

複素射影直線から複素 2 次超曲面への正則等長埋め込み

長友康行

1. 序章

本稿では、リーマン多様体から球面への極小はめ込みに関する「高橋の定理」[8] をグラスマン多様体への調和写像に関する定理に拡張したことによって得られるさまざまな結果を紹介することにする。

まず、リーマン多様体から球面への調和写像に関する「高橋の定理」を思い出すことにする。そのために (M, g) をリーマン多様体、 S^{N-1} を $N-1$ 次元球面として S^{N-1} はユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ に単位球面として等長的に埋め込まれていると仮定する。 $\mathbf{R}^N$ の正規直交基底 $e_1, \dots, e_N$ に関する座標関数を $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ とおく。 M から S^{N-1} への写像

$$f: M \rightarrow S^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$$

を考える。簡単のため、写像 f による座標関数の M への引き戻しも $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と書くことにする。このとき、「高橋の定理」は以下のようになる。

定理 1.1. 写像 $f: M \rightarrow S^{N-1}$ に対する次の 2 条件は互いに同値である。

- (1) $f: M \rightarrow S^{N-1}$ は調和写像である。
- (2) M 上のある関数 $h \in C^\infty(M)$ が存在して、任意の $A = 1, \dots, N$ に対して、

$$\Delta x_A = h x_A$$

が成立する。ここで、 Δ は (M, g) のラプラス作用素を表す。

この条件の下、関数 h は $h = e(f)$ をみたす。ただし $e(f)$ は f のエネルギー密度

$$e(f) := |df|^2 = \sum_{i=1}^m |df(e_i)|^2, \quad m = \dim M$$

である。

次にリーマン多様体からグラスマン多様体への写像を問題にする。記号を固定するために、グラスマン多様体の幾何学を復習する。 W を N 次元実、もしくは複素ベクトル空間とし、 W 内の p 次元部分空間からなるグラスマン多様体を $Gr_p(W)$ とおく。 $(W$ が実ベクトル空間のときには W は向きを持つと仮定し、向きを込めた部分空間からなるグラスマン多様体も考えることにするが、記号が煩雑になることを避けるため、区別しないことにする。)

$S \rightarrow Gr_p(W)$ を同語反復ベクトル束とすれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$ は自然に W をファイバーとして持つ階数 N の自明束 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の部分束

とみなせる。したがって、商ベクトル束として、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を得る。

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{i_S} \underline{W} \xrightarrow{\pi_Q} Q \rightarrow 0.$$

本稿では、ベクトル束 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ を 普遍商束 ということにする。

ここで、 W にその係数体に応じて、内積、もしくはエルミート積（簡単のため、以後スカラー積という）を入れる。すると、 $Gr_p(W)$ にはリーマン対称空間としての構造が入るが、さらにベクトル束 $S \rightarrow Gr_p(W)$, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ にもファイバー計量 g_S, g_Q が導入される。また、 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の積接続を利用すれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$, $Q \rightarrow Gr_p(W)$ にも接続が導入されるが、これは標準接続といわれるものと一致する。

球面 S^{N-1} をグラスマン多様体 $Gr_{N-1}(\mathbf{R}^N)$ とみなしたときには、同語反復束 $S \rightarrow S^{N-1}$ は接ベクトル束 $TS^{N-1} \rightarrow S^{N-1}$ であり、普遍商束 $Q \rightarrow S^{N-1}$ は階数1の実自明束である。また、標準埋め込み $S^{N-1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ を考えれば、普遍商束は法ベクトル束ともみなせる。このとき、位置ベクトル $f(x)$ は、普遍商束のリーマン多様体への引き戻し束の切断とみなせることに注意する。

