{\mathcal{H}})_{(x,t)} \text{ に関する正規直交基底})$$

$\nabla^{\mathcal{H}}$ に関する水平ラプラス作用素 $\triangle^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}}$ を次のように定義する：

$$(\triangle^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}})_{(x,t)} := \sum_{i=1}^n \nabla^{\mathcal{H}}_{e_i}\nabla^{\mathcal{H}}_{e_i} S_{\mathcal{H}}\ \ (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M)))$$
$$((e_1,\cdots,e_n):\ \mathcal{H}_{(x,t)} \text{ の } (g_{\mathcal{H}})_{(x,t)} \text{ に関する正規直交基底})$$

次に、リーマンオービ沈めこみの水平分布の積分可能性の障害を表す O'Neill テンソルに関して、いくつかの記号を準備することにする。$\mathcal{A}^\phi$ をリーマンオービ沈めこみ $\phi$ の O'Neill テンソルとし、$\mathcal{A}_t$ をリーマンオービ沈めこみ $\phi\circ f_t$ の O'Neill テンソルとする (O'Neill テンソルの定義については、[O] を参照のこと)。$\mathcal{A}_t$ を用いて定義される $\pi_M^*(T^{(1,2)}M)$ の切断を $\mathcal{A}$ と表すことにする。以下、必要のない限り、記号 $F_*$ と $F_*^{-1}$ を略すことにする。

**命題 5.1.** $g_{\mathcal{H}}$ は次の発展方程式を満たす：

$$\frac{\partial g_{\mathcal{H}}}{\partial t} = -2||H||h_{\mathcal{H}}$$

**命題 5.2.** $\xi$ は次の発展方程式を満たす：

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\mathrm{grad}_g\,||H||$$

**注意** $$\left(\frac{\partial g_{\mathcal{H}}}{\partial t}\right)_{(x_0,t_0)} := \left.\frac{dg_{(x_0,t)}}{dt}\right|_{t=t_0} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} g_{\mathcal{H}}\right)_{(x_0,t_0)},\ \ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{(x_0,t_0)} := \left.\frac{d\xi_{(x_0,t)}}{dt}\right|_{t=t_0}$$
$$\left(\begin{array}{l} g_{(x_0,\cdot)} : [0,T) \to T^{(0,2)}_{x_0}M\ (\text{ベクトル値関数}) \\ \xi_{(x_0,\cdot)} : [0,T) \to V\ (\text{ベクトル値関数}) \end{array}\right)$$

**定理 5.3.** $h_{\mathcal{H}}$ は次の発展方程式を満たす：

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{\mathcal{H}}}{\partial t}(X,Y) = & (\triangle^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}} h_{\mathcal{H}})(X,Y) - 2||H|| h_{\mathcal{H}}(A_{\mathcal{H}}X,Y) + \mathrm{Tr}\left((A_{\mathcal{H}})^2 - (\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2\right) h(X,Y) \\ & -2||H|| g_{\mathcal{H}}((\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2(X),Y) - 2\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} h(\mathcal{A}_{\bullet}X, \mathcal{A}_{\bullet}Y) \\ & +\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} h(\mathcal{A}_{\bullet}(\mathcal{A}_{\bullet}X),Y) + \mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} h(\mathcal{A}_{\bullet}(\mathcal{A}_{\bullet}Y),X) \\ & -\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} h((\nabla_{\bullet}\mathcal{A})_{\bullet}X,Y) - \mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} h((\nabla_{\bullet}\mathcal{A})_{\bullet}Y,X) \\ & -2\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} (\nabla_{\bullet}h)(\mathcal{A}_{\bullet}X,Y) - 2\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}} (\nabla_{\bullet}h)(\mathcal{A}_{\bullet}Y,X) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (X,Y \in \mathcal{H})\end{aligned}$$

**定理 5.4.** $||H||$ は次の発展方程式を満たす：

$$\frac{\partial ||H||}{\partial t} = \triangle_{\mathcal{H}}||H|| + ||H||\mathrm{Tr}(A_{\mathcal{H}})^2 - 3||H||\mathrm{Tr}((\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2)_{\mathcal{H}}$$

