複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造

酒井 高司 (首都大学東京理工学研究科)*

1 導入

Kähler 多様体において対称的反正則等長変換による固定点集合の一つの連結成分として与えられる部分多様体を実形と呼ぶ。定義から, 実形は全測地的な Lagrange 部分多様体になる。田崎 [7] および田中-田崎 [4, 5, 6] はコンパクト型 Hermite 対称空間 M の二つの実形 L_1, L_2 の交叉の構造を調べ, 横断的に交わるならば, その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 および L_2 の対蹠集合になることを示した。さらに, L_1 と L_2 が互いに合同である場合, 交叉は L_1 および L_2 の大対蹠集合になる。ここで, 対蹠集合とはコンパクト対称空間 M の部分集合 A で, 各点 $x \in A$ における点対称 s_x によって A のすべての点が固定されるものをいう。対蹠集合のとりうる最大基数を M の 2-number と呼び, $\#_2 M$ と表す。特に, 基数が 2-number を実現するような M の対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ。これらの概念は Chen-長野 [1] によって導入された。

連結コンパクト半単純 Lie 群 G の随伴表現の軌道は G 不変な Kähler 構造をもち, 複素旗多様体と呼ばれる。複素旗多様体 M に対して, ある整数 $k_0 \geq 2$ が存在し, $k \geq k_0$ なる任意の整数 k について M に k 対称空間の構造を定めることができる。次節では複素旗多様体の対蹠集合の構造について解説する。各点 $x \in M$ における k 対称空間としての点対称による固定点集合を記述し, これが $k \geq k_0$ に依存しないことを述べる。これにより, M の極大対蹠集合は Weyl 群の軌道になり, 特にすべての極大対蹠集合は互いに合同であることが示される。複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 内の部分空間の系列の集合として与えられる複素旗多様体 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ は複素旗多様体の重要な例である。この複素旗多様体 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ には実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間の系列の集合として与えられる実旗多様体 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ が実形として埋め込まれる。この複素旗多様体における二つの実旗多様体が横断的に交わるならば, 交叉は $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合になる。また, 複素旗多様体 $F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ には四元数旗多様体 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ が実形として埋め込まれる。この実形も横断的に交わるならば, 交叉は $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ の対蹠集合になることが示される。

本稿の内容は入江博氏 (東京電機大学), 田崎博之氏 (筑波大学) との共同研究 ([2, 3]) による。

2 複素旗多様体の対蹠集合

G を連結コンパクト半単純 Lie 群とし, $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。0 でない $H \in \mathfrak{g}$ をとり, H を起点とする G の随伴表現の軌道を $M := \text{Ad}(G)H \subset \mathfrak{g}$ と表す。 H を固定する G のイソトロピー部分群を G_H と表すと, M は G/G_H と微分同型になる。このとき, G_H の Lie 環は $\mathfrak{g}_H = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = 0\}$ となる。 M には G 不変な Kähler 構造が入り, 複素旗多様体と呼ばれる。

*sakai-t@tmu.ac.jp

本研究は JSPS 科研費 基盤研究 (C) No.26400073 の助成を受けたものである。

H を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとる . $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ に対し

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [T, X] = \sqrt{-1}\alpha(T)X \ (T \in \mathfrak{t})\}$$

と定め , $\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{t}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ によって $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート系を定める . このとき , $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート空間分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

が得られ , $\mathfrak{g}_H$ は次のようになる .

$$\mathfrak{g}_H = \mathfrak{t} + \mathfrak{g} \cap \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}_\alpha .$$

$\mathfrak{g}$ を単純イデアルの直和に分解すると , ルート系 Δ は $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_r$ と既約ルート系の非交和に分解される . 各 Δ_i ($1 \leq i \leq r$) に対して , $\alpha_{i,j}(H) \geq 0$ をみたす基本系 $\alpha_{i,j}$ ($1 \leq j \leq p_i$) をとる . これらを合わせた $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ は Δ の基本系になる . ここで , $\alpha_{i,j}$ の順序を適当に入れ換えることにより $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, q_i+1 \leq j \leq p_i\}$ が $\{\alpha \in \Delta \mid \alpha(H) = 0\}$ の基本系であるとしてよい . 各 Δ_i の最高ルートを δ_i とし ,

