例外型対称空間の全測地的曲面

法政大学・理工学部　間下克哉

既約対称空間の，曲率が 0 でない全測地的曲面の分類について考える．

等長変換群が古典型単純リー群である場合については、著者が [5] において，$SU(2)$ の既約表現を用いて分類を完成した．本稿では，例外型コンパクト対称空間において同様の問題に対する試みとして，$G_2/SO(4)$ の曲率が 0 でない全測地的曲面の分類を行う．本稿は，研究究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2014」における著者の講演内容をまとめたものであるが，研究集会と前後して，本稿の分類が [2] においてすでに得られていることを知った．

[2] における分類の記述は，重み付き Dynkin 図形によってのみ与えられているが，本稿では具体的な表示を行っている．この点において，本稿にも多少の存在意義があるのではないかと思う．

1　準備

G をコンパクト単純リー群とし，G のリー環を $\mathfrak{g}$ で表す．

σ を G の上の対合的自己同型とし

$$K = \{k \in G : \sigma(k) = k\},$$
$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\}$$

とおく．

問題は，コンパクト対称空間 $M = G/K$ の，原点 $o = eK$ を通る正曲率の全測地的曲面を， K の作用で移りあうものを除いて分類することである．

S を，コンパクト対称空間 $M = G/K$ の正曲率の全測地的曲面とし，

$$U = \{g \in G : g(S) \subset S\}(\subset G)$$

とする．このとき U のリー環 $\mathfrak{u}$ は 3 次元単純リー環で，$\mathfrak{u}$ の基底 X_1，X_2，X_3 で

$$\begin{cases} X_1 \in \mathfrak{k}, \quad X_2,\ X_3 \in \mathfrak{p}, \\ [X_1, X_2] = 2\,X_3,\ [X_2, X_3] = 2\,X_1,\ [X_3, X_1] = 2\,X_2 \end{cases} \tag{1}$$

を満たすものがとれる．

$\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{m} = \mathbb{R}\,X_2 + \mathbb{R}\,X_3$ は $\mathfrak{p}$ の Lie triple system，即ち $[[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ を満たす部分空間である．よく知られているように，対称空間の全測地的部分多様体は Lie triple system と 1:1 に対応する．

$\mathfrak{a}$ を，$\mathfrak{k}$ の極大可換部分環とするとき，$\mathrm{Ad}(k)(X_1) \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{a}$ となる $k \in K$ が存在する．全測地的曲面 S は，原点 $o = eK$ を通る U の軌道 $S = U \cdot o$である．o を通る $\mathrm{Ad}(K)(U) = k\,U\,k^{-1}$ の軌道 $k\,U \cdot o = K \cdot S$ はだから $X_1 \in \mathfrak{a}$ であると仮定しておいてよい．

$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ で表し，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役線形写像を τ で表す．

$$H = -\sqrt{-1}\,X_1, \quad X = (1/2)\left(-X_2 + \sqrt{-1}\,X_3\right), \quad Y = (1/2)\left(X_2 + \sqrt{-1}\,X_3\right) \tag{2}$$

とおくと

$$\tau(H) = H, \quad \tau(X) = -Y, \quad \tau(Y) = -X, \tag{3}$$

$$\sigma(H) = H, \quad \sigma(X) = -X, \quad \sigma(Y) = -Y, \tag{4}$$

$$[H, X] = 2\,X,\ [H, Y] = -2\,Y,\ [X, Y] = H \tag{5}$$

が成り立つ．

逆に，H，X，Y を，(3)，(4)，(5) を満たす $\tilde{\mathfrak{g}}$ の元とし，X_1，X_2，X_3 を (1) を満たすように定めれば $\mathfrak{u} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ が生成する G の部分群の o を通る軌道は，G/K の正曲率全測地的曲面になる．

2　複素単純リー環の 3 次元単純リー部分環

$\tilde{\mathfrak{g}}$ を複素数半単純リー環とし，$\mathfrak{h}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分環とする．Δ で，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルートの全体を表すことにする．

$\mathfrak{s}$ を，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の 3 次元単純リー部分環とする．H，X，Y を $\tilde{\mathfrak{g}}$ の基底で (5) を満たすものとする．$\mathrm{Int}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の作用により $H \in \mathfrak{h}$ と仮定してよい．

$$\Gamma_H = \{\alpha \in \Delta : \alpha(H) = 2\}$$

とおく．

ルート $\alpha \in \Delta$ に対するルートベクトル X_α をとって，X を，$X = H_0 + \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha X_\alpha$ ($H_0 \in \mathfrak{h}$，$c_\alpha \in \mathbb{C}$) と分解するとき，$[H, X] = 2X$ が成り立つことから，$\alpha \notin \Gamma_H$ ならば $c_\alpha = 0$ である．