**定理 5.3 の証明の概略**　$X \in \Gamma(TM)$ に対し、$\overline{X} \in \Gamma(\pi_M^*(TM))$ を次のように定義する：

$$\overline{X}_{(x,t)} := ((x,t), X_x)\,(= (X_x)^L_{(x,t)})\ \ ((x,t) \in M \times [0,T))$$

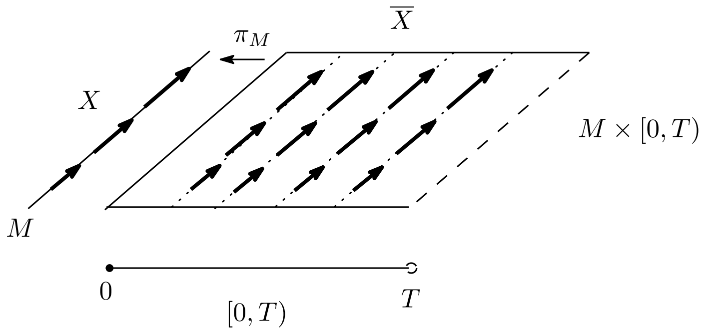



図 10

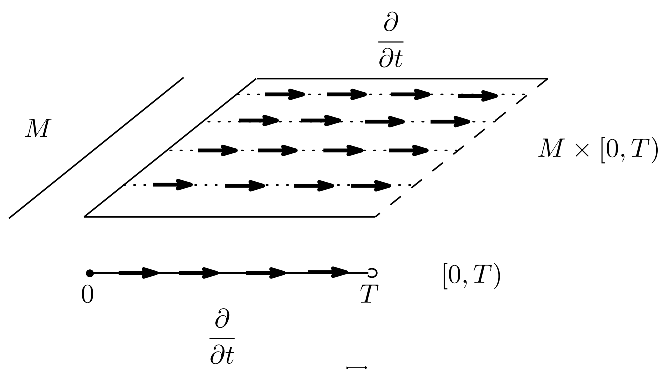



図 11

このとき、次式を示すことができる：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \overline{X}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}, \overline{X}_{\mathcal{H}}\right] = 2||H||\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}\overline{X}_{\mathcal{H}}$$

また、次式を示すことができる：

$$A\overline{X}=A_{\mathcal{H}}\overline{X}+\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}\overline{X},\quad (A^2)_{\mathcal{H}}\overline{X}=(A_{\mathcal{H}})^2\overline{X}-(\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2\overline{X}$$

これらを用いて、次式を導出することができる：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_{\mathcal{H}}}{\partial t}(X,Y)=\frac{\partial}{\partial t}(h_{\mathcal{H}}(\overline{X},\overline{Y}))-h_{\mathcal{H}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\overline{X},\,\overline{Y}\right)-h_{\mathcal{H}}\left(\overline{X},\,\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\overline{Y}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial t}(h_{\mathcal{H}}(\overline{X},\overline{Y}))=\frac{\partial}{\partial t}\langle\xi,\,\bar{X}_{\mathcal{H}}(\bar{Y}_{\mathcal{H}}F)\rangle\\
&=\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial t},\,\bar{X}_{\mathcal{H}}(\bar{Y}_{\mathcal{H}}F)\right\rangle+\left\langle\xi,\,X\left(\bar{Y}_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right)\right\rangle\\
&\quad+\left\langle\xi,\,X\left(\left[\frac{\partial}{\partial t},\overline{Y}_{\mathcal{H}}\right]F\right)\right\rangle+\left\langle\xi,\,\left[\frac{\partial}{\partial t},\overline{X}_{\mathcal{H}}\right](\bar{Y}_{\mathcal{H}}F)\right\rangle
\end{aligned}\tag{5.1}$$

ここで、$V$ が線形空間であることを利用して、比較的簡単に計算処理をしていることを注意しておく。命題 5.2 を用いて、(5.1) の最終辺の第 1 項目は、次のように変形される：

$$\begin{aligned}
&\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial t},\,\bar{X}_{\mathcal{H}}(\bar{Y}_{\mathcal{H}}F)\right\rangle=-\langle\mathrm{grad}_g||H||,\widetilde{\nabla}_XF_*\overline{Y}_{\mathcal{H}}\rangle\\
&=-g(\mathrm{grad}_g||H||,\nabla_X\overline{Y}_{\mathcal{H}})=-d||H||(\nabla_X\overline{Y}_{\mathcal{H}})\\
&=-d||H||(\nabla_X\overline{Y}-\nabla_X\overline{Y}_{\mathcal{V}})\\
&=-d||H||(\nabla_X\overline{Y}-(\nabla_X\overline{Y}_{\mathcal{V}})_{\mathcal{H}})\\
&=-d||H||(\nabla_X\overline{Y}-\mathcal{A}_XY_{\mathcal{V}})=-d||H||(\nabla_X\overline{Y})
\end{aligned}$$