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{p_i} m_{i,j} \alpha_{i,j}$$

と表す . このとき係数となる自然数 $m_{i,j}$ により

$$k_0 := \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{q_i} m_{i,j} \right\}$$

と自然数 k_0 を定める . $\mathfrak{t}^*$ の基底 $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ に対する $\mathfrak{t}$ の双対基底を $\{H_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ とし ,

$$Z := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} H_{i,j} \in \mathfrak{t}$$

と定める . さらに , 自然数 $k \geq k_0$ に対して

$$g_k := \exp \frac{2\pi}{k} Z \in \exp \mathfrak{t} \subset G_H$$

と定め , M の微分同型写像 θ_k を

$$\theta_k(x) = \text{Ad}(g_k)x \quad (x \in M)$$

と定める . θ_k は $(\theta_k)^k = 1$ をみたし , $H \in M$ を孤立固定点にもつ . ゆえに , θ_k は H における M の位数 k の点対称となり , M に k 対称空間の構造を定める . 特に , $k_0 = 2$ のとき M はコンパクト型 Hermite 対称空間になる . ここで , Z の定義より $[Z, \mathfrak{g}_H] = \{0\}$ となり , $\mathfrak{g}$ の線形変換 $\text{Ad}(g_k)$ の固有値 1 の固有空間は $\mathfrak{g}_H$ と一致することが示される . よって , θ_k による M の固定点集合 $F(\theta_k, M)$ は $M \cap \mathfrak{g}_H$ と一致する . したがって , $x \in M$ について , $\theta_k(x) = x$ となるための必要十分条件は $[H, x] = 0$ である . 同様に , $x \in M$ における位数 k の点対称を s_x と表すと , 次の定理を得る .

定理 1 ([2]). 各点 $x \in M$ において s_x による固定点集合は

$$F(s_x, M) = \{y \in M \mid [x, y] = 0\}$$

となる. 特に, $F(s_x, M)$ は $k \geq k_0$ に依らない.

複素旗多様体 M の部分集合 A が, 任意の $x, y \in A$ について $s_x(y) = y$ をみたすとき, A を対蹠集合と呼ぶ. M の対蹠集合の最大基数を k -number と呼び, $\#_k M$ と表す. これら定義は $k \geq k_0$ の取り方に依存しないことを注意する. 定理 1 より, M の対蹠集合 A によって生成される $\mathfrak{g}$ の部分空間は可換部分環になり, それを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}'$ が存在する. よって, $A \subset M \cap \mathfrak{t}'$ となる. 以上の議論により次の定理を得る.

定理 2 ([2]). 複素旗多様体 M の極大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ のある極大可換部分環 $\mathfrak{t}'$ との交叉 $M \cap \mathfrak{t}'$ になる. これは $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}'$ に関する Weyl 群の軌道であり, したがって M のすべての極大対蹠集合は G の随伴作用によって互いに合同になる.

3 複素旗多様体内の実形の交叉

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする. $n_1 + \dots + n_r < n$ をみたす正の整数 $n_1, \dots, n_r, n$ に対して, 旗多様体 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1, \dots, V_r) \left| \begin{array}{l} V_i \text{ は } \mathbb{K}^n \text{ の } \mathbb{K} \text{ 部分空間} \\ \dim V_i = n_1 + \dots + n_i \\ V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right. \right\}$$

と定義する.

