

R 空間の極小埋め込み上の面積最小錐

首都大学東京大学院理工学研究科博士後期課程 2 年

大野 晋司

1 導入

一般次元に拡張された Plateau 問題の解は一般に特異点を待つ. 特に錐状特異点を持つ解の特異点における接錐と, 球面の共通部分は球面の極小部分多様体となる. このような錐は同一境界をもつ部分多様体のうちで面積最小になる. 面積最小錐を具体的に構成することは面積最小部分多様体に現れる特異点を調べる上で重要となる.

G. R. Lawlor [L] は錐の面積最小性に対する判定法 (曲率判定法) を与え, それを用いて, 球面同士の直積の上の面積最小錐の分類と, 球面の等質超曲面上の面積最小錐のリストを与えている. Kerckhove [Ke] は, Lawlor の曲率判定法を用いて $SU(n)$, $SO(n)$ の随伴表現の孤立軌道上の錐が, いくつかの例外を除き, 面積最小になることを示した. 広橋-菅野-田崎 [HKT] は面積非増加レトラクションを群の作用を用いて具体的に構成することで, B 型の制限ルート系を持つ既約な対称空間の線型イソトロピー表現の軌道として得られるいくつかの対称 R 空間上の錐が面積最小となることを示した. また, 菅野 [Ka] は Lawlor の曲率判定法を用いて, いくつかの対称 R 空間上の錐の面積最小性を示している. 本稿では, 対称 R 空間より一般の極小 R 空間の上の錐の面積最小性を考える. [HKT] の面積非増加レトラクションを構成する方法を一般の R 空間に適用できるように拡張し, 面積最小錐の新しい例を与え, 特に階数 2 の対称空間の線型イソトロピー表現の孤立軌道として得られる R 空間上の錐の面積最小性を調べる. 本講演の内容は, 首都大学東京の酒井高司先生との共同研究に基づく.

2 準備

2.1 錐と面積非増加レトラクション

まず, 錐とその面積最小性を定義しよう. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を単位球面とし, $B \subset S^{n-1}$ を S^{n-1} のコンパクト部分多様体とする. このとき

$$C_B = \{tx \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t, x \in B\}$$

$$C_B^1 = \{tx \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1, x \in B\}$$

と定義し, C_B を B 上の錐と呼ぶ. C_B, C_B^1 ともに原点において唯一の孤立特異点を持つ.

定義 1. C_B^1 が, B を境界に持つ整カレントをして面積最小であるとき, C_B を面積最小であるという.

次に, 面積非増加レトラクションを定義する.

定義 2. $m \leq n$ とし, V^n, W^m をそれぞれ n, m 次元の実計量ベクトル空間とする. このとき, 線型写像 $F: V \rightarrow W$ の *Jacobian* JF を次の式で定義する.

$$JF = \sup\{\|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_m)\|\}$$

ただし, $v_1, \dots, v_m$ は V の正規直交系全体を動く.

定義 3. レトラクション $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow C_B$ が可微分であるとは, $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \Phi^{-1}(\{0\}) \rightarrow C_B \setminus \{0\}$ が C^1 級であるときに言う. 可微分レトラクションが面積非増加であるとは, 各 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Phi^{-1}(\{0\})$ について $J(d\Phi_x) \leq 1$ が成り立つときに言う.

次の命題が成り立つ.

命題 1. B を S^{n-1} のコンパクト部分多様体とする. このとき, $\mathbb{R}^n$ から B 上の錐 C_B への面積非増加レトラクション $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow C_B$ が存在するならば, C_B は面積最小錐である.

Proof. S を B を境界に持つ整カレントとする. このとき, $\Phi(S) \subset C_B^1$ だから,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C_B^1) &\leq \text{Vol}(\Phi(S)) = \text{Vol}(\Phi(S) \setminus \{0\}) \leq \int_{S \setminus \Phi^{-1}(\{0\})} \|d\Phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k)\| d\mu_S \\ &\leq \int_{S \setminus \Phi^{-1}(\{0\})} J(d\Phi_x) d\mu_S \leq \int_{S \setminus \Phi^{-1}(\{0\})} 1 d\mu_S \leq \int_S 1 d\mu_S = \text{Vol}(S) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\{e_1, \dots, e_k\}$ は S の正規直交枠である. □

C_B が面積最小錐であれば, C_B は $\mathbb{R}^n$ の極小部分多様体になる. また C_B が極小であることと B が S^{n-1} の極小部分多様体となることは同値である. したがって C_B が面積最小錐であるためには B が S^{n-1} の極小部分多様体であることが必要である.

[L] では, C_B への面積非増加レトラクションが存在するための十分条件を微分不等式によって表し, 数値評価によってその存在を示している. 一方 [HKT] では C_B への面積非増加レトラクションを群の作用で具体的に構成することで錐の面積最小性を示している.

2.2 Riemann 対称対と制限ルート系

前に述べたとおり, 面積最小錐は球面の極小部分多様体上の錐である. したがって, 球面の極小部分多様体上の錐を考え, その面積最小性を判定すれば良い. 球面の極小部分多様体を得るために

本稿では対称空間の線型イソトロピー表現を用いる. 対称空間とその制限ルート系についての言葉を準備する.

G を連結でコンパクトな Lie 群とし, θ を G の対合的自己同型写像とする. θ の不動点集合を $F(\theta, G)$, その単位連結成分を $F(\theta, G)_0$ と表す. G の閉部分群 K が, $F(\theta, G)_0 \subset K \subset F(\theta, G)$ を満たし, かつ $\text{Ad}_G(K)$ がコンパクトであるとき, 対 (G, K) をコンパクト Riemann 対称対と呼ぶ.

$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環, $\mathfrak{k}$ を K の Lie 環とする.

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\theta(X) = X\}$$

が成り立つ. $\mathfrak{g}$ の $\text{Ad}(G)$ で不変な内積を, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表す. すると $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, G 上の両側不変計量を誘導し, G から G/K への自然な射影 π によって G/K の G 不変計量を誘導する. これらの計量も同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すことにする. このとき, G/K は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関してコンパクト Riemann 対称空間になり, 逆に全てのコンパクトな Riemann 対称空間はこの方法で得られる.

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\theta(X) = -X\}$$

とおくと, $d\theta$ が対合的であることから, $\mathfrak{g}$ は,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

と直交直和分解される. この分解を標準分解と呼ぶ. $o \in G/K$ を固定すると, $T_o(G/K)$ と $\mathfrak{m}$ は $d\pi$ によって同一視される. 本稿ではコンパクト型の対称空間のみを考えるので, $\mathfrak{g}$ は半単純であると仮定する. さて, $\mathfrak{g}$ のルート系と $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の制限ルート系を定義しよう. $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を一つ固定し, $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ を一つ取り固定する. $\alpha \in \mathfrak{t}$ に対して,

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

とおき, $\mathfrak{g}$ のルート系 $\tilde{R}$ を

$$\tilde{R} = \{\alpha \in \mathfrak{t} \setminus \{0\} \mid \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}\}$$

で定める. また, $\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の制限ルート系 R を

$$R = \{\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$$

で定める.