$\tilde{\mathfrak{g}}$ の 3 次元単純リー部分環 $\mathfrak{s}$ の元 H に対して

$$[H, X_+] = 2X_+, \quad [H, X_-] = -2X_-, \quad [X_+, X_-] = H$$

を満たす X_+，$X_- \in \mathfrak{s}$ が存在するとき，H を $\mathfrak{s}$ の *defining vector* という．α_1，$\cdots$，α_r を Δ の単純ルートの全体とする．$\mathcal{C} = \{H \in \mathfrak{h} : \alpha_i(H) > 0\ (1 \le i \le r)\}$ とおく．次の定理から $H \in \mathcal{C}$ であると仮定して良い．

Theorem 2.1 $\mathfrak{s}_1$，$\mathfrak{s}_2$ を，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の *3* 次元単純リー部分環とし，H_1，H_2 を，それぞれ $\mathfrak{s}_1$，$\mathfrak{s}_2$ の *defining vector* とする．$\tilde{\mathfrak{g}}_1$ と $\tilde{\mathfrak{g}}_2$ が共役であることと，H_1 と H_2 が共役であることは同値である．

$\tilde{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 図形の α_i に対する頂点に，値 $\alpha_i(H)$ を書き込んだ図形を，リー部分環 $\mathfrak{s}$ の *charactersitic diagram* という．

Theorem 2.2 $\alpha_i(H)$ は 0，1，2 の何れかである．

3　例外型コンパクト単純リー群 G_2

例外型コンパクト単純リー群 G_2 について必要となることを [6] にしたがって簡単にまとめておく．

$\mathcal{C}$ でケイリー代数を表す．e_0 を $\mathcal{C}$ の単位元とし，$\mathcal{C}$ の正規直交基底 $\{e_i : 0 \le i \le 7\}$ を，

$$e_1\,e_2 = e_3,\ e_4\,e_7 = e_3,\ e_5\,e_6 = e_3,\ e_6\,e_4 = e_2,\ e_5\,e_7 = e_2,\ e_4\,e_5 = e_1,\ e_6\,e_7 = e_1$$

を満たすものとする．

ケイリー代数の自己同型群を G_2 で表す．$G_2 \subset SO(7)$ である．

線形写像 $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を，$\gamma(\sum_{i=0}^{7} x_i\, e_i) = \sum_{i=0}^{3} x_i\, e_i - \sum_{i=4}^{7} x_i\, e_i$ により定めると $\gamma \in G_2$ で $\sigma : G_2 \to G_2$ を $\sigma(g) = \gamma \circ g \circ \gamma$ により定めると，σ は G_2 の対合的自己同型である．σ と可換な元全体がなす G_2 のリー部分群は $SO(4)$ に同型である．

i，j を，$0 \leq i, j \leq 7$ を満たす相異なる整数とする．$\mathcal{C}$ の歪対称変換 G_{ij} を

$$G_{ij}(e_j) = e_i, \quad G_{ij}(e_i) = -e_j, \quad G_{ij}(e_k) = 0\ (k \neq i, k \neq j)$$

により定める．

G_2 のリー環を $\mathfrak{g}_2$ で表し，$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}_2 : \sigma(X) = X\}$，$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}_2 : \sigma(X) = -X\}$ とすると $\mathfrak{k}$ は

$$aG_{23} + bG_{45} + cG_{67}, \quad aG_{31} + bG_{46} + cG_{57}, \quad aG_{12} + bG_{47} + cG_{56} \quad (a + b + c = 0)$$

が生成する $\mathfrak{so}(8)$ の部分空間で，$\mathfrak{p}$ は

$$aG_{51} + bG_{73} + cG_{26}, \quad aG_{14} + bG_{72} + cG_{63}, \quad aG_{71} + bG_{42} + cG_{35}, \quad aG_{16} + bG_{34} + cG_{25} \quad (a + b + c = 0)$$

が生成する $\mathfrak{so}(8)$ の部分空間である．

$\mathfrak{k}$ の極大可換部分環

$$\mathfrak{a} = \{\, G_{23} + b\, G_{45} + c\, G_{67}\ :\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a + b + c = 0\}.$$