$\mathbb{R}^n$ の部分空間を複素化することにより, 埋め込み $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \subset F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ を定める. $\mathbb{C}^n$ の複素共役は $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ 上に対称的反正則写像 σ を誘導し, σ による不動点集合が $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ になる. $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ には $SU(n)$ が推移的に作用し, $(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{C}^{n_1+n_2}, \dots, \mathbb{C}^{n_1+\dots+n_r})$ におけるイソトロピー部分群は $S(U(n_1) \times \dots \times U(n_{r+1}))$ となる. ここで, $n_{r+1} = n - (n_1 + \dots + n_r)$ である. したがって, $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ は $SU(n)/S(U(n_1) \times \dots \times U(n_{r+1}))$ と微分同型になる.

対称対 $(SU(n), SO(n))$ の極大トーラスの共役性により

$$SU(n) = SO(n) T SO(n)$$

と分解される. ここで

$$T = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} z_1, \dots, z_n \in U(1) \\ z_1 \cdots z_n = 1 \end{array} \right. \right\}.$$

この分解により, $u \in SU(n)$ を $u = g_1 a g_2$ ($g_1, g_2 \in SO(n), a \in T$) と表す. このとき

$$F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap u F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = g_1 (F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap a F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n))$$

となるので, 交叉 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ を調べれば十分である.

$a \in T$ に対して, a^2 による $\mathbb{C}^n$ の固有空間分解を

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \quad (1)$$

と表す. このとき, a^2 が対角行列であることから, 各固有空間 W_i は $\mathbb{C}^n$ の複素共役で不変な部分空間であり, $W_i^{\mathbb{R}} = W_i \cap \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\mathbb{R}^n = W_1^{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus W_s^{\mathbb{R}} \quad (2)$$

と分解される. $m = m_1 + \cdots + m_s$ をみたす非負の整数 $m, m_1, \dots, m_s$ について

$$F_{m_1}^{\mathbb{R}}(W_1^{\mathbb{R}}) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{R}}(W_s^{\mathbb{R}}) = \{x_1 \oplus \cdots \oplus x_s \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid x_i \in F_{m_i}^{\mathbb{R}}(W_i^{\mathbb{R}}) (1 \leq i \leq s)\}$$

と定め, これを $F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ の部分集合とみなす. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3 ([2]). $F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ ($0 < m \leq n$) 内において

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{m_1 + \cdots + m_s = m \\ 0 \leq m_i \leq \dim_{\mathbb{C}} W_i (1 \leq i \leq s)}} F_{m_1}^{\mathbb{R}}(W_1^{\mathbb{R}}) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{R}}(W_s^{\mathbb{R}})$$

となる. 交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となることであり, このとき

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$$

となる. これは $SU(n)$ の Weyl 群の軌道であり, $F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ および $F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ の大対蹠集合である.

証明. まず, 交叉を次のように表す.

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{V \in F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid V \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), a^{-1}V \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

一つめの条件 $V \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ は $\bar{V} = V$ と同値であり, 二つめの条件 $a^{-1}V \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\overline{a^{-1}V} = a^{-1}V \iff a\bar{V} = a^{-1}V \iff a^2\bar{V} = V \iff a^2V = V$$

となる. ゆえに

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{V \in F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid \bar{V} = V, a^2V = V\}$$

となる. この交叉を記述するために次の補題を用いる.

補題 4. U は有限次元複素ベクトル空間であり, 線形写像 $f : U \rightarrow U$ によって $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ と固有空間に分解されているとする. このとき, U の部分空間 V が f による不変部分空間であるための必要十分条件は

$$V = V \cap U_1 \oplus \cdots \oplus V \cap U_s$$

と直和分解されることである.