$\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \overline{H}$ で表すことにする.

$$\tilde{R}_0 = \{\alpha \in \tilde{R} \mid \overline{\alpha} = 0\}$$

とおくと,

$$R = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R} \setminus \tilde{R}_0\}$$

と表すことができる.

$\mathfrak{a}$ の基底を延長して $\mathfrak{t}$ の直交基底をつくり, その基底に関する辞書式順序 $<$ を $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{t}$ に入れる. すると, 各 $H \in \mathfrak{t}$ に対して, $\bar{H} > 0$ ならば $H > 0$ が成り立つ. この順序に関する $\tilde{R}$ の基本系を $\tilde{F}$ と書く.

$$\tilde{F}_0 = \{\alpha \in \tilde{F} \mid \bar{\alpha} = 0\}$$

とおくと, R の $<$ に関する基本系 F は,

$$F = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{F} \setminus \tilde{F}_0\}$$

で与えられる. また, 正のルートを $\tilde{R}_+$, 正の制限ルートを R_+ で表すことにすると,

$$R_+ = \{\bar{\alpha} \in R \mid \alpha \in \tilde{R}_+ \setminus \tilde{R}_0\}$$

が成り立つ.

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, H] = 0 (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき, 各 $\alpha \in R_+$ に対して,

$$\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

$$\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

と定めると, 次の補題が成り立つ, (Lemma 1.1 in [T])

補題 1. (1)

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{k}_\alpha, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{m}_\alpha$$

は直交直和分解である.

(2) $\alpha \in \tilde{R}_+ \setminus \tilde{R}_0$ に対して, $S_\alpha \in \mathfrak{k}$, $T_\alpha \in \mathfrak{m}$ が存在して,

$$\{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \bar{\alpha} = \lambda\}, \quad \{T_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \bar{\alpha} = \lambda\}$$

はそれぞれ $\mathfrak{k}_\lambda$, $\mathfrak{m}_\lambda$ の正規直交基底となり, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$[H, S_\alpha] = \langle \alpha, H \rangle T_\alpha, \quad [H, T_\alpha] = -\langle \alpha, H \rangle S_\alpha$$

が成り立つ.

$\lambda \in R$ に対して $\dim \mathfrak{m}_\lambda = \dim \mathfrak{k}_\lambda$ となるので, この値を $m(\lambda)$ と表し, λ の重複度という. $\mathfrak{a}$ の部分集合 D を

$$D = \bigcup_{\lambda \in R} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle = 0\}$$

で定め, $\mathfrak{a} \setminus D$ を Weyl 領域と呼ぶ. また, 基本領域 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in F)\}$$

で定める. $\mathcal{C}$ の閉包 $\overline{\mathcal{C}}$ は

$$\overline{\mathcal{C}} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle \geq 0 \ (\alpha \in F)\}$$

で与えられる. F の部分集合 Δ に対して, $\overline{\mathcal{C}}$ の部分集合 $\mathcal{C}^\Delta$ を

$$\mathcal{C}^\Delta = \{H \in \overline{\mathcal{C}} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in \Delta), \ \langle \beta, H \rangle = 0 \ (\beta \in F \setminus \Delta)\}$$

で定めると次の補題が成り立つ. (Lemma 1.2 in [HKT])

補題 2. (1) 各 $\Delta_1 \subset F$ に対して,

$$\overline{\mathcal{C}^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} \mathcal{C}^\Delta$$

は非交和となる.

(2) 任意の部分集合 $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$ に対して, $\Delta_1 \subset \Delta_2$ と $\mathcal{C}^{\Delta_1} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta_2}}$ は同値である.

$\beta \in F$ に対して, $H_\beta \in \mathfrak{a}$ を,

$$\langle \alpha, H_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \ (\alpha \in F)$$

で定める. ただし, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタである. すると, 各 $\Delta \subset F$ に対して,

$$\mathcal{C}^\Delta = \left\{ \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha H_\alpha \mid x_\alpha > 0 \right\}$$

が成り立つ.

$$Z^H = \{g \in G \mid \text{Ad}(g)H = H\}$$

$$Z_K^H = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H = H\}$$

とおくと,

$$Z_K^H = Z^H \cap K$$

が成り立つ. Z^H は連結であることが証明できる. (see [HKT]) また,

$$Z_K^\Delta = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)|_{\mathcal{C}^\Delta} = \text{id}\}$$

とおくと, 次の定理が成り立つ. ([HKT])

定理 1. $\Delta \subset F$ と $H \in \mathcal{C}^\Delta$ に対して,

$$Z_K^\Delta = Z_K^H$$

が成り立つ.

3 レトラクションの構成

K の G/K への自然な作用の微分表現として, K の $T_o(G/K)$ への表現が得られる. この表現は, G の K への自然な射影 π の微分 $d\pi$ によって, K の Ad_G による $\mathfrak{m}$ への表現と同値になる. この表現のことを s 表現と呼ぶ. s 表現は直交表現であるから, その軌道は球面の部分多様体となる. また, 軌道空間は $\bar{\mathcal{C}}$ と同相になり, 補題 2 における $\bar{\mathcal{C}}$ の分割は, s 表現の軌道型による分割になっている. $\mathfrak{m}$ の単位超球面を S と書くと, 軌道の基点 H を $\bar{\mathcal{C}} \cap S$ からとれば, 軌道 $\text{Ad}(K)H$ は S の部分多様体となる. さらに, 各軌道型ごとに唯一つ極小軌道が存在することが次の定理から分る. ([HTST])

定理 2. 空でない任意の $\Delta \subset F$ に対して, 唯一つ $A^\Delta \in \mathcal{C}^\Delta \cap S$ が存在して, $\text{Ad}(K)A^\Delta$ は S の極小部分多様体になる.

系 1. 孤立軌道 (すなわち $\Delta = \{\alpha\} \subset F$) は極小軌道である.

定理 2 の証明の中では, $\mathbb{R}$ 空間 $\text{Ad}(K)H$ の H における $\mathfrak{m}$ 内での平均曲率ベクトル m_H が, ルート系の言葉で次のように具体的に与えられている.

$$m_H = - \sum_{\alpha \in \bar{R}_+ \setminus \bar{R}_+^\Delta} \frac{\bar{\alpha}}{\langle \alpha, H \rangle}$$

この表示は KItagawa, Ohnita ([KO]) の結果である. よって $\text{Ad}(K)H$ が S 内で極小部分多様体になるためには, ある定数 a が存在して,

$$m_H = aH$$

となることが必要十分である. このように得られる極小軌道に対して次に述べるようなレトラクションの構成によって極小軌道上の錐の面積最小性を考えることをできる. レトラクションの構成には次の補題を用いる.