ここで、ベクトル束の第2基本形式を定義しよう。ベクトル空間 W のスカラー積を用いて定義されるベクトル束としての準同型を $\pi_S : \underline{W} \rightarrow S$, $i_Q : Q \rightarrow \underline{W}$ とおく。前者は直交射影であり、後者は $S \rightarrow Gr_p(W)$ の $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ における直交補空間をとることにより得られる $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$ の部分束 $S^\perp \rightarrow Gr_p(W)$ と普遍商束を同一視することにより得られる。

さて、 $S \rightarrow Gr_p(W)$ の切断 s を $i_S(s)$ と同一視することにより、 W に値をもつ関数とみなし、

$$H(s) := \pi_Q di_S(s)$$

と定義すれば、 H はベクトル束 $\text{Hom}(S, Q)$ に値をもつ1-形式となる。 $H \in \Omega^1(\text{Hom}(S, Q))$ を ベクトル束の第2基本形式 という [5]。同様にして $K := \pi_S di_Q \in \Omega^1(\text{Hom}(Q, S))$ も定義される。また、準同型 $\pi_Q : \underline{W} \rightarrow Q$ により、ベクトル空間 W はまた、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ の切断のなす空間とみなせることに注意する。

つぎに写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられたと仮定する。写像 f により、グラスマン多様体上のベクトル束やその計量、接続、第2基本形式を引き戻すことにする。すると、この誘導接続と M のリーマン計量により、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断に作用するラプラス作用素 Δ が定義される。また、ベクトル空間 W は、引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断のなす集合ともみなせる。

再び球面 S^{N-1} を例にとる。切断 $f(x)$ の微分は接ベクトル束に値をとることを考えれば、 $df = di_Q f = Kf$ である。また、 $\mathbf{R}^N$ の内積 $(\cdot, \cdot)$ を利用すれば、 $x_A = (e_A, f(x))$ なので、座標関数の引き戻しは引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ の切断 $x_A f(x)$ と同一視される。このようにして、「高橋の定理」をベクトル束とその切断、および切断に作用するラプラス作用素を利用することによって言い換えることが可能となる。

ここで、第2基本形式 H, K を使って、

$$A := \sum_{i=1}^n H_{e_i} K_{e_i} : f^*Q \rightarrow f^*Q$$

なるベクトル束準同型を定義し、平均曲率作用素 ということにする。

定理 1.2. [7] W にスカラー積を導入したときに、写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ に対する次の2条件は互いに同値である。

- (1) $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ は調和写像である。
- (2) W に属する任意の切断 $t \in \Gamma(f^*Q)$ に対して、 $t(x) = 0$ ならば、 $(\Delta t)(x) = 0$ が成り立つ。

この条件の下、 $\Delta t = -At$ であり、 $e(f) = -\text{trace } A$ が成り立つ。

定理 1.3. [7] 定理 1.2 の仮定の下、次の2条件は互いに同値である。

- (1) $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ は調和写像であり、かつある関数 h が存在して $A = -hId$ となる。
- (2) ある関数 h が存在して、 W に属する任意の切断 t に対して、 $\Delta t = ht$ となる。

この条件の下、 $e(f) = (N - p)h$ が成り立つ。

球面の場合には引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ は階数1なので、平均曲率作用素 A は関数と同一視される。したがって、上の定理において、「 $A = -hId$ 」という条件は自動的にみたされることになるので言及不要となる。かくして、定理 1.3 は定理 1.1 と一致する。

本稿ではこの定理を利用して、[3] の拡張に言及し、その応用として、複素射影直線から複素2次曲面への正則等長写像のモジュライ空間を記述することにする。なお、証明の細部に関しては [7], [6] を参照していただきたい。

2. 準備

まずは、グラスマン多様体のベクトル束の第2基本形式に関する補題を紹介する。

補題 2.1. ベクトル束の第2基本形式 H および K は平行であり、

$$g_Q(Hs, t) = -g_S(s, Kt), \quad s \in S, t \in Q$$

をみたす。

実グラスマン多様体のときには、その接ベクトル束は $S^* \otimes Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{R}^N)$ と同型であり、また複素グラスマン多様体の場合には、その正則接ベクトル束が $S^* \otimes Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^N)$ と同型になる。したがって、(正則) 接ベクトル束のファイバー計量 g_{Gr} は $g_{S^*} \otimes g_Q$ となる。また、実グラスマン多様体の場合には、

$$H \in \Omega^1(\text{Hom}(S, Q)) = \Gamma(S \otimes Q^* \otimes S^* \otimes Q)$$