に対応する G_2 の極大トーラスを T とする．

$\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元 ε_1，ε_2，ε_3 を，$H = \sqrt{-1}(a\, G_{23} + b\, G_{45} + c\, G_{67})$ に対して

$$\varepsilon_1(H) = a, \quad \varepsilon_2(H) = b, \quad \varepsilon_3(H) = c$$

となるものとする．$\mathfrak{h}^*$ に

$$\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\left(\sqrt{-1}\,(2\, G_{23} + 4\, G_{45} - 6\, G_{67})\right) > 0$$

によって半順序を導入する．$\widetilde{\mathfrak{g}}$，$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ の正ルートおよび $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のルートベクトルは以下のとおりである．

$\widetilde{\mathfrak{g}}$ の正ルート:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\,(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,, \quad \alpha_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{3}\,(-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,,$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{3}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)\,, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad 3\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ の正ルート:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\,(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

$\widetilde{\mathfrak{g}}$ のルートベクトル:

$$
\begin{array}{rrcl}
3\alpha_1+2\alpha_2: & X_{3,2} & = & \frac{1}{2}\left\{\ \ (G_{64}-G_{57})+\sqrt{-1}\,(G_{56}-G_{47})\right\}\\
3\,\alpha_1+\alpha_2: & X_{3,1} & = & \frac{1}{2}\left\{\ \ (G_{26}-G_{73})+\sqrt{-1}\,(G_{63}-G_{72})\right\}\\
2\alpha_1+\alpha_2: & X_{2,1} & = & \frac{1}{2}\left\{-(2G_{16}-G_{25}-G_{34})+\sqrt{-1}\,(2\,G_{71}-G_{42}-G_{35})\right\}\\
\alpha_1+\alpha_2: & X_{1,1} & = & \frac{1}{2}\left\{\ \ (2G_{14}-G_{72}-G_{63})+\sqrt{-1}\,(2\,G_{51}-G_{26}-G_{73})\right\}\\
\alpha_1: & X_{1,0} & = & \frac{1}{2}\left\{\ \ (2G_{12}-G_{56}-G_{47})+\sqrt{-1}\,(2\,G_{31}-G_{64}-G_{57})\right\}\\
\alpha_2: & X_{0,1} & = & \frac{1}{2}\left\{-(G_{42}-G_{35})+\sqrt{-1}\,(G_{34}-G_{25})\right\}\\
-\alpha_2: & Y_{0,1} & = & \frac{1}{2}\left\{\ \ (G_{42}-G_{35})+\sqrt{-1}\,(G_{34}-G_{25})\right\}\\
-\alpha_1: & Y_{1,0} & = & \frac{1}{2}\left\{-(2G_{12}-G_{56}-G_{47})+\sqrt{-1}\,(2\,G_{31}-G_{64}-G_{57})\right\}\\
-\alpha_1-\alpha_2: & Y_{1,1} & = & \frac{1}{2}\left\{-(2G_{14}-G_{72}-G_{63})+\sqrt{-1}\,(2\,G_{51}-G_{26}-G_{73})\right\}\\
-2\alpha_1-\alpha_2: & Y_{2,1} & = & \frac{1}{2}\left\{\ \ (2G_{16}-G_{25}-G_{34})+\sqrt{-1}\,(2\,G_{71}-G_{42}-G_{35})\right\}\\
-3\alpha_1-\alpha_2: & Y_{3,1} & = & \frac{1}{2}\left\{-(G_{26}-G_{73})+\sqrt{-1}\,(G_{63}-G_{72})\right\}\\
-3\alpha_1-2\alpha_2: & Y_{3,2} & = & \frac{1}{2}\left\{-(G_{64}-G_{57})+\sqrt{-1}\,(G_{56}-G_{47})\right\}
\end{array}
$$

コンパクト例外型リー群 G_2 のリー環の複素化の 3 次元単純リー部分環は共役を除いて表 1 の 4 つのうちのどれかである．

表 1: $\mathfrak{g}_2$ の 3 次元単純リー部分環

	index	characteristic	def. vector	min.incl. reg. subalg.
I	1	$\overset{0}{\circ}\Lleftarrow\overset{1}{\circ}$	$\sqrt{-1}(G_{45}-G_{67})$	A_1
II	3	$\overset{1}{\circ}\Lleftarrow\overset{0}{\circ}$	$\sqrt{-1}(G_{12}+G_{45}-2G_{67})$	$\widetilde{A}_1$
III	4	$\overset{0}{\circ}\Lleftarrow\overset{2}{\circ}$	$2\sqrt{-1}(G_{45}-G_{67})$	$\widetilde{A}_1+A_1,\ A_2$
IV	28	$\overset{2}{\circ}\Lleftarrow\overset{2}{\circ}$	$2\sqrt{-1}(G_{23}+2G_{45}-3G_{67})$	$\mathfrak{g}_2$