補題 3. 写像 $\phi: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ が, 任意の $\Delta \subset F$ に対して, $\phi(\mathcal{C}^\Delta) \subset \bar{\mathcal{C}}^\Delta$ を満たすとき, 写像 $\Phi: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}; X = \text{Ad}(k)H \mapsto \text{Ad}(k)\phi(H)$ は $k \in K$ の取り方によらず定まる. ただし, $k \in K$, $H \in \bar{\mathcal{C}}$ である.

次の定理は [HKT] のレトラクションの構成法の拡張になる. この拡張により, 任意の $A \in \bar{\mathcal{C}}$ に対して, $\mathfrak{m}$ から, $\mathbb{R}$ 空間 $\text{Ad}(K)A$ 上の錐 $C_{\text{Ad}(K)A}$ へのレトラクションを構成することができる.

定理 3. $A \in \bar{\mathcal{C}}$ に対して, $\Delta_0 = \{\alpha \in F \mid \langle \alpha, A \rangle > 0\}$ とおく. f を $\bar{\mathcal{C}}$ 上の C^0 級関数とする. C^0 級写像 $\phi: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \{tA \mid t \geq 0\}$ を $\phi(x) = f(x)A$ で定義する. f が

$$(1) \text{ 任意の } t \geq 0 \text{ に対して, } f(tA) = t$$

$$(2) \Delta_0 \text{ を含まない任意の } \Delta \subset F \text{ に対して, } f|_{\mathcal{C}^\Delta} = 0$$

を満たすとき, ϕ は補題 3 によって, レトラクション $\Phi: \mathfrak{m} \rightarrow C_{\text{Ad}(K)A}$ に拡張される.

Proof. まず, ϕ が補題 3 の仮定を満たすことを示そう. $\Delta \subset F$ に対して, $\Delta_0 \subset \Delta$ ならば, 補題 2 より, $\mathcal{C}^{\Delta_0} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta}}$ となる. よって,

$$\phi(\mathcal{C}^{\Delta}) = \{tA \mid t \geq 0\} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta_0}} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta}}$$

また, $\Delta_0 \subset \Delta$ でないとき, f の条件から $\phi(\mathcal{C}^{\Delta}) = \{0\} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta}}$ となる. よって ϕ は補題 3 の仮定を満たし, Φ は矛盾なく定まる. 次に, Φ が錐 $C_{\text{Ad}(K)A}$ へのレトラクションとなることを示す.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{m}) &= \{\text{Ad}(k)f(H)A \mid k \in K, H \in \overline{\mathcal{C}}\} \\ &= \{t\text{Ad}(k)A \mid k \in K, t \geq 0\} = C_{\text{Ad}(K)A} \end{aligned}$$

であるので, Φ は $\mathfrak{m}$ から $C_{\text{Ad}(K)A}$ への全射である. また, $\text{Ad}(k)tA \in C_{\text{Ad}(K)A}$ に対して,

$$\Phi(\text{Ad}(k)tA) = \text{Ad}(k)\phi(tA)A = \text{Ad}(k)tA$$

であるから, $\Phi|_{C_{\text{Ad}(K)A}} = \text{id}$ となる. 更に Φ の連続性が次のように示される. $P_\infty \in \mathfrak{m}$ に収束する $\mathfrak{m}$ の点列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を任意に取る. このとき P_n と P_∞ は, $P_\infty = \text{Ad}(k_\infty)H_\infty$, $P_n = \text{Ad}(k_n)H_n$ と $k_n, k_\infty \in K$, $H_n, H_\infty \in \overline{\mathcal{C}}$ を用いて表される. 射影 $\mathfrak{m} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}; \text{Ad}(k)H \mapsto H$ は連続だから, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H_\infty$ を得る. $\Delta_\infty = \{\alpha \in F \mid \langle \alpha, H_\infty \rangle > 0\}$ とおき, $Z_K^{H_\infty} = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H_\infty = H_\infty\}$, $Z_K^{\Delta_\infty} = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)|_{\overline{\mathcal{C}^{\Delta_\infty}}} = \text{id}\}$ と定める. すると, [HKT] の結果から $Z_K^{H_\infty} = Z_K^{\Delta_\infty}$ が成り立つので, $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の集積点 $\tilde{k}$ に対して, $\text{Ad}(\tilde{k})|_{\overline{\mathcal{C}^{\Delta_\infty}}} = \text{Ad}(k_\infty)|_{\overline{\mathcal{C}^{\Delta_\infty}}}$ が成り立ち, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ad}(k_n)|_{\overline{\mathcal{C}^{\Delta_\infty}}} = \text{Ad}(k_\infty)|_{\overline{\mathcal{C}^{\Delta_\infty}}}$ を得る. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ad}(k_n)f(H_n)A = \text{Ad}(k_\infty)f(H_\infty)A = \Phi(P_\infty)$$

となり, Φ が連続であることが示された. □

命題 2. 定理 3 で構成されたレトラクション $\Phi : \mathfrak{m} \rightarrow C_{\text{Ad}(K)A}$ は, 制限 $\Phi|_{\mathfrak{a} \setminus \Phi^{-1}(\{0\})}$ が C^1 級ならば, 可微分である. このとき, Φ が面積非増加であることと, 各 $x \in \mathcal{C} \setminus \Phi^{-1}(\{0\})$ に対して $J(d\Phi_x) \leq 1$ を満たすことは同値である.

Proof. $\mathfrak{m} \setminus \Phi^{-1}(\{0\})$ の点のみで考えれば良い. さらに $H \in \overline{\mathcal{C}}$ において Φ が C^1 級であれば, $\text{Ad}(k)H$ においても C^1 級であるから, $H \in \overline{\mathcal{C}} \setminus \Phi(\{0\})$ で Φ の可微分性を示す. この H に対して, $\Delta = \{\lambda \in F \mid \langle \lambda, H \rangle > 0\}$ とおく. $f(H) > 0$ だから, $\Delta_0 \subset \Delta$ であり, $\mathcal{C}^{\Delta_0} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta}}$ となることに注意する. さて, 補題 1 より

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ \setminus \tilde{R}_0} \mathbb{R} \cdot T_\alpha$$

だから, 各方向についての方向微分を考えよう. 仮定から $\mathfrak{a}$ 方向には C^1 級であることがわかるので, T_α 方向の偏微分を考える. $\langle \alpha, H \rangle = 0$ のとき, 補題 1 より, $[T_\alpha, H] = \langle \alpha, H \rangle S_\alpha = 0$ だから, ある $k \in Z_K^H$ が存在して, $\text{Ad}(k)H = H$, $\text{Ad}(k)T_\alpha \in \mathfrak{a}$ とできる. よって,

$$\Phi(H + tT_\lambda) = \text{Ad}(k)^{-1}\Phi(\text{Ad}(k)(H + tT_\lambda))$$

となり, T_α 方向の微分は $\mathfrak{a}$ 方向の微分だと思って良い事がわかる.

