

Hermann 型作用の主軌道の 部分多様体幾何的特徴づけ

小池 直之

東京理科大学理学部数学科
koike@ma.kagu.tus.ac.jp

2011 年 3 月 21 日

目次

- ① Hermann 型作用
- ② 等焦部分多様体
- ③ 複素等焦部分多様体
- ④ プロパー複素等径部分多様体
- ⑤ プロパー複素等焦部分多様体
- ⑥ 先行結果
- ⑦ 今回得た結果
- ⑧ 証明の概略

G/K : 非コンパクト型対称空間

G_κ/K : G/K のコンパクト双対

H : G の対称部分群

$\theta : (\text{Fix } \theta)_0 \subset K \subset \text{Fix } \theta$ を満たす G の Cartan 対合

$\tau : (\text{Fix } \tau)_0 \subset H \subset \text{Fix } \tau$ を満たす G の対合

必要ならば、 H をその適当な共役群に置き換えることにより、
 $\theta \circ \tau = \tau \circ \theta$ と仮定してよい。

H_κ : H の $H \cap K$ に関するコンパクト双対

$H_\kappa \curvearrowright G_\kappa/K$ は **Hermann 作用** とよばれ、

$H \curvearrowright G/K$ は **Hermann 型作用** とよばれる。

$G/K \neq ???$ のとき、

$$\begin{array}{ccc}
 [H_\kappa] & \in & \{G_\kappa/K \text{ 上の Hermann 作用の軌道同値類} \} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \text{ 1:1} \\
 [H] & \in & \{G/K \text{ 上の Hermann 型作用の軌道同値類} \}
 \end{array}$$

2. 等焦部分多様体

G/K : 対称空間

$M \hookrightarrow G/K$

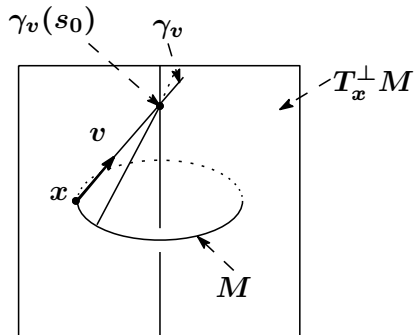
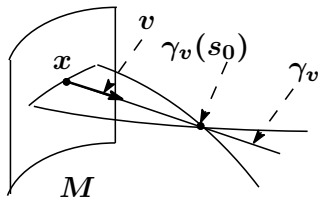
$v \in T_x^\perp M$

$\gamma_v : \gamma'_v(0) = v$ となる法測地線

定義

$s_0 (\in \mathbb{R})$: M の γ_v に沿う **フォーカル半径**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma_v(s_0)$: γ_v に沿う M のフォーカル点



A_v : M の v に対する形作用素

R : G/K の曲率テンソル, $R(v) := R(\cdot, v)v$

Y_X : $Y(0) = X (\in T_x M)$ となる γ_v に沿う強 M ヤコビ場

Y_X は、次のように記述される :

$$\begin{aligned}
 Y_X(s) &= P_{\gamma_v|_{[0,s]}}(Q_v(s)X) \\
 &\left(\begin{array}{l} P_{\gamma_v|_{[0,s]}} : \gamma_v|_{[0,s]} \text{ に沿う平行移動} \\ Q_v(s) := \cos(s\sqrt{R(v)}) - \frac{\sin(s\sqrt{R(v)})}{\sqrt{R(v)}} \circ A_v \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

M が平坦な切断をもつ、つまり、
 $\Sigma_x := \exp^\perp(T_x^\perp M) : (\forall x \in M)$ が平坦かつ全測地的である
 とする。

このとき、強 M ヤコビでない M ヤコビ場は、零点をもたない。
 それゆえ、次の事実が成り立つ：

事実 2.1.