4 $G_2/SO(4)$ の正曲率の全測地的曲面の分類

$G=G_2$，$K=SO(4)$ とする．

4.1 S を $G_2/SO(4)$ の，正曲率の全測地的曲面とし，$U=\{g\in G_2 : G(S)\subset S\}$ とする．X_1，X_2，X_3 を $\mathfrak{u}$ の基底で (1) を満たすものとし，H，X，Y を (2) により定める．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} &= \{H\in\mathfrak{t} : \alpha_1(\sqrt{-1}\,H)\geq 0,\ \alpha_1(\sqrt{-1}\,H)\}\\
\mathcal{C}_{\mathfrak{k}} &= \{H\in\mathfrak{t} : \alpha_1(\sqrt{-1}\,H)\geq 0,\ (3\alpha_1+2\alpha_2)(\sqrt{-1}\,H)\}
\end{aligned}
$$

とおく.

$\mathrm{Ad}(K)$ の作用によって H は $\mathcal{C}_{\mathfrak{k}}$ の元であると仮定してよい. $\mathfrak{t} \setminus \{ H \in \mathfrak{t} : \exists \alpha \in \Delta \text{ s.t. } \alpha(H) = 0 \}$ の, $\mathcal{C}_{\mathfrak{k}}$ に含まれる連結成分はちょうど 3 個ある. そのうちの 1 つは $\mathcal{C}_{\mathfrak{k}}$ である.、
$\mathfrak{g}_2$ のワイル群の元, S_0, S_1, S_2 を

$$\begin{aligned} S_0(aG_{23} + bG_{45} + cG_{67}) &= aG_{23} + bG_{45} + cG_{67} \\ S_1(aG_{23} + bG_{45} + cG_{67}) &= bG_{23} + aG_{45} + cG_{67} \\ S_2(aG_{23} + bG_{45} + cG_{67}) &= -cG_{23} - aG_{45} - bG_{67} \end{aligned}$$

とすると

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} = S_0(\mathcal{C}_{\mathfrak{k}}) \cup S_1(\mathcal{C}_{\mathfrak{k}}) \cup S_2(\mathcal{C}_{\mathfrak{k}})$$

が成り立つ. したがって, H に対して, 表 1 に与えられている definig vector (H' とする) と i $(i = 0, 1, 2)$ があって $H = S_i(H')$ となる.

4.2 $G_2/SO(4)$ の, 正曲率の全測地的部分曲面の分類は, 以下の手順によって行うことができる.

(1) H' を 表 1 に与えられた defining vector のどれかとする.
$\tau(H') = -H'$ および $\sigma(H') = H'$ は満たされている.

(2) $i = 0, 1, 2$ として $H = S_i(H')$ とおく. H に対して, (3), (4) および (5) を満たす X, Y を求める.

(3) (3) で求めた X, Y を用いて $\widetilde{s} = \mathbb{C}H + \mathbb{C}X + \mathbb{C}Y$ とすれば, $\widetilde{s} \cap \mathfrak{g}_2$ が生成する G_2 のリー部分群の, 原点を通る軌道は正曲率の全測地的曲面になる.

(4) 上で求めた, 全測地的曲面が $K = SO(4)$ の作用で移りあうか否かを調べる.

4.3 表 1 の index $= 4$ の場合, すなわち $H' = (G_{45} - G_{67})$ となる場合について考える.
4.3.1 $H = S_0(H')$ とする.
$\alpha(H) = 2$ となる $\alpha \in \Delta$ は, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$ だから

$$\begin{aligned} X &= c_1 X_{0,1} + c_2 X_{1,1} + c_3 X_{2,1} + c_4 X_{3,1}, \\ Y &= c_1' Y_{0,1} + c_2' Y_{1,1} + c_3' Y_{2,1} + c_4' Y_{3,1}, \quad (c_1,\ c_1',\ c_2,\ c_2' \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

とおく.
X, Y の形から (4) は成立しているので, 係数 c_i を, H, X, Y が (3), (5), を満たすように定める.
$\tau(X_{i,j}) = -Y_{i,j}$ だから, (3) が成り立つことは $\overline{c_i'} = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ がなりたつことと同値である.
H, X, Y が (3), (4), (5) を満たすのは, c_i は以下のどれかである.