また、(5.1) の最終辺の第 2 項目は、次のように変形される：

$$\begin{aligned}
&\left\langle\xi,\,X\left(\bar{Y}_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right)\right\rangle=\left\langle\xi,\,X\left(\bar{Y}_{\mathcal{H}}(||H||\xi)\right)\right\rangle\\
&=\left\langle\xi,\,X(\bar{Y}_{\mathcal{H}}||H||)\xi-||H||\widetilde{\nabla}_X(A\overline{Y}_{\mathcal{H}})\right\rangle\\
&=X(\overline{Y}_{\mathcal{H}}||H||)-||H||h(X,AY)\\
&=X(\overline{Y}||H||)-||H||h(X,AY)\\
&=X(d||H||(\overline{Y}))-||H||\left(g(A^2_{\mathcal{H}}X,Y)-g((\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2X,Y)\right)
\end{aligned}$$

また、(5.1) の最終辺の第 3 項目は、次のように変形される：

$$\begin{aligned}
&\left\langle\xi,\,X\left(\left[\frac{\partial}{\partial t},\overline{Y}_{\mathcal{H}}\right]F\right)\right\rangle\\
&=\left\langle\xi,\,\widetilde{\nabla}_X\left[\frac{\partial}{\partial t},\overline{Y}_{\mathcal{H}}\right]\right\rangle\\
&=\left\langle\xi,\,\widetilde{\nabla}_X\left(2||H||\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}\overline{Y}_{\mathcal{H}}\right)\right\rangle\\
&=2||H||\left\langle\xi,\,\widetilde{\nabla}_X\left(\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}\overline{Y}_{\mathcal{H}}\right)\right\rangle\\
&=2||H||h(X,\,\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}Y)=2||H||g(AX,\,\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}Y)\\
&=2||H||g(\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}X,\,\mathcal{A}^{\phi}_{\xi}Y)=-2||H||g((\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2X,\,Y)
\end{aligned}$$

これらを (5.1) に代入して、次式を導出することができる：

$$\frac{\partial h_{\mathcal{H}}}{\partial t}(X,Y)=(\nabla d||H||)(X,Y)-||H||g((A_{\mathcal{H}})^2X,Y)-3||H||g((\mathcal{A}^{\phi}_{\xi})^2X,Y)\tag{5.2}$$

一方、Simons 型等式を用いて、次式を導出することができる：

$$(\triangle_{\mathcal{H}}h)(X,Y)=(\nabla d||H||)(X,Y)+||H||g((A_{\mathcal{H}})^2X,Y)-\mathrm{Tr}((A^2)_{\mathcal{H}})h(X,Y)\tag{5.3}$$

また、次式を導出することができる：

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
(\triangle_{\mathcal{H}}h)_{\mathcal{H}}(X,Y) = (\triangle^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}}h_{\mathcal{H}})(X,Y)&\\
-2\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}((\nabla_{\bullet}h)(\mathcal{A}_{\bullet}X,Y)) - 2\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}((\nabla_{\bullet}h)(\mathcal{A}_{\bullet}Y,X))&\\
-\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}h(\mathcal{A}_{\bullet}(\mathcal{A}_{\bullet}X),Y) - \mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}h(\mathcal{A}_{\bullet}(\mathcal{A}_{\bullet}Y),X)&\\
-\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}h((\nabla_{\bullet}\mathcal{A})_{\bullet}X,Y) - \mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}h((\nabla_{\bullet}\mathcal{A})_{\bullet}Y,X)&\\
-2\mathrm{Tr}^{\bullet}_{g_{\mathcal{H}}}h(\mathcal{A}_{\bullet}X,\mathcal{A}_{\bullet}Y)&
\end{aligned}
$$

(5.2), (5.3) および (5.4) から、求めるべき発展方程式を導出することができる。 q.e.d.