$$\begin{aligned} & s_0 \in \mathbb{R} : \gamma_v \text{ に沿う } M \text{ のフォーカル半径} \\ \iff & \exists X(\neq 0) \in T_x M \text{ s.t. } Y_X(s_0) = 0 \\ \iff & \text{Ker } Q_v(s_0) \neq \{0\} \end{aligned}$$

定義 (Terng-Thorbergsson)

M : 等焦部分多様体

- $\Longleftrightarrow$
 def
- M はコンパクトである
 - M の法ホロノミー群は自明である
 - M は平坦な切断をもつ
 - M の任意の平行法ベクトル場 v に対し、 γ_{v_x} に沿うフォーカル半径達は $x(\in M)$ によらず一定である

3. 複素等焦部分多様体

G/K : 非コンパクト型対称空間

$M \hookrightarrow G/K$: 平坦な切断をもつ部分多様体

$$Q_v^c(z) \in ((T_x M)^c)^* \otimes (T_x M)^c$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} Q_v^c(z) := \cos(z\sqrt{R(v)^c}) - \frac{\sin(z\sqrt{R(v)^c})}{\sqrt{R(v)^c}} \circ A_v^c$$

$$(z \in \mathbb{C})$$

定義 (K)

$z_0 (\in \mathbb{C})$: M の γ_v に沿う複素フォーカル半径

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Ker } Q_v^c(z_0) \neq \{0\}$$

注意 1

γ_v に沿う複素フォーカル半径は、 A_v と $R(v)$ のみで決まる。

注意 2

外の空間がユークリッド空間のとき、

$$Q_v^c(z) = \text{id} - zA_v^c$$

となり、それゆえ、 γ_v に沿う複素フォーカル半径達は、 A_v の固有値の逆数 (v に対する主曲率半径) 達と一致する (よって、すべて、実数となる)。

より一般に、外の空間が擬ユークリッド空間のとき、

$$Q_v^c(z) = \text{id} - zA_v^c$$

となり、それゆえ、 γ_v に沿う複素フォーカル半径達は、 A_v^c の固有値の逆数 (v に対する複素主曲率半径) 達と一致する。ここで、 A_v は、実対角化可能であるとは限らないことを注意しておく。

$\mathcal{FR}_v$: γ_v に沿う M のフォーカル半径の全体

$\mathcal{CFR}_v$: γ_v に沿う M の複素フォーカル半径の全体

事実 3.1.

$$\mathcal{FR}_v \subset \mathcal{CFR}_v$$

定義 (K)

M : 複素等焦部分多様体

(正確には、等複素焦部分多様体とよぶべき)

- $\Longleftrightarrow$
def
- M は完備である
 - M の法ホロノミー群は自明である
 - M は平坦な切断をもつ
 - M の任意の平行法ベクトル場 v に対し、 γ_{v_x} に沿う複素フォーカル半径達は $x(\in M)$ によらず一定である

$$f : M \hookrightarrow G/K \quad : \quad C^\omega \text{ 部分多様体}$$

$$v \in T_x^\perp M$$

$$f^c : M^c \hookrightarrow G^c/K^c$$

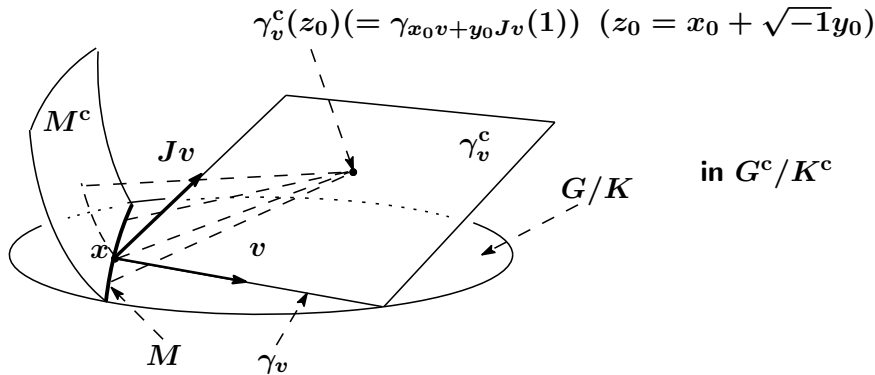
$(f : M \hookrightarrow G/K \text{ の複素化})$