最後に, $\langle \alpha, H \rangle \neq 0$ の場合を考える. $c(t) = \text{Ad}(\exp(-S_\alpha/\langle \alpha, H \rangle))H$ とおけば, $c(0) = H, c'(0) = T_\alpha$ となるので,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(c(t)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi \left(\text{Ad} \left(\exp \left(\frac{-tS_\alpha}{\langle \alpha, H \rangle} \right) \right) H \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad} \left(\exp \left(\frac{-tS_\alpha}{\langle \alpha, H \rangle} \right) \right) \phi(H) \\ &= \frac{-[S_\alpha, \phi(H)]}{\langle \alpha, H \rangle} \\ &= \frac{\langle \alpha, A \rangle}{\langle \alpha, H \rangle} f(x) T_\alpha \end{aligned}$$

以上から, Φ が C^1 級であることがわかった. $\Phi|_{\mathfrak{m} \setminus \Phi^{-1}(\{0\})}$ は C^1 級だから, 写像 $\bar{\mathcal{C}} \setminus \Phi^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto J(d\Phi_x)$ は連続である. したがって $J(d\Phi_x) \leq 1 (x \in \mathcal{C} \setminus \Phi^{-1}(\{0\}))$ ならば $J(d\Phi_x) \leq 1 (x \in \bar{\mathcal{C}} \setminus \Phi^{-1}(\{0\}))$ が成り立つ. $\square$

次の命題で構成した Φ の Jacobian を計算できる.

命題 3. 定理 3 で構成した Φ の Jacobian は, 各 $x \in \mathcal{C} \setminus \Phi^{-1}(\{0\})$ に対して,

$$J(d\Phi)_x = \|(\text{grad} f)_x\| \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}$$

と表される. ただし, $R_+^\Delta = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, A \rangle = 0\}$

Proof. $x \in \mathcal{C} \setminus \Phi^{-1}(\{0\})$ に対して, Φ の定義から, $d\Phi_x(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R} \cdot A$ となる. また, $\alpha \in \tilde{R}$ に対して, 命題 2 の証明から,

$$(d\Phi)_x(T_\alpha) = \frac{\langle \alpha, A \rangle}{\langle \alpha, x \rangle} f(x) T_\alpha$$

となる. したがって,

$$(d\Phi)_x \left(\sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda \right) \subset \sum_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda$$

を得る. よって, $J(d\Phi_x)$ の $\mathfrak{a}$ への制限の Jacobian を $J_1(x)$, $J(d\Phi_x)$ の $\sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda$ への制限の Jacobian を $J_2(x)$ と置けば, $\mathfrak{a}$ と各 $\mathfrak{m}_\alpha$ は直交するから,

$$J((d\Phi)_x) = J_1(x) J_2(x)$$

が成り立つ. まず $J_1(x)$ を求める. 単位ベクトル $v \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$\begin{aligned} (d\Phi)_x(v) &= (d\phi)_x(v) = (df)_x(v)A \\ &= \langle (\text{grad} f)_x, v \rangle A. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \sup\{\|(d\Phi)_x(v)\| \mid v \in \mathfrak{a}, \|v\| = 1\} \\ &= \|(\text{grad}f)_x\| \end{aligned}$$

となる. 次に $J_2(x)$ を求める. $\langle \alpha, A \rangle = 0$ なる $\alpha \in \tilde{R}_+$ に対しては, $(d\Phi)_x(T_\alpha) = 0$ なので, $R_+^\Delta = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, A \rangle = 0\}$ と置けば,

$$\ker(d\Phi)_x \cap \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda = \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda$$

となる. すると, $\{T_\alpha \in \mathfrak{m} \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \langle \alpha, A \rangle > 0\}$ は $\left(\sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda\right)^\perp$ の正規直交基底になる. よって,

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \left\| \bigwedge_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \langle \alpha, A \rangle > 0}} (d\Phi)_x(T_\alpha) \right\| = \left\| \bigwedge_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \langle \alpha, A \rangle > 0}} \frac{\langle \alpha, A \rangle}{\langle \alpha, x \rangle} f(x) T_\alpha \right\| \\ &= \prod_{\substack{\alpha \in \tilde{R}_+ \\ \langle \alpha, A \rangle > 0}} \frac{\langle \alpha, A \rangle}{\langle \alpha, x \rangle} f(x) = \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}. \end{aligned}$$

よって,

$$J(d\Phi_x) = \|(\text{grad}f)_x\| \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}$$

が言えた.

□

4 面積最小錐の例

定理 3, 命題 2 と命題 3 によって, 極小 R 空間上の錐の面積最小性を調べることができる. まず, 階数 2 のコンパクト型対称対の s 表現の孤立軌道上の錐について考える. これらの表現の主軌道は, 球面の等質超曲面となる. 球面の極小な等質超曲面上の錐の面積最小性は, [Hs], [L] においてすでに調べられている. ルート系の記号は, [Bo] に従う. 代数的な計算については, 部分的に Maxima¹を用いた. 具体的な計算に入る前に, 記号を整理しよう.

$$F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$$

$\Delta \subset F$ に対して,

$$\mathcal{C}^\Delta = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 (\alpha \in \Delta), \langle \beta, H \rangle > 0 (\beta \in F \setminus \Delta)\}$$

¹<http://maxima.sourceforge.net/>

H_{α_j} を

$$\langle \alpha_i, H_{\alpha_j} \rangle = \delta_{ij}$$

で定めると, $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}$ は $\mathfrak{a}$ の基底であるから, $x \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$x = \sum_{i=1}^l x_i H_{\alpha_i} \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

と表される. $S \subset \mathfrak{m}$ を単位超球面とし, $\Delta \subset F$ を一つ固定すると, 定理 2 より, $A^\Delta \in \mathcal{C}^\Delta \cap S$ が存在して, 軌道 $\text{Ad}(K)A^\Delta$ は, S の極小部分多様体になる. $\Delta = \{\alpha_i\}$ のとき, A^Δ を A_i と表すことにする, まず, 階数 2 の既約な対称対の場合の孤立軌道 (つまり A_1, A_2 を通る軌道) 上の錐について考える.

4.1 A_2 型の場合

$\mathfrak{m}$ の正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ をうまく取ると,

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \xi_i e_i \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 0 \right\}$$

$$F = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3\}$$

とできる. また, $R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ となる. A_2 型の場合は全ての制限ルートの重複度は一致するため, $m(\lambda) = m$ とおいていく. $H_{\alpha_1} = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3)$, $H_{\alpha_2} = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 - 2e_3)$ であり, A_2 型の場合, A_1 を通る軌道と A_2 を通る軌道は同じものが出てくるので, A_1 を通る軌道のみを考えれば良い.