# 6．水平的強凸性保存性定理

$G \curvearrowright V$ をヒルベルトリー群 $G$ の概自由な等長作用で、その各軌道が極小な正則化可能な部分多様体になるようなものとする。また、$f: M \hookrightarrow V$ を正則化可能な部分多様体で、$f(M)$ が $G$ 不変、かつ、$(\phi\circ f)(M)$ がコンパクトになるようなものとし、$f_t: M \hookrightarrow V\ (0\leq t<T)$ を、$f$ を発する正則化された平均曲率流とする。以下、前節における記号を用いることにする。$G$ は、次のように $M$ に作用する：

$$G \curvearrowright M \underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f_t(g\cdot x) = g\cdot f_t(x)\ \ (g\in G,\, x\in M)$$

この作用が $t$ によらず一定であることが容易に示される。$g, h, H$ は、この $G$ 作用に関して不変なテンソル場である。定数 $L$ を次式によって定める：

$$L := \sup_{u\in V}\max_{(X_1,\cdots,X_5)\in(\mathcal{H}^{\phi}_1)^5}|\langle\mathcal{A}^{\phi}_{X_1}((\widetilde{\nabla}_{X_2}\mathcal{A}^{\phi})_{X_3}X_4),\, X_5\rangle|$$

ここで、$\mathcal{H}^{\phi}_1$ は $\{X\in\mathcal{H}^{\phi}\mid\ ||X||=1\}$ を表し、$\widetilde{\nabla}$ は $V$ の接続を表す。$L<\infty$ と仮定する。例えば、$V/G$ がコンパクトであるならば、$L<\infty$ となる。命題 5.1,5.2 と定理 5.3,5.4、および、$M$ 上の $G$ 不変な対称 2 次共変テンソル場 (あるいは、$G$ 不変な関数) の $C^{\infty}$ 族に対する最大値原理 ([K3] を参照) を用いて、次の水平的強凸性保存性定理を示すことができる。

**定理 6.1.** $||H_0||^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)} > 2n^2L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)}$ であるならば、$T<\infty$ であり、各 $t\in[0,T)$ に対し、$||H_t||^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,t)} > 2n^2L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,t)}$ が成り立つ。

**注意** 水平分布 $\mathcal{H}_0$ が積分可能であるとき、

$$||H_0||^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)} > 2n^2L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)} \implies (h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)}>0 \iff \mathrm{Spec}\,(A_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)}\subset\mathbb{R}_+$$

となり、定理 6.1 における条件は、$f_0$ が水平的強凸であることを意味する。

$N := V/G$ とし、$n := \dim N - 1$ とする。$N$ に $\phi$ がリーマンオービ沈めこみとなるようなリーマン計量を与える。このとき、$N$ はリーマンオービフォールドになる。$\overline{M}$ を $n$ 次元コンパクトオービフォールド，$\overline{f}: \overline{M}\hookrightarrow N$ をオービはめ込みとし、$\overline{f}_t\ (0\leq t<T)$ を $\overline{f}$ を発する平均曲率流とする。$\overline{g}_t, \overline{h}_t, \overline{H}_t$ を $\overline{f}_t$ の誘導オービ計量、第 2 基本オービ形式、平均曲率オービベクトル場とし、$\overline{\nabla}$ を $N$ のリーマンオービ接続，$\overline{R}$ をその曲率オービテンソルとする。定数 $\overline{L}$ を $\overline{L} := \sup||\overline{\nabla}\,\overline{R}||$ によって定める。$\overline{L}<\infty$ であると仮定する。例えば、$N$ がコンパクトであるならば、$\overline{L}<\infty$ となる。

$\overline{f}_t$ の $\phi$ によるリフトに定理 6.1 を適用することにより、次の強凸性保存性定理を示すことができる。

**定理 6.2.** $||\overline{H}_0||^2\overline{h}_0 > 2n^2\overline{L}\overline{g}_0$ であるならば、$T<\infty$ であり、各 $t\in[0,T)$ に対し、$||\overline{H}_t||^2\overline{h}_t > 2n^2\overline{L}\overline{g}_t$ が成り立つ。