Case (1) $\overline{c_i'} = c_i$, $|c_1| = |c_4| = 2$, $c_2 = c_3 = 0$,

Case (2) $\overline{c_i'} = c_i$, $|c_1| = |c_3| = 1$, $c_2 = c_4 = 0$,

Case (3) $\overline{c_i'} = c_i$, $|c_2| = |c_4| = 1$, $c_1 = c_3 = 0$,

上の 3 つの場合の何れに対しても, (2) を満たすように X_2, X_3 を定めると, $\mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ は Lie triple system になる.

Case (1), 即ち $|c_1| = |c_4| = 2$, $c_2 = c_3 = 0$ から定めた Lie triple system は, $c_1 = c_4 = 2$, $c_2 = c_3 = 0$ から定めた Lie triple system と $\mathrm{Ad}(K)$ の作用で移りあう.

Case (2)，Case (3) も同様である．また，Case (2)，Case (3) それぞれに対応する Lie triple system は Ad(K) の作用により移りあう．

4.3.2 $H = S_1(H') = S_2(H') = \sqrt{-1}\,(2(G_{23} - G_{67}))$ とする．

$\alpha(H) = 2$ となる $\alpha \in \Delta$ は，$-\alpha_2$，α_1, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$ だから

$$\begin{aligned} X &= c_1 Y_{0,1} + c_2 X_{1,0} + c_3 X_{2,1} + c_4 X_{3,2}, \\ Y &= c_1' X_{0,1} + c_2' Y_{1,0} + c_3' Y_{2,1} + c_4' Y_{3,2}, \quad (c_1,\ c_1',\ c_2,\ c_2' \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

とおく．

$\sigma(X) = -X$，$\sigma(Y) = -Y$ となることと $c_2 = c_4 = c_2' = c_4' = 0$ は同値であり，$\tau(X) = -Y$，$\tau(Y) = -X$ となることと $\overline{c_i'} = c_i$ $(i = 0, \cdots, 3)$ と同値である．

H，X，Y が (3)，(4)，(5)

$$\overline{c_i'} = c_i,\ |c_1| = |c_3| = 1,\ |c_2| = |c_4| = 0$$

の時だけである．この解に対する Lie triple system は，4.3.1 で求めた Case 2 に対するものと Ad(K) で移りあう．

4.4 I，II，IV の definig vector index についても同様に計算することができるが詳細は省略する．

結果をまとめると以下の通りである．

Theorem 4.1 $G_2/SO(4)$ の，曲率が 0 でない全測地的曲面は，次のいずれかが生成する *Lie triple system* に対応する。

$$I \quad \begin{cases} X_2 = -G_{25} + G_{34} \\ X_3 = -G_{24} + G_{53} \end{cases}$$

$$II \quad \begin{cases} X_2 = G_{25} + G_{34} - 2G_{61} \\ X_3 = G_{24} + G_{53} - 2G_{17} \end{cases}$$

$$III(i) \begin{cases} X_2 = (G_{42} - G_{35}) + (2G_{16} - G_{25} - G_{34}) \\ X_3 = (G_{25} - G_{34}) - (2G_{71} - G_{42} - G_{35}) \end{cases}$$

$$III(ii) \begin{cases} X_2 = \sqrt{2}(G_{35} - G_{42}) + \sqrt{2}(G_{26} - G_{73}) \\ X_3 = \sqrt{2}(G_{25} - G_{34}) + \sqrt{2}(G_{72} - G_{63}) \end{cases}$$

$$IV \quad \begin{cases} X_2 = \sqrt{6}(G_{37} + G_{26} - 2G_{15}) + \sqrt{10}(G_{42} - G_{35}) \\ X_3 = \sqrt{6}(G_{63} + G_{27} - 2G_{41}) + \sqrt{10}(G_{25} - G_{34}) \end{cases}$$

参考文献

[1] D. H. Collingwood and W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.

[2] D. Djokovic, *Classification of nilpotent elements in simple exceptional Lie algebras of inner type and description of their centralizers*, J. algebra, 112(1988), 503-524.

[3] D. Djokovic, *Classification of nilpotent elements in the exceptional exceptional Lie algebras $E_{6(6)}$ and $E_{6(-26)}$ and description of their centralizers*, J. algebra, 112(1988). 196–207

[4] E. B. Dynkin, *Simisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. (6), (1957), 111–244.

[5] K. Mashimo, *Non-flat totally geodesic surfaces in symmetric spaces of classical type*, a preprint.

[6] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社, 2013.