4.1.1 $\text{Ad}(K)A_1$ 上の錐

$\Delta = \{\alpha_1\}$ とおけば,

$$A_1 = \frac{H_{\alpha_1}}{\|H_{\alpha_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 - e_2 - e_3)$$

となり,

$$R_+^\Delta = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, A_1 \rangle = 0\} = \{\alpha_2\}$$

である. ここで, $\bar{\mathcal{C}}$ 上の関数 f を

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\langle \alpha_1, x \rangle^2 \left\langle \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2, x \right\rangle \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1^2 \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

と定めれば,

$$(1) \quad f(tA_1) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} = t$$

(2) Δ を含まない任意の $\Delta' \subset F$ に対して, $\mathcal{C}^{\Delta'}$ 上では $x_1 = 0$ であるので, $f|_{\mathcal{C}^{\Delta'}} = 0$

を満たす. よって, f は定理 3 の仮定を満たすので, $\mathfrak{m}$ から錐 $C_{\text{Ad}(K)A_1}$ へのレトラクション Φ が構成され, 命題 2 から Φ は可微分レトラクションであることが分かる. 命題 3 からその Jacobian $J(d\Phi)_x$ は

$$J(d\Phi)_x = \|(\text{grad} f)_x\| \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A_1 \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}$$

と表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1^2 \left(x_1 + \frac{3}{2} x_2 \right) \right)^{-\frac{2}{3}} (x_1^2 + x_1 x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1^2 \left(x_1 + \frac{3}{2} x_2 \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{x_1^2}{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} J_1(x) = \|(\text{grad} f)_x\| &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1^2 \left(x_1 + \frac{3}{2} x_2 \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \|(x_1^2 + x_1 x_2)\alpha_1 + \frac{x_1^2}{2}\alpha_1\| \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1^2 \left(x_1 + \frac{3}{2} x_2 \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2} x_1^4 + 3x_1^3 x_2 + 2x_1^2 x_2^2} \end{aligned}$$

一方で,

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \left(\frac{\langle \alpha_1, A_1 \rangle}{\langle \alpha_1, x \rangle} f(x) \right)^m \left(\frac{\langle \alpha_1 + \alpha_2, A_1 \rangle}{\langle \alpha_1 + \alpha_2, x \rangle} f(x) \right)^m \\ &= \left(\frac{(x_1^2 (x_1 + \frac{3}{2} x_2))^{\frac{2}{3}}}{x_1 (x_1 + x_2)} \right)^m \\ &= \left(\frac{(x_1 (x_1 + \frac{3}{2} x_2)^2)^{\frac{1}{3}}}{x_1 + x_2} \right)^m \end{aligned}$$

いま,

$$(x_1 + x_2)^3 - x_1 \left(x_1 + \frac{3}{2} x_2 \right)^2 = \frac{3}{4} x_1 x_2^2 + x_2^3 \geq 0$$

であるから,

$$\left(\frac{(x_1 (x_1 + \frac{3}{2} x_2)^2)^{\frac{1}{3}}}{x_1 + x_2} \right) \leq 1$$

となる. ここで,

$$D = J_1(x) \times \left(\frac{(x_1 (x_1 + \frac{3}{2} x_2)^2)^{\frac{1}{3}}}{x_1 + x_2} \right)^2$$

とおくと,

$$J(d\Phi)_x = D \times \left(\frac{\left(x_1 \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}}{x_1 + x_2} \right)^{m-2}$$

だから, $D \leq 1$ ならば $m \geq 2$ のとき, $J(d\Phi)_x \leq 1$ となる.

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1^2 \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right) \right)^{-\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}x_1^2 + 3x_1^3x_2 + 2x_1^2x_2^2} \times \left(\frac{\left(x_1 \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}}{x_1 + x_2} \right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{4}{3}x_2^2} \left(x_1 \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}}{(x_1 + x_2)^2} \\ &= \left(\frac{(3x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2)^3 x_1^2 (2x_1 + 3x_2)^4}{3^3 2^4 (x_1 + x_2)^{12}} \right)^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned} &3^3 2^4 (x_1 + x_2)^{12} - (3x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2)^3 x_1^2 (2x_1 + 3x_2)^4 \\ &= 216x_1^{10}x_2^2 + 2376x_1^9x_2^3 + 11925x_1^8x_2^4 + 35838x_1^7x_2^5 + 71120x_1^6x_2^6 \\ &+ 96888x_1^5x_2^7 + 91152x_1^4x_2^8 + 57888x_1^3x_2^9 + 23328x_1^2x_2^{10} + 5184x_1x_2^{11} + 432x_2^{12} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるから, $D \leq 1$ となる. したがって, A_2 型の場合の A_1 を通る軌道上の錐は $m = m(\alpha_1) \geq 2$ のとき, 面積最小となる.

B_2 型, C_2 型, BC_2 型, G_2 型の場合についても A_2 型の場合と同様に $\bar{\mathcal{C}}$ 上の関数 f を具体的に与え, Jacobian を評価することで錐の面積最小性が示される.

結果, 次の表を得る. 面積最小錐には $\bigcirc$ が記してある.

type	symmetric pair	multiplicities	A_i	orbit	symm. or not	dim. of orbit and sphere	Area. min
A_2	$(\mathrm{SU}(3), \mathrm{SO}(3))$	$(1, 1)$	A_1	$\mathbb{R}P^2$	symmetric	$(2, 4)$	
	$(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3), \mathrm{SU}(3))$	$(2, 2)$	A_1	CP^2	symmetric	$(4, 7)$	$\bigcirc$ [Ke]
	$(\mathrm{SU}(6), \mathrm{Sp}(3))$	$(4, 4)$	A_1	$\mathbb{H}P^2$	symmetric	$(8, 13)$	$\bigcirc$ [Ka]
	(E_6, F_4)	$(8, 8)$	A_1	$\mathbb{O}P^2$	symmetric	$(16, 25)$	$\bigcirc$
B_2	$(\mathrm{SO}(5) \times \mathrm{SO}(5), \mathrm{SO}(5))$	$(2, 2)$	A_1	$\widetilde{G_2(\mathbb{R}^5)}$	symmetric	$(6, 9)$	$\bigcirc$ [HKT]
			A_2	$\mathrm{SO}(5)/\mathrm{U}(2)$		$(6, 9)$	$\bigcirc$ [Ke]
	$(\mathrm{SO}(5), \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(3))$	$(1, 1)$	A_1		symmetric	$(3, 5)$	
			A_2			$(3, 5)$	
	$(\mathrm{SO}(4+n), \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2+n))$	$(1, n)$	A_1		symmetric	$(n+2, 2n+3)$	$\bigcirc$ $(n \geq 2)$ [HKT]
			A_2			$(2n+1, 2n+3)$	$\bigcirc$ $(n \geq 2)$
C_2	$(\mathrm{Sp}(2), \mathrm{U}(2))$	$(1, 1)$	A_1	$\mathrm{U}(2)/\mathrm{O}(2)$	symmetric	$(3, 5)$	
			A_2			$(3, 5)$	
	$(\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2), \mathrm{Sp}(2))$	$(2, 2)$	A_1			$(6, 9)$	$\bigcirc$
			A_2	$\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2)$	symmetric	$(6, 9)$	$\bigcirc$
	$(\mathrm{Sp}(4), \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2))$	$(4, 3)$	A_1			$(11, 15)$	$\bigcirc$
			A_2	$\mathrm{Sp}(2)$	symmetric	$(10, 15)$	$\bigcirc$
	$(\mathrm{SU}(4), \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2)))$	$(2, 1)$	A_1			$(5, 7)$	$\bigcirc$
			A_2	$\mathrm{U}(2)$	symmetric	$(4, 7)$	$\bigcirc$ [L]
	$(\mathrm{SO}(8), \mathrm{U}(4))$	$(4, 1)$	A_1	$\mathrm{U}(4)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{U}(2))$		$(9, 11)$	$\bigcirc$
			A_2	$\mathrm{U}(4)/\mathrm{Sp}(2)$	symmetric	$(6, 11)$	$\bigcirc$