であるが、 $H = Id_S \otimes Id_Q$ であることがわかる。

複素グラスマン多様体の場合には、 H は $\text{Hom}(S, Q)$ に値をとる $(1, 0)$ 形式であるので、

$$H \in \Omega^{1,0}(\text{Hom}(S, Q)) = \Gamma(S \otimes Q^* \otimes S^* \otimes Q)$$

となり、やはり $H = \text{Id}_S \otimes \text{Id}_Q$ であることがわかる。 K も同様であり、 $K = -\text{Id}_S \otimes \text{Id}_Q$ となる。

すると、ファイバー計量 g_{Gr} はまた別の表示を持つことがわかる。

補題 2.2.

$$g_{Gr} = -\text{trace}_Q HK = -\text{trace}_S KH.$$

さて、次に m 次元リーマン多様体 (M, g) からグラスマン多様体への写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられているとする。ベクトル空間 W にスカラー積を導入し、グラスマン多様体に序論で説明したさまざまな幾何構造を考えることにする。

とくに、平均曲率作用素 $A \in \text{End}(f^*Q)$ の持つ性質を列挙する。

補題 2.3. 平均曲率作用素 A は非正な対称作用素、もしくはエルミート作用素である。

実際、 A の定義と補題 2.1 から、任意の $t \in f^*Q$ に対して、

$$g_{f^*Q}(At, t) = -\sum_{i=1}^m g_{f^*S}(K_{e_i}t, K_{e_i}t) = g_{f^*Q}(t, At)$$

である。

補題 2.4. 写像 $f: M \rightarrow Gr_p(W)$ のエネルギー密度 $e(f)$ は

$$e(f) = -\text{trace} A$$

をみtas。

補題 2.2 より、

$$e(f) = \sum_{i=1}^m g_{Gr}(df(e_i), df(e_i)) = -\sum_{i=1}^m \text{trace} H_{df(e_i)} K_{df(e_i)} = -\text{trace} A$$

となる。

最後に、 $f: M \rightarrow N$ をリーマン多様体間の写像としたときに、 $df \in \Omega^1(f^*TN)$ に対する微分 ∇df を写像 f の第 2 基本形式といい、

$$\tau(f) := \text{trace} \nabla df = \sum_{i=1}^{\dim M} (\nabla_{e_i} df)(e_i)$$

をテンション場という。テンション場が恒等的に消える ($\tau(f) \equiv 0$) とときに、 $f: M \rightarrow N$ は調和写像であるという [4]。

3. 高橋の定理の拡張

写像に対する変分問題がベクトル束の第2基本形式を利用して書き換えられることを見るために、しばらくの間、リーマン多様体 (M, g) をコンパクトであると仮定し、その体積要素を dv_M と表すことにする。グラスマン多様体への写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられているとして、ベクトル空間 W にスカラー積を導入する。

ベクトル束の第2基本形式の引き戻し H のノルムの2乗を計算する。そのために、 $u_1, u_2, \dots, u_p$ を $f^*S \rightarrow M$ の局所正規直交枠であるとする。補題 2.1, 2.2 を利用すれば、

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^p g_{f^*Q}(H_{e_i}u_\alpha, H_{e_i}u_\alpha) = - \sum_{i=1}^m \text{trace}_{f^*S} K_{e_i} H_{e_i} \\ &= g_{Gr}(df(e_i), df(e_i)) = e(f) \end{aligned}$$