この補題を a^2 による固有空間分解 $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ に適用すると,

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{V \in F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid \bar{V} = V, V = V \cap W_1 \oplus \cdots \oplus V \cap W_s\}$$

を得る. すなわち, 任意の $V \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ に対して $m = m_1 + \cdots + m_s$ をみたす $m_1, \dots, m_s$ と $x_i \in F_{m_i}^{\mathbb{C}}(W_i) (1 \leq i \leq s)$ が存在して

$$V = x_1 \oplus \cdots \oplus x_s$$

と表すことができる. ここで, V と W_i が複素共役で不変であることから各 x_i も複素共役で不変であることが分かる. ゆえに, $x_i \in F_{m_i}^{\mathbb{R}}(W_i^{\mathbb{R}})$ とみなせる. よって

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{m_1 + \cdots + m_s = m \\ 0 \leq m_i \leq \dim_{\mathbb{C}} W_i (1 \leq i \leq s)}} F_{m_1}^{\mathbb{R}}(W_1^{\mathbb{R}}) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{R}}(W_s^{\mathbb{R}})$$

を得る. 定理の後半の主張はこの表示からただちに得られる. □

定理 5 ([2]). $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) (n_1 + \cdots + n_r < n)$ 内において

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid V_j \in F_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) (1 \leq j \leq r)\} \end{aligned}$$

となる. 交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となることであり, このとき

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{(W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+n_2}}, \dots, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}}) \\ & \quad \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1} \leq n, 1 \leq i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \leq n, \dots, \\ & \quad 1 \leq i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \leq n, \\ & \quad \#\{i_1, \dots, i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\} \end{aligned}$$

となる. これは $SU(n)$ の Weyl 群の軌道であり, $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合である.

証明.

$$\begin{aligned} F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid V_j \in F_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) (1 \leq j \leq r)\}, \\ aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid V_j \in aF_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) (1 \leq j \leq r)\}, \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid V_j \in F_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) (1 \leq j \leq r)\} \end{aligned}$$

と表すことができる. 定理 3 より, すべての i について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となるとき, 各 $j (1 \leq j \leq r)$ について

$$\begin{aligned} & F_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1 + \cdots + n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1 + \cdots + n_j}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1 + \cdots + n_j} \leq n\} \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{(W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_{n_1+n_2}}, \dots, W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_{n_1+\dots+n_r}}) \\ & \quad | 1 \leq i_1 < \dots < i_{n_1} \leq n, 1 \leq i_{n_1+1} < \dots < i_{n_1+n_2} \leq n, \dots, \\ & \quad 1 \leq i_{n_1+\dots+n_{r-1}+1} < \dots < i_{n_1+\dots+n_r} \leq n, \\ & \quad \#\{i_1, \dots, i_{n_1+\dots+n_r}\} = n_1 + \dots + n_r\} \end{aligned}$$

となり，交叉は離散的である．

次に，もしある i について $\dim_{\mathbb{C}} W_i \geq 2$ であれば，交叉 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ は離散的でないことを示す．一般性を失うことなく $\dim_{\mathbb{C}} W_1 \geq 2$ であると仮定してよい． $\mathbb{R}^n$ の基底 $v_1, \dots, v_n$ で直和分解 (2) に適合しているものをとる．このとき $v_1, \dots, v_n$ は直和分解 (1) に適合した $\mathbb{C}^n$ の基底にもなる． $v_1, v_2 \in W_1$ であるとする．各 j ($1 \leq j \leq r$) について

$$\begin{aligned} & \{\langle l, v_3, \dots, v_{n_1+\dots+n_j+1} \rangle_{\mathbb{R}} \mid 0 \neq l \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}\} \\ & \subset F_{n_1+\dots+n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1+\dots+n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

となり，したがって $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ の表示から

$$\begin{aligned} & \{(\langle l, v_3, \dots, v_{n_1+1} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle l, v_3, \dots, v_{n_1+n_2+1} \rangle_{\mathbb{R}}, \dots, \\ & \quad \langle l, v_3, \dots, v_{n_1+\dots+n_r+1} \rangle_{\mathbb{R}}) \mid 0 \neq l \in \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}\} \\ & \subset F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

となる．これは交叉 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ が離散的でないことを示している．□

$\mathbb{C}^{2n}$ において

$$iv = \sqrt{-1}v, \quad jv = J\bar{v}, \quad kv = ijv \quad (v \in \mathbb{C}^{2n})$$