type	symmetric pair	multiplicities	A_i	orbit	symm. or not	dim. of orbit and sphere	Area. min
BC ₂	$(\mathrm{SU}(4+n), \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2+n)))$ $(\mathrm{SO}(10), \mathrm{U}(5))$ $(\mathrm{Sp}(4+n), \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2+n))$ $(E_6, \mathrm{T}^1 \times \mathrm{Spin}(10))$	$(2, (2n, 1))$ $(4, (4, 1))$ $(4, (4n, 3))$ $(6, (8, 1))$	A_1	$\mathrm{U}(5)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{U}(3))$ $\mathrm{U}(5)/(\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{U}(1))$		$(2n+3, 4n+7)$	$\bigcirc (n \geq 1)$
			A_2			$(4n+4, 4n+7)$	$\bigcirc (n \geq 1)$
			A_1			$(13, 19)$	$\bigcirc$
			A_2			$(14, 19)$	$\bigcirc$
			A_1			$(4n+11, 8n+15)$	$\bigcirc (n \geq 1)$
			A_2			$(8n+10, 8n+15)$	$\bigcirc (n \geq 1)$
			A_1			$(21, 31)$	$\bigcirc$
			A_2			$(24, 31)$	$\bigcirc$
G ₂	$(G_2, \mathrm{SO}(4))$ $(G_2 \times G_2, G_2)$	$(1, 1)$ $(2, 2)$	A_1			$(5, 7)$	
			A_2			$(5, 7)$	
			A_1			$(10, 13)$	$\bigcirc$
			A_2			$(10, 13)$	$\bigcirc$

5 Reducible cases

次に2つのR空間の直積上の錐について考えたい. (G, K) が2つの対称対 (G_i, K_i) ($i = 1, 2$) を用いて, $(G, K) = (G_1 \times G_2, K_1 \times K_2)$ と表される場合の s 表現を考えれば十分である. 各 $i = 1, 2$ に対して, (G_i, K_i) の階数を l_i とおけば, (G, K) の階数 l は $l = l_1 + l_2$ である. 対称対 (G_i, K_i) に関する記号を以下のように与える.

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{m}_i$$

を標準分解, $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{m}_i$ を極大可換部分空間, R_i を $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系, $F_i = \{\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{il_i}\}$ を制限ルート系の基本系, R_{i+} を正の制限ルート全体のなす集合とする. また,

$$C_i = \{H \in \mathfrak{a}_i \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in F_i)\},$$

$\Delta \subset F_i$ に対して,

$$C_i^\Delta = \{H \in \mathfrak{a}_i \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in \Delta), \langle \beta, H \rangle = 0 \ (\beta \in F_i \setminus \Delta)\}$$

とさだめる. (G_i, K_i) の s 表現の直和表現を考えると, それは (G, K) の s 表現となる. このとき, この s 表現の軌道空間 $\bar{\mathcal{C}}$ は,

$$\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}_1 \times \bar{\mathcal{C}}_2$$

と表される. $\Delta \subset F$ は $\Delta_i \subset F_i$ を用いて, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ と表される. 定理2により, Δ_i に対して, (G_i, K_i) の s 表現の極小軌道の基点 $A_i^{\Delta_i}$ が存在する. ここで, $k_i = \dim \text{Ad}(K_i)A_i^{\Delta_i}$, $k = k_1 + k_2$ とおくと,

$$A^\Delta = \sqrt{\frac{k_1}{k}} A_1^{\Delta_1} + \sqrt{\frac{k_2}{k}} A_2^{\Delta_2} \in \bar{\mathcal{C}}$$

は (G, K) の s 表現の極小軌道の基点になる.

定理 4. $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ($\Delta_i \subset F_i$) とする. $\text{Ad}(K_i)A_i^{\Delta_i}$ 上の錐に対して定理3と $\bar{\mathcal{C}}_i$ 上の関数 f_i によって面積非増加レトラクションが構成され, さらに

$$\prod_{\lambda \in R_{i+} \setminus R_{i+}^{\Delta_i}} \left(\frac{\langle \lambda, A_i^{\Delta_i} \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f_i(x) \right)^{m(\lambda)} \leq 1$$

が任意の $x \in \mathcal{C}_i$ について成り立つと仮定する. このとき, $\dim \text{Ad}(K_i)A_i^{\Delta_i} \geq 3$ ならば, $\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}_1 \times \bar{\mathcal{C}}_2$ 上のある関数 f と定理3によって $\text{Ad}(K)A^\Delta$ 上の錐への面積非増加レトラクションが構成され,

$$\prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A^\Delta \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)} \leq 1$$

が任意の $x \in \mathcal{C}$ について成り立つ.

Proof. $k_i = \dim \text{Ad}(K_i)A_i^{\Delta_i}$, $k = k_1 + k_2$ とし, $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{k}}$ とおく. すると, $A^\Delta = a_1 A_1^{\Delta_1} + a_2 A_2^{\Delta_2}$ と表される. $a_1^2 + a_2^2 = 1$ に注意しておく. $\overline{\mathcal{C}}_1 \times \overline{\mathcal{C}}_2$ 上の関数 f を, $(x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{C}}_1 \times \overline{\mathcal{C}}_2$ に対して,

$$f(x_1, x_2) = \frac{f_1(x_1)f_2(x_2)}{a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2)}$$

で定める. ただし, $f_1 = f_2 = 0$ のとき, $f = 0$ とする. f が定理 3 の仮定を満たすことを確かめよう. 任意の $t > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} f(tA^\Delta) &= \frac{f_1(ta_1 A_1^{\Delta_1})f_2(ta_2 A_2^{\Delta_2})}{a_2^3 f_1(ta_1 A_1^{\Delta_1}) + a_1^3 f_2(ta_2 A_2^{\Delta_2})} \\ &= \frac{t^2 a_1 a_2}{ta_2^3 a_1 + ta_1^3 a_2} \\ &= \frac{t^2}{t(a_2^2 + a_1^2)} \\ &= t \end{aligned}$$

である. また, Δ を含まない $\Delta' \subset F$ に対して, $\Delta'_i \subset F_i$ を用いて $\Delta' = \Delta'_1 \cup \Delta'_2$ と表すと, $i = 1, 2$ のどちらかについて, Δ'_i は Δ_i を含まない, したがって, $\mathcal{C}^{\Delta'}$ 上で, $f_1 = 0$ と $f_2 = 0$ の少なくともどちらか一方が成り立つ. したがって, $f|_{\mathcal{C}^{\Delta'}} = 0$ がなりたつ. 以上より, f は定理 3 の仮定を満たす. この f と定理 3 によって構成される $\mathfrak{m}$ から錐 $C_{\text{Ad}(K)A^\Delta}$ へのレトラクションを Φ とし, その Jacobian を考えよう. 命題 3 から, $x \in \mathcal{C}$ に対して

$$J(d\Phi)_x = \|(\text{grad} f)_x\| \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A^\Delta \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}$$

と計算される.