したがって、

$$\int_M |H|^2 dv_M = \int_M |df|^2 dv_M (= E(f))$$

が成立する。右辺は写像 f のエネルギーであり、その Euler-Lagrange 方程式が $\tau(f) = 0$ であった。

そこで、左辺により定義される変分問題の Euler-Lagrange 方程式が問題となるが、実際、

$$\nabla H = H_{\nabla df}, \quad -\delta^\nabla H = H_{\tau(f)}$$

が成立することがわかる。 H がグラスマン多様体上では、 $Id_S \otimes Id_Q$ と同一視できたことを考慮することにより、次を得る。

命題 3.1.

$$\nabla H = 0 \iff \nabla df = 0, \quad \delta^\nabla H = 0 \iff \tau(f) = 0.$$

さて、次にベクトル束の全射準同型 $\pi_Q : \underline{W} \rightarrow Q$ により、 $W \subset \Gamma(Q)$ とみなすことができたが、切断を引き戻すことにより、

$$\begin{aligned} f^*\pi_Q : W &\rightarrow \Gamma(f^*Q), \\ w &\mapsto f^*\pi_Q(w), \quad w \in W \end{aligned}$$

が得られる。ここで、一般に $f^*\pi_Q$ の単射性は期待できないので、 $W \subset \Gamma(f^*Q)$ とは言えないことに注意する。しかし、 $w \in W$ は $f^*Q \rightarrow M$ の切断 $f^*\pi_Q(w)$ を定義するので、 $f^*\pi_Q(w)$ を W に属する $f^*Q \rightarrow M$ の切断とすることにする。

ところで、 W がスカラー積を持つ場合には、別にベクトル束の全射準同型 $\pi_S : \underline{W} \rightarrow S$ を定義できた。これを利用することにより、

$$f^*\pi_S : W \rightarrow \Gamma(f^*S)$$

も定義できる。

したがって、 $w \in W$ は二つの切断、 $t \in \Gamma(f^*Q)$ と $s \in \Gamma(f^*S)$ を与える。このとき、切断 s と t を $w \in W$ に対応する切断という。

すると、 $w \in W$ に対応する切断 s と t に対して、 $dw = 0$ であることから、

$$\nabla s = -Kt, \quad \nabla t = -Hs$$

が成り立つことがわかる。この式から、 W に属する $f^*Q \rightarrow M$ の切断 t に対して、

$$\Delta t - H_{\tau(f)}s + At = 0$$

が成り立つことを導くことができる。定理 1.2、定理 1.3 はこの式から導かれる。

4. DO CARMO-WALLACH の定理の拡張

グラスマン多様体への写像の構成法を復習する。まず、 $V \rightarrow M$ をベクトル束とし、 $W \subset \Gamma(V)$ を $V \rightarrow M$ の切断のなす有限次元部分空間とする。

このとき、ベクトル束の準同型 $ev : \underline{W} \rightarrow V$ が定義される。

$$ev_x(t) = t(x) \in V_x, \quad t \in W, \quad x \in M.$$

定義 4.1. ベクトル束の準同型 $ev : \underline{W} \rightarrow V$ が全射であるとき、ベクトル束 $V \rightarrow M$ は W によって 大域的に生成される という。

$V \rightarrow M$ が W により大域的に生成されていると仮定する。すると写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が ($p = \dim W - \text{rank } V$)

$$f(x) := \text{Ker } ev_x = \{t \in W \mid t(x) = 0\}.$$

と定義される。

写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ を $(V \rightarrow M, W)$ による 誘導写像 という。ベクトル束 $V \rightarrow M$ が明らかな場合には W による誘導写像ともいう。

補題 4.2. f が $(V \rightarrow M, W)$ による誘導写像であるならば、ベクトル束 $V \rightarrow M$ とグラスマン多様体の普遍商束の引き戻し束 $f^*Q \rightarrow M$ とは自然に同型となる。

したがって、逆に写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ が与えられているときには、 f は $(f^*Q \rightarrow M, W)$ による誘導写像とみなすことができる。このようにして、グラスマン多様体への任意の写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ は誘導写像とみなせる。