$\overline{L}=2L$ が成り立つ。それゆえ、次の疑問が自然と生ずる。

**疑問**　$\widetilde{\nabla}\mathcal{A}^{\phi}=0 \iff \overline{\nabla}\,\overline{R}=0$ ?

## 7. 今後の研究計画

この節において、今後の研究計画について述べることにする。まず第 1 に、前述の水平的強凸性保存性定理の継続的研究として、次の問題に取り組む予定である。

**問題 1**　$||H_0||_0^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)} > n^2L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)}$ であるならば、$f_t(M)$ は $\phi$ のあるファイバーに崩壊するか？

次に、前述のようなヒルベルトリー群作用 $G\curvearrowright V$ を備えたヒルベルト空間 $V$ 内の不変超曲面に対し、その超曲面を発する**体積を保存する正則化された平均曲率流 (volume-preserving regularized mean curvature flow)** という概念を定義し、次の問題に取り組む予定である。

**問題 2**　$\widehat{f}_t : M\hookrightarrow V$ $(0\le t<T)$ を不変超曲面 $f: M\hookrightarrow V$ を発する体積を保存する正則化された平均曲率流とする。このとき、$f$ が

$$||H||^2h_{\mathcal{H}} > n^2Lg_{\mathcal{H}}$$

を満たすならば、$T=\infty$ であり、$\widehat{f}_t(M)$ は $\phi$ のあるファイバー上の (半径一定の) チューブに収束するか？

また、次の問題に取り組む予定である。

**問題 3**　前述のようなヒルベルトリー群作用 $G\curvearrowright V$ を備えたヒルベルト空間 $V$ 内の (余次元一般の) 不変部分多様体に対し、その不変部分多様体を発する正則化された平均曲率流に関して、類似した研究結果を導出することができるか？

### 参考文献


[AK] A. Adem and M. Klaus, Lectures on orbifolds and group cohomology, Advanced Lectures in Mathematics **16**, Transformation groups and Moduli Spaces of Curves (2010), 1-17.

[BB] J. E. Borzelliono and V. Brunsden, Orbifold homeomorphism and Diffeomorphism groups, Report in International Conference on Infinite Dimensional Lie Groups in Geometry and Representation Theory at Howard University, Washington DC, 2000.

[Ge] C. Gerhart, Curvature Problems, Series in Geometry and Topology, **39**, International Press 2006.

[GKP] P. Gilkey, H. J. Kim and J. H. Park, Eigenforms of the Laplacian for Riemannian $V$-submersions, Tohoku Math. J. **57** (2005) 505-519.

[Ha] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. **17** (1982) 255-306.

[Hu1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Differential Geom. **20** (1984) 237-266.

[Hu2] G. Huisken, Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature, Invent. math. **84** (1986) 463-480.

[HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[HP] G. Huisken and A. Polden, Geometric evolution equations for hypersurfaces, Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, CIME Lectures at Cetraro of 1966 (S. Hildebrandt and M. Struwe, eds.) Springer, 1999.

[K1] N. Koike, On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space, Japan. J. Math. **28** (2002) 61-80.

[K2] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, Asian J. Math. **15** (2011) 101-128.

[K3] N. Koike, The mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space with an almost free group action, arXiv:math.DG/1210.2539v2.

[O'N] B. O'Neill, The fundamental equations of a submersion, Michigan Math. J. **13** (1966) 459-469.

[P] R. S. Palais, Morse theory on Hilbert manifolds, Topology **2** (1963) 299-340.

[PT] R. S. Palais and C. L. Terng, Critical point theory and submanifold geometry, Lecture Notes in Math. **1353**, Springer, Berlin, 1988.

[Sa] I. Satake, The Gauss-Bonnet theorem fro $V$-manifolds, J. Math. Soc. Japan **9** (1957) 464-492.

[Sh] T. Shioya, Eigenvalues and suspension structure of compact Riemannian orbifolds with positive Ricci curvature, Manuscripta Math. **99** (1999) 509-516.

[Th] W. P. Thurston, Three-dimensional geometry and topology, Princeton Mathematical Series 35, Princeton University Press, Princeon, N. J., 1997.

[Te] C. L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geometry **29** (1989) 9-47.

[TT] C.L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, J. Differential Geometry **42** (1995) 665-718.

[Z] X. P. Zhu, Lectures on mean curvature flows, Studies in Advanced Math., AMS/IP, 2002.