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \|(\text{grad} f)_x\| \\ J_2(x) &= \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A^\Delta \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)} \end{aligned}$$

とおく. まず, $J_1(x)$ を計算する.

$x = (x_1, x_2) = (x_1^1, \dots, x_1^{l_1}, x_2^1, \dots, x_2^{l_2}) \in \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1^j} &= \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1^j} a_1^3 f_2(x_2)^2}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^2} \quad (j \in \{1, \dots, l_1\}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2^j} &= \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_2^j} a_2^3 f_1(x_1)^2}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^2} \quad (j \in \{1, \dots, l_2\}) \end{aligned}$$

であるから,

$$(\text{grad} f)_x = \frac{a_1^3 f_2(x_2)^2 (\text{grad} f_1)_{x_1} + a_2^3 f_1(x_1)^2 (\text{grad} f_2)_{x_2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^2}$$

よって,

$$J_1(x) = \|(\text{grad} f)_x\| = \frac{\sqrt{a_1^6 f_2(x_2)^4 \|(\text{grad} f_1)_{x_1}\|^2 + a_2^6 f_1(x_1)^4 \|(\text{grad} f_2)_{x_2}\|^2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^2}$$

となる. 一方で, $R_+^\Delta = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, A^\Delta \rangle = 0\}$ について, $R_+ = R_{1+} \cup R_{2+}$, $A^\Delta = a_1 A_1^{\Delta_1} + a_2 A_2^{\Delta_2}$ だから, $R_+^\Delta = R_{1+}^{\Delta_1} \cup R_{2+}^{\Delta_2}$ である. したがって,

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^\Delta} \left(\frac{\langle \lambda, A^\Delta \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)} \\ &= \prod_{\lambda \in R_{1+} \setminus R_{1+}^{\Delta_1}} \left(\frac{\langle \lambda, a_1 A_1^{\Delta_1} \rangle}{\langle \lambda, x_1 \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)} \prod_{\mu \in R_{2+} \setminus R_{2+}^{\Delta_2}} \left(\frac{\langle \mu, a_2 A_2^{\Delta_2} \rangle}{\langle \mu, x_2 \rangle} f(x) \right)^{m(\mu)} \\ &= \prod_{\lambda \in R_{1+} \setminus R_{1+}^{\Delta_1}} \left(\frac{\langle \lambda, A_1^{\Delta_1} \rangle}{\langle \lambda, x_1 \rangle} f_1(x_1) \frac{a_1 f(x)}{f_1(x_1)} \right)^{m(\lambda)} \prod_{\mu \in R_{2+} \setminus R_{2+}^{\Delta_2}} \left(\frac{\langle \mu, A_2^{\Delta_2} \rangle}{\langle \mu, x_2 \rangle} f_2(x_2) \frac{a_2 f(x)}{f_2(x_2)} \right)^{m(\mu)} \end{aligned}$$

ここで,

$$J_{2i}(x_i) = \prod_{\lambda \in R_{i+} \setminus R_{i+}^{\Delta_i}} \left(\frac{\langle \lambda, A_i^{\Delta_i} \rangle}{\langle \lambda, x_i \rangle} f_i(x_i) \right)^{m(\lambda)}$$

とおき,

$$\sum_{\lambda \in R_{i+} \setminus R_{i+}^{\Delta_i}} m(\lambda) = \dim \text{Ad}(K_i) A_i^{\Delta_i} = k_i$$

に注意すれば,

$$J_2(x) = J_{21}(x_1) J_{22}(x_2) \left(\frac{a_1 f(x)}{f_1(x_1)} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2 f(x)}{f_2(x_2)} \right)^{k_2}$$

仮定から, $J_{2i}(x_i) \leq 1$ であるから,

$$J_2(x) \leq \left(\frac{a_1 f(x)}{f_1(x_1)} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2 f(x)}{f_2(x_2)} \right)^{k_2}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 f(x)}{f_1(x_1)} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2 f(x)}{f_2(x_2)} \right)^{k_2} &= \left(\frac{a_1}{f_1(x_1)} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{f_2(x_2)} \right)^{k_2} f(x)^k \\ &= \left(\frac{a_1}{f_1(x_1)} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{f_2(x_2)} \right)^{k_2} \left(\frac{f_1(x_1) f_2(x_2)}{a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2)} \right)^k \\ &= \frac{(a_1 f_2(x_2))^{k_1} (a_2 f_1(x_1))^{k_2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^k} \end{aligned}$$

であり,

$$X_1 = \frac{f_2(X_2)}{a_2}, \quad X_2 = \frac{f_1(x_1)}{a_1}$$

とおけばこれは,

$$\tilde{D}(X_1, X_2) := \frac{X_1^{k_1} X_2^{k_2}}{(a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2)^k}$$

と表される. よって, $X_1, X_2 > 0$ に対して, $\tilde{D}(X_1, X_2) \leq 1$ ならば, $x \in \mathcal{C}$ に対して $J_2(x) \leq 1$ になりたつ. したがって $\tilde{D}$ の最大値が 1 以下であれば良い. さらに, $t > 0$ に対して, $\tilde{D}(tX_1, tX_2) = \tilde{D}(X_1, X_2)$ であるから,

$$P = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1, X_2 > 0, a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2 = 1\}$$

上に $\tilde{D}$ を制限して考えれば十分である. $\tilde{D}|_P = X_1^{k_1} X_2^{k_2}$ であるから, $X_2 = \frac{1-a_1^2 X_1}{a_2^2}$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{D}}{\partial X_1} &= k_1 X_1^{k_1-1} X_2^{k_2} + X_1^{k_1} \left(-k_2 \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) X_2^{k_2-1} \\ &= X_1^{k_1-1} X_2^{k_2-1} (k_1 X_2 - k_2 \frac{a_1^2}{a_2^2} X_1) \\ &= k_1 X_1^{k_1-1} X_2^{k_2-1} (X_2 - X_1) \end{aligned}$$