によって i, j, k を定める．ここで，

$$J = \begin{bmatrix} O & 1_n \\ -1_n & O \end{bmatrix}.$$

この i, j, k により $\mathbb{C}^{2n}$ は四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^n$ と同一視される． $j : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ は $F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ 上の反正則対合を誘導し，これにより固定される部分集合は $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ と同一視できる．したがって， $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ は $F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ に実形として埋め込まれる．

対称対 ($SU(2n), Sp(n)$) の極大トーラスの共役性により

$$SU(2n) = Sp(n) T Sp(n)$$

と分解される．ここで

$$T = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} X & O \\ O & X \end{array} \right] \mid X = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}, \begin{array}{l} z_1, \dots, z_n \in U(1) \\ z_1 \cdots z_n = 1 \end{array} \right\}.$$

この分解により, $u \in SU(2n)$ を $u = g_1 a g_2$ ($g_1, g_2 \in Sp(n), a \in T$) と表す. このとき

$$F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap u F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = g_1 (F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n))$$

となるので, 交叉 $F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ を調べれば十分である.

$a \in T$ に対して, a^2 による $\mathbb{C}^{2n}$ の固有空間分解を

$$\mathbb{C}^{2n} = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$$

と表す. このとき, 各固有空間 W_i は j で不変であり, $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$ の四元数部分空間になる. $m = m_1 + \dots + m_s$ をみたす非負の整数 $m, m_1, \dots, m_s$ について

$$F_{m_1}^{\mathbb{H}}(W_1) \times \dots \times F_{m_s}^{\mathbb{H}}(W_s) = \{x_1 \oplus \dots \oplus x_s \in F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \mid x_i \in F_{m_i}^{\mathbb{H}}(W_i) (1 \leq i \leq s)\}$$

と定め, これを $F_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ の部分集合とみなす. この設定の下で, 定理 3, 定理 5 と同様の証明により次の二つの定理を得る.

定理 6 ([3]). $F_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ ($0 < m \leq n$) 内において

$$F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = \bigcup_{\substack{m_1 + \dots + m_s = m \\ 0 \leq m_i \leq \dim_{\mathbb{H}}(W_i) (1 \leq i \leq s)}} F_{m_1}^{\mathbb{H}}(W_1) \times \dots \times F_{m_s}^{\mathbb{H}}(W_s)$$

となる. 交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{H}} W_i = 1$ となることであり, このとき

$$F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = \{W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$$

となる. これは $F_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合であり, $F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ の大対蹠集合である.

定理 7 ([3]). $F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ ($n_1 + \dots + n_r < n$) 内において

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \\ &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) \mid V_j \in F_{n_1 + \dots + n_j}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_{n_1 + \dots + n_j}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) (1 \leq j \leq r)\} \end{aligned}$$

となる. 交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{H}} W_i = 1$ となることであり, このとき

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap a F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \\ &= \{(W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_{n_1+n_2}}, \dots, W_{i_1} \oplus \dots \oplus W_{i_{n_1+\dots+n_r}}) \\ & \quad \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{n_1} \leq n, 1 \leq i_{n_1+1} < \dots < i_{n_1+n_2} \leq n, \dots, \\ & \quad 1 \leq i_{n_1+\dots+n_{r-1}+1} < \dots < i_{n_1+\dots+n_r} \leq n, \\ & \quad \#\{i_1, \dots, i_{n_1+\dots+n_r}\} = n_1 + \dots + n_r\} \end{aligned}$$

となる. これは $F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合である.

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [2] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.
- [3] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem*, to appear in Proceedings in Mathematics and Statistics, ICM Satellite Conference on “Real and Complex Submanifolds”, Daejeon, Korea, 2014.
- [4] M.S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.
- [5] M.S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [6] M.S. Tanaka and H. Tasaki, *Correction to: “The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type”* to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [7] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.