

Lie-Poisson 代数の量子化（行列正則化）と IKKT 行列模型

Abstract: Lie-Poisson 代数の量子化について研究した．質量変形された IKKT 行列模型の古典解はリー代数の次元が行列模型の行列の数と一致する半単純リー代数から構成される．質量が 0 となる極限で行列のサイズが無限に近づく極限での古典解により記述される幾何について考察する．Lie-Poisson 多様体はその幾何学的対象物とみなされる．カシミア多項式で定義される多様体上の Lie-Poisson 代数の「弱い行列正則化」と呼ばれる量子化を提供する．カシミア多項式で生成されるイデアルでの商空間の行列正則化を定義するために，そのイデアルの Gröbner 基底を固定する．Gröbner は多項式の剰余項を決める．この剰余項をリー代数の表現行列で置き換えることが，大まかには，弱い行列正則化に対応する．

このプロセスをもう少し具体的に以下でまとめる．半単純リー代数を含むようなある条件を付けた，あるリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．それに対応する Lie-Poisson 代数で，ユークリッド空間の座標関数の座標環に Poisson 構造をいれたものを $A_{\mathfrak{g}}$ とおく．カシミア多項式とカシミア作用素は量子化で対応がある． $A_{\mathfrak{g}}$ のカシミア多項式を選び，それが生成するイデアルを $I(C)$ であるとする． $A_{\mathfrak{g}}/I(C)$ もまた，Lie-Poisson 代数として得られる． $I(C)$ の Gröbner basis を用いて，任意の $f \in A_{\mathfrak{g}}$ に対して，その剰余項が r_f としてきまる． V^{μ} を $\mathfrak{g}$ の既約表現の表現空間であるとする．このとき，行列正則化 $A_{\mathfrak{g}}/I(C) \rightarrow gl(V^{\mu})$ を $q_{A/I, \mu} := R_{\mu} \circ \rho_{U/I, \mu} \circ q_{U/I} :$ で定義する．

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & q_{A/I, \mu} \in Q & & & & \\
 & & \curvearrowright & & & & \\
 & & q_{\mu}^{pre} \in Q & & & & \\
 & & \curvearrowright & & & & \\
 A_{\mathfrak{g}}/I(C) & \xrightarrow{q_{U/I} \in Q} & \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}[\hbar]/I(C(X)) & \xrightarrow{\rho_{U/I, \mu}} & gl(V^{\mu}) & \xrightarrow{R_{\mu}} & gl(V^{\mu}) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 [f(x)] = [r_f + h_f] & \mapsto & [q_U(r_f)] = [\sum_I a_I X_{(i_1, \dots, i_m)}] & \mapsto & \sum_I a_I e_{(i_1, \dots, i_m)}^{(\mu)} & \mapsto & \sum_{|I|=m < n_{\mu}} a_I e_{(i_1, \dots, i_m)}^{(\mu)}
 \end{array}$$

ただし $q_{U/I} : A_{\mathfrak{g}}/I(C) \rightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{g}}[\hbar]/I(C(X))$ は， $A_{\mathfrak{g}}/I(C)$ から $I(C)$ に対応するイデアルで包絡代数を割った空間への量子化である． $\rho_{U/I, \mu}$ は $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}[\hbar]/I(C(X))$ から $gl(V^{\mu})$ への表現であり， R_{μ} は多項式環の次数に制限を与える射影作用素である．

具体例として，Lie 代数として $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(3)$ に対する行列正則化を与えた． $\mathfrak{su}(3)$ の場合には，2 次のカシミアに対する行列正則化だけではなく，3 次のカシミア多項式に対する行列正則化についても与えた．

この講演は郷原惇平氏 (TUS) との共同研究に基づく．
srXiv:2503.24060, arXiv:2205.09019