次に、 $(V, h_V, \nabla) \rightarrow (M, g)$ を計量 h_V を保つ接続 ∇ をもつベクトル束とし、 W を $\Gamma(V)$ に作用するラプラス作用素 Δ の固有空間とする。さらに、 W は $V \rightarrow M$ を大域的に生成すると仮定する。

このとき、誘導写像

$$f_0 : M \rightarrow Gr_p(W)$$

を考える。ここで、 $p = \dim W - \text{rank } V$ である。この写像 f_0 を W による 標準写像 という。

$\Gamma(V)$ に L^2 内積を入れ、 W に制限する。

このようにして、 W にスカラー積を導入できたが、定理 1.2, 1.3 で問題にしているのは普遍商束 $Q \rightarrow Gr_p(W)$ とその接続 ∇^Q の引き戻しであった。自然な同型 $V \cong f^*Q$ の下、 ∇ と ∇^{f^*Q} がゲージ同値である理

由はない。したがって、この設定だけでは標準写像 $f_0 : M \rightarrow Gr_p(W)$ が調和写像であるとは言えない。

定義 4.3. 多様体 M からグラスマン多様体への写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ に対して、線形写像 $f^*\pi_Q : W \rightarrow \Gamma(f^*Q)$ を考える。この線形写像が単射であるときに、 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ を充満な写像であるという。

この定義は、写像の終集合が球面や複素射影空間の場合には通常の写像の「充満性」と一致することに注意する。

多様体 M 上のベクトル束 $V \rightarrow M$ とその計量 h_V 、および接続 ∇ を固定する。写像 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$ に対して、次の2条件を考える。

- (1) 引き戻し束 $(f^*Q, f^*h_Q, \nabla^{f^*Q}) \rightarrow M$ はベクトル束 $(V, h_V, \nabla) \rightarrow M$ とゲージ同値である。。この条件を f はゲージ性をみたすという。
- (2) ある実数 μ が存在して、 $A = -\mu Id_V$ が成り立つ。この条件を f は **Einstein-Hermite 性 (EH 性)** をみたすという。

注意. 定数 μ を

$$q\mu \text{Vol}(M) = E(f),$$

と定めると

$$\mu E(f) \leq \int_M |A|^2 dv_M, \quad = \Longleftrightarrow A = -\mu Id_V.$$

が成り立つ。

注意. $f : (M, g, J) \rightarrow Gr_p(W)$ が正則写像の場合には、

$$\mu = \frac{2\pi}{q\text{Vol}(M)} \int_M c_1(f^*Q) \wedge \frac{\omega_M^{n-1}}{(n-1)!}.$$

となり、

$$2\pi\mu \int_M c_1(f^*Q) \wedge \frac{\omega_M^{n-1}}{(n-1)!} \leq \int_M |A|^2 dv_M,$$

が成り立つ。もちろん、

$$= \Longleftrightarrow A = -\mu Id_V$$

である。

また、 $f^*Q \rightarrow M$ の引き戻し接続に対して、

$$K_{EH} = -A$$

が成り立つ。ここで、 K_{EH} はベクトル束 (の接続) に対して定義される小林先生の意味 [5] での平均曲率である。

定義 4.4. 二つの写像 $f_1, f_2 : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{K}^m)$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$) を考える。 $Gr_p(\mathbf{K}^m)$ の等長変換 ϕ が存在し、 $f_2 = \phi \circ f_1$ が成り立つときに、 f_1 は f_2 と像同値であるという。

$Gr_p(\mathbf{K}^m)$ の等長変換 ϕ は、普遍商束 $\pi : Q \rightarrow Gr_p(\mathbf{K}^m)$ のベクトル束準同型 $\tilde{\phi}$ を誘導する。ただし、 $\tilde{\phi}$ は $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi$ をみたす。