となる. したがって, $\tilde{D}$ の臨界点は P 上で $X_1 = X_2 = 1$ のみであると分かる. X_1 が 0 または $\frac{1}{a_1^2}$ に近づくとき, $\tilde{D}$ は 0 に収束する. $\tilde{D}$ の最大値は, $\tilde{D}(1, 1) = 1$ である. したがって, $J_2(x) \leq 1$ が示された. つぎに, $J(d\Phi)_x$ について考える. $J_{1i}(x_i) = \|(\text{grad} f_i)_{x_i}\|$ とおくことにすると,

$$\begin{aligned} J(d\Phi)_x &= J_1(x) J_2(x) \\ &= \|(\text{grad} f)_x\| J_2(x) \\ &= \frac{\sqrt{a_1^6 f_2(x_2)^4 J_{11}(x_1)^2 + a_2^6 f_1(x_1)^4 J_{12}(x_2)^2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^2} J_{21}(x_1) J_{22}(x_2) \frac{(a_1 f_2(x_2))^{k_1} (a_2 f_1(x_1))^{k_2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^k} \\ &= \frac{\sqrt{a_1^6 f_2(x_2)^4 J_{11}(x_1)^2 J_{21}(x_1)^2 J_{22}(x_2)^2 + a_2^6 f_1(x_1)^4 J_{12}(x_2)^2 J_{21}(x_1)^2 J_{22}(x_2)^2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^{k+2}} \\ &\times (a_1 f_2(x_2))^{k_1} (a_2 f_1(x_1))^{k_2} \\ &\leq \frac{\sqrt{a_1^6 f_1(x_1)^4 + a_2^6 f_2(x_2)^4} (a_1 f_2(x_2))^{k_1} (a_2 f_1(x_1))^{k_2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^{k+2}} \\ &= \frac{\sqrt{a_1^6 f_2(x_2)^4 + a_2^6 f_1(x_1)^4} (a_1 f_2(x_2))^{k_1} (a_2 f_1(x_1))^{k_2}}{(a_2^3 f_1(x_1) + a_1^3 f_2(x_2))^{k+2}} \\ &= \frac{\sqrt{a_1^2 X_1^4 + a_2^2 X_2^4} X_1^{k_1} X_2^{k_2}}{(a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2)^{k+2}} \end{aligned}$$

となる.

$$D(X_1, X_2) = \frac{(a_1^2 X_1^4 + a_2^2 X_2^4) X_1^{2k_1} X_2^{2k_2}}{(a_1^2 X_1 + a_2^2 X_2)^{2k+4}}$$

とおけば, $J(d\Phi)_x$ の最大値は D の最大値以下になる. $D(tX_1, tX_2) = D(X_1, X_2)$ となるから, 先ほどと同様に $D|_P$ の最大値を考えれば十分である.

$$D|_P = (a_1^2 X_1^4 + a_2^2 X_2^4) X_1^{2k_1} X_2^{2k_2}$$

であるから, $D|_P$ の微分は以下のように計算される.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial X_1} &= 4 \left(a_1^2 X_1^3 - \frac{a_1^2}{a_2^2} a_2^2 X_2^3 \right) X_1^{2k_1} X_2^{2k_2} \\
&+ (a_1^2 X_1^4 + a_2^2 X_2^4) \left(2k_1 X_1^{2k_1-1} X_2^{2k_2} - 2k_2 \frac{a_1^2}{a_2^2} X_1^{2k_1} X_2^{2k_2-1} \right) \\
&= 4a_1^2 (X_1^3 - X_2^3) X_1^{2k_1} X_2^{2k_2} + 2(a_1^2 X_1^4 + a_2^2 X_2^4) (k_1 X_1^{2k_1-1} X_2^{2k_2} - k_1 X_1^{2k_1} X_2^{2k_2-1}) \\
&= 2X_1^{2k_1-1} X_2^{2k_2-1} \left\{ 2a_1^2 (X_1^3 - X_2^3) X_1 X_2 + k_1 \left(\frac{k_1}{k} X_1^4 + \frac{k_2}{k} X_2^4 \right) (X_2 - X_1) \right\} \\
&= 2a_1^2 X_1^{2k_1-1} X_2^{2k_2-1} \{ 2(X_1^3 - X_2^3) X_1 X_2 - (k_1 X_1^4 + k_2 X_2^4) (X_1 - X_2) \} \\
&= -2a_1^2 X_1^{2k_1-1} X_2^{2k_2-1} (X_1 - X_2) \{ (k_1 X_1^4 + k_2 X_2^4) - 2(X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2) X_1 X_2 \} \\
&= -2a_1^2 X_1^{2k_1-1} X_2^{2k_2-1} (X_1 - X_2) \\
&\times \{ ((k_1 - 3) X_1^4 + (k_2 - 3) X_2^4) + 3(X_1 - X_2)^4 + 10(X_1 - X_2)^2 \}.
\end{aligned}$$

したがって, D_P の臨界点は, $k_1 \geq 3, k_2 \geq 3$ のとき $X_1 = X_2 = 1$ のみである. また, X_1 が 0 または $\frac{1}{a_1^2}$ に近づくとき, $D|_P$ は 0 に収束する. $D(1, 1) = 1$ となるから, D の最大値は 1 である. すなわち $D \leq 1$. よって, $J(d\Phi)_x \leq 1$ となり, 構成した錐へのレトラクション Φ は面積非増加である. $\square$

参考文献

- [B] D. Bindschadler, *Absolutely area-minimizing singular cones of arbitrary codimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **243** (1987), 223–233.
- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1975.
- [BDG] E. Bombieri, E. DeGiorgi, E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969) 243–268.
- [ChB] B. Cheng, *Area-minimizing equivariant cones and coflat calibrations*, Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology. (1987).
- [F3] H. Federer, *Real flat chains, cochains, and variational problems*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974/75), 351–407.
- [HKT] D. Hirohashi, T. Kanno, and H. Tasaki, *Area-minimizing of the cone over symmetric R-space*, Tsukuba J. Math. **24** (2000), no.1, 171–188.
- [Hs] W. Y. Hsiang, *Minimal cones and the spherical Bernstein problem, II*, Invent. Math. **74** (1983), no.3, 351–369.

- [HTST] D. Hirohashi, H. Tasaki, H.J. Song, R. Takagi, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric space of compact type*, Differential Geom. Appl. **13** (2000), no.2, 167–177.
- [Ka] T. Kanno, *Area-minimizing cones over the canonical embedding of symmetric R-spaces*, Indiana Univ. Math. J. **51** (2002), no.1, 89–125.
- [KO] Y. Kitagawa and Y. Ohnita, *On the mean curvature of R-spaces*, Tôhoku Math. J. **35** (1983) 499–502.
- [Ke] M. Kerckhove, *Isolated orbits of the adjoint action and area-minimizing cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no.2, 497–503.
- [L] G. R. Lawlor, *A sufficient criterion for a cone to be area-minimizing*, Mem. Amer. Math. Soc. **91** (1991), no. 446.
- [T] M. Takeuchi, *On conjugate loci and cut loci of compact symmetric space I*, Tsukuba J. Math. **2** (1977), 35–68.