定義 4.5. ベクトル束 $(V, h_V, \nabla) \rightarrow M$ を固定し、このベクトル束に対してゲージ性をみたす写像 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{K}^m)$ を考える。写像 f とベクトル束同型 $\phi : V \rightarrow f^*Q$ の組 (f, ϕ) に対する同値関係を以下のように定義する。

$(f_i, \phi_i), (i = 1, 2)$ に対して、 $Gr_p(\mathbf{K}^m)$ の等長変換 ϕ が存在し、 $f_2 = \phi \circ f_1$ かつ $\phi_2 = \tilde{\phi} \circ \phi_1$ が成り立つときに、 (f_1, ϕ_1) は (f_2, ϕ_2) とゲージ同値であるという。

定理 4.6. [7] (M, g) をコンパクトリーマン多様体とし、 $(V, h_V, \nabla) \rightarrow M$ をベクトル束とする。

多様体 M からグラスマン多様体への写像 $f : (M, g) \rightarrow Gr_p(\mathbf{K}^m)$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$) を次の二つの条件をみたす充満な調和写像とする。

- (i) ゲージ性 : $(f^*Q, f^*h_Q, f^*\nabla^Q) \rightarrow M \cong (V, h_V, \nabla) \rightarrow M$.
- (ii) EH 性 : $A = -\mu Id_V$ を満たす定数 μ が存在する。

このとき、以下のような (W, T) が存在する。

- (I) W : 固有値 μ に対する固有空間 $s.t. \mathbf{K}^m \subset W$.
- (II) $T : W$ のエルミート変換 $s.t. T|_{\mathbf{K}^m} > 0$ 、かつ $\text{Ker } T = \mathbf{K}^{m^\perp}$.
- (III) $ev \circ T^2 \circ ev^* = Id_V, ev \circ T^2 \circ (\nabla ev^*) = 0$.

さらに、

$$f(x) = T^{-1}(f_0(x) \cap \mathbf{K}^m), \quad T \circ ev^* : V \rightarrow f^*Q$$

$$|df|^2 = (m - p)\mu.$$

対応 $[f] \leftrightarrow T$ は一対一対応である。ただし、 $[f]$ は $(f, T \circ ev^*)$ によるゲージ同値類を表す。

逆に (I) 固有空間 W とその部分空間 $\mathbf{K}^m$ に対して、(II) をみたす非負エルミート変換 $T \in \mathbf{H}(W)$ が存在し、 T が (III) をみたすならば、上のように定義された写像 $f : M \rightarrow Gr_p(\mathbf{K}^m)$ はゲージ性、 EH 性 $A = -\mu Id_V$ をみたす充満な調和写像となる。

注意. T は全測地的な埋め込み $Gr_p(\mathbf{K}^m) \rightarrow Gr_{p'}(W)$ も決定している。すなわち $\text{Ker } T^\perp (\subset W \subset \Gamma(V))$ 内の切断の共通零点が $Gr_p(\mathbf{K}^m)$ である。この事実はモジュライ空間の自然なトポロジー (L^2 -スカラー積から誘導されたトポロジー) による、モジュライ空間のコンパクト化の幾何学的意味を考察する上で重要となる。

注意. $f : (M, g, J) \rightarrow Gr_p(W)$ がコンパクトケーラー多様体からの正則写像の場合には、 EH 性から $V \rightarrow M$ は Einstein-Hermite (EH) 束でなければならない。しかしこの条件の下、条件 (III) は、

$$ev \circ T^2 \circ ev^* = Id_V$$

だけでよいことがわかる。また、 $W = H^0(M, V)$ である。

とくに $f : (M, g, J) \rightarrow Gr_p(\mathbf{C}^m)$ の場合には、方程式

$$ev \circ T^2 \circ ev^* = Id_V$$

の左辺は運動量写像とも解釈できる。

そのために、 $\Gamma(\text{Hom}(W, V))$ を L^2 -Hermite 積により、ケーラー多様体とみなす。すると $(V, h_V, \nabla) \rightarrow M$ のゲージ群 $\mathcal{G}_V$ はそのケーラー構

造を保つように $\Gamma(\text{Hom}(\underline{W}, V))$ に作用することがわかる。 $\mathfrak{g}_V \rightarrow M$ を $(V, h_V, \nabla) \rightarrow M$ の歪エルミートベクトル束準同型がなすベクトル束とする。このとき、 $\Gamma(\mathfrak{g}_V)$ は $\mathcal{G}_V$ のリー代数とみなせる。そこで、 $\mathcal{G}_V$ の作用に対する運動量写像を $\mu : \Gamma(\text{Hom}(\underline{W}, V)) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{g}_V)$ とすれば、

$$\mu(\Phi) = \sqrt{-1}\Phi\Phi^*$$

となる。ただし、 $\Gamma(\mathfrak{g}_V)$ とその双対を同一視した。 $\Phi = ev \circ T$ とすれば上の方程式 $ev \circ T^2 \circ ev^* = Id_V$ は、 $\mu(\Phi) = \sqrt{-1}Id_V$ となる。したがって、定理 4.6 より、モジュライ空間は $\mu^{-1}(\sqrt{-1}Id_V) \cap H(W)$ となる。

5. 応用

定理 5.1. (板東-大仁田 [1]) $f : \mathbf{CP}^1 \rightarrow \mathbf{CP}^n$ をエネルギー密度が定数関数となる調和写像とすれば、 f は標準写像にゲージ同値である。

定理 5.2. (Calabi[2]) $f : \mathbf{CP}^m \rightarrow \mathbf{CP}^n$ を正則等長写像とすれば、 f は標準写像にゲージ同値である。

定理 5.3. $f : \mathbf{CP}^m \rightarrow \mathbf{CP}^n$ ($m \geq 2$) をエネルギー密度が定数関数となる調和写像とする。 $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbf{CP}^n$ の標準接続の引き戻しが標準接続であれば、 f は Toth の意味での多項式写像となる。

Toth の意味での多項式調和写像の定義に関しては、[9] に詳しいので、ここでは触れないが、その定義において、用語は異なるものの、ゲージ性が要求されているので、多項式調和写像の定義において、“多項式”写像であることを要請しなくとも自動的に従うと言うのが上の定理の主張である。

いずれの場合も、問題となる写像がゲージ性、EH 性を満たすことが示されるので、定理 4.6 を使うことにより、統一的な証明が得られる。細かいことではあるが、ゲージ同値性を問題にしているので、上の二つの定理はオリジナルのものよりも若干強い主張である。

6. 複素射影直線から複素 2 次曲面への正則等長埋め込み

複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$ 上のケーラー形式 ω_0 を $R_{\mathcal{O}(1)} = -2\pi\sqrt{-1}\omega_0$ となるように固定する。ここで、 $R_{\mathcal{O}(1)}$ は $\mathbf{CP}^1$ 上の超平面束上の標準接続の曲率形式である。

また、複素 2 次曲面を実グラスマン多様体 $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ として実現し、 $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ のケーラー形式 ω_Q を $R_Q = -2\pi\sqrt{-1}\omega_Q$ が満たされるように固定する。ここで、 R_Q は $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ 上の普遍商束上の標準接続の接続形式である。

定義 6.1. $f : \mathbf{CP}^1 \rightarrow Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を正則埋め込みとする。正整数 k が存在して、 $f^*\omega_Q = k\omega_0$ を満たすときに、 f を次数 k の正則等長写像という。

補題 6.2. $f : \mathbf{CP}^1 \rightarrow Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を正則埋め込みとする。このとき、次の 2 条件は同値である。

(1) f は次数 k の正則等長写像である。

(2) 複素 2 次曲面 $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ の普遍商束上の標準接続の f による引き戻し接続が $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbf{CP}^1$ 上の標準接続にゲージ同値である。

さらにこの 2 条件の下、ある実数 μ が存在して、 $A = -\mu Id_{\mathcal{O}(k)}$ となる。

したがって、次数 k の正則等長写像のモジュライを求めるにあたり、定理 4.6 を利用することが可能となる。

定理 6.3. [6] $f : \mathbf{CP}^1 \rightarrow Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を次数 k の充満な正則等長写像とすれば、 $n \leq 2k$ が成り立つ。

$\mathcal{M}_k$ を次数 k の $\mathbf{CP}^1$ から $Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ への充満な正則等長写像のゲージ同値性によるモジュライ空間であるとする。

このとき、 $\mathcal{M}_k$ は $SU(2)$ 表現空間内 $\bigoplus_{l=1}^{k \geq 2l} S^{2k-4l} \mathbf{C}^2$ 内の有界な開凸体とみなせる。

自然なトポロジーによる $\mathcal{M}_k$ のコンパクト化の下、境界にある点は $Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ 内の全測地的部分多様体 $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2})$, ($p < 2k$) への充満な正則等長写像を代表している。また、 $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2})$ は普遍商束 $Q \rightarrow Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ の切断の零点集合として表される。

注意. $\dim \mathcal{M}_k = k(k-1)$ であり、 $\mathcal{M}_k$ はケーラー多様体の構造を持つこともわかる。

注意. 定理 4.6 を利用して得られる、写像に対応する (W, T) を用いれば、 $\text{Ker} T^\perp (\subset W \subset \Gamma(\mathcal{O}(k)))$ 内の切断の共通零点が $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2})$ である。

像同値性によるモジュライ空間を求めるには、 $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbf{CP}^1$ の標準接続のホロノミー群の中心化群を考察しなければならない。実際、中心化群 S^1 は $\mathcal{M}_k$ にスカラー倍として作用することがわかる。

定理 6.4. [6] $\mathbf{M}_k$ を次数 k の充満な $\mathbf{CP}^1$ から $Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ への正則等長写像の像同値性によるモジュライ空間であるとする。

このとき、

$$\mathbf{M}_k = \mathcal{M}_k / S^1$$

が成り立つ。

注意. 次数 k が偶数の場合には、 $SU(2)$ 同変正則等長写像の互いに像同値ではない 1 パラメータ族が存在することがわかる。

注意. $\mathcal{M}_k$ への S^1 作用はケーラー構造を保つ。その運動量写像は $\|T\|^2$ である。

REFERENCES

- [1] Bando, S., Ohnita, Y.: Minimal 2-spheres with constant curvature in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. J. Math. Soc. Japan **39**, 477–487 (1987)
- [2] Calabi, E.: Isometric Imbedding of Complex Manifolds. Ann. of Math. **58**, 1–23 (1953)
- [3] Do Carmo, M.P., Wallach, N.R.: Minimal immersions of spheres into spheres. Ann. of Math. **93**, 43–62 (1971)
- [4] Eells, J., Sampson, J.H.: Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Math. **86**, 109–160 (1964)

- [5] Kobayashi, S.: Differential Geometry of Complex Vector Bundles. Iwanami Shoten and Princeton University, Tokyo (1987)
- [6] Macia, O., Nagatomo, Y., Takahashi, M.: Holomorphic isometric embeddings of projective lines into quadrics. arXiv:mathDG/1408.3178
- [7] Nagatomo, Y. Harmonic maps into Grassmannian manifolds. arXiv:mathDG/1408.1504
- [8] Takahashi, T.: Minimal immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan **18**, 380-385 (1966)
- [9] Toth, G.: Moduli Spaces of Polynomial Minimal Immersions between Complex Projective Spaces. Michigan Math. J. **37**, 385–396 (1990)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MEIJI UNIVERSITY, HIGASHI-MITA, TAMAKU, KAWASAKI-SHI, KANAGAWA 214-8571, JAPAN
E-mail address: yasunaga@meiji.ac.jp