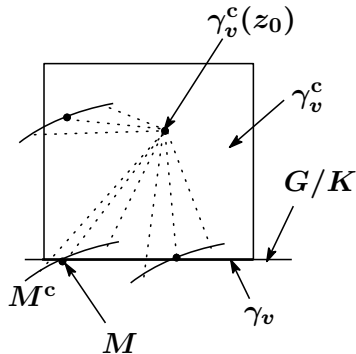
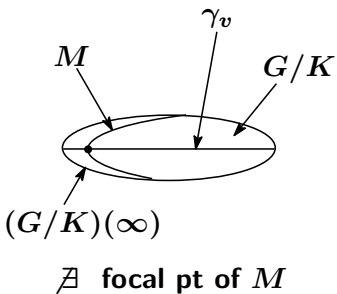
事実 3.2(K).

$z_0 (\in \mathbb{C}) : M \text{ の } \gamma_v \text{ に沿う複素フォーカル半径}$

$\iff \gamma_v^c(z_0) : s \mapsto \gamma_v^c(sz_0) \text{ に沿う } M^c \text{ のフォーカル点}$

$(\gamma_v^c (: \mathbb{C} \rightarrow G^c/K^c) : \gamma_v \text{ の複素化})$





定義

$$\begin{array}{l}
 (J, g) : M \text{ の } \textcolor{red}{\text{アンチケーラー構造}} \\
 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \bullet J : M \text{ の複素構造} \\
 \bullet g : M \text{ のニュートラル計量} \\
 \bullet g(JX, JY) = -g(X, Y) \quad (\forall X, Y \in TM) \\
 \bullet \nabla J = 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

def

例 1.

$$S^m(\bar{c}) \subset H^{m+1}(c)$$

$v : S^m(\bar{c})$ の点 x における単位法ベクトル

$X : S^m(\bar{c})$ の点 x における単位接ベクトル

このとき、次の関係式が成り立つ：

$$Q_v^c(z)(X) = \left(\cosh(\sqrt{-c}z) - \frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-c}z) \right) X$$

$$Q_v^c(z)(X) = 0 \Leftrightarrow \tanh(\sqrt{-c}z) = \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}-c}} \text{ (< 1)}$$

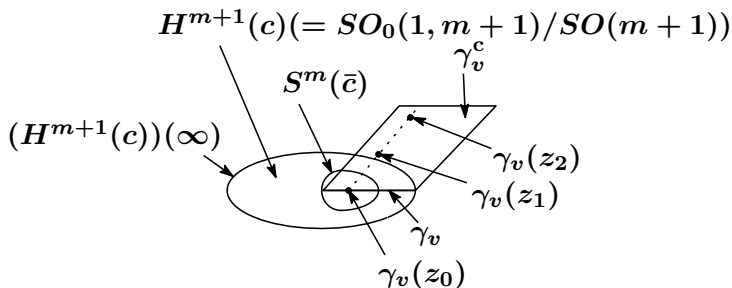
$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}-c}} + j\pi\sqrt{-1} \right)$$

事実 3.3.

$S^m(\bar{c}) (\subset H^{m+1}(c))$ に対し、次が成り立つ：

$$\mathcal{CFR}_v = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}} - c} + j\pi\sqrt{-1} \right) \mid j \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\mathcal{FR}_v = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}} - c} \right\}.$$



in $SO(m+2, \mathbb{C})/SO(m+1, \mathbb{C})$

$$z_j := \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}} - c} + j\pi\sqrt{-1} \right)$$

例 2.

$$H^m(\bar{c}) \subset H^{m+1}(c)$$

$v : H^m(\bar{c})$ の点 x における単位法ベクトル

$X : H^m(\bar{c})$ の点 x における単位接ベクトル

このとき、次 n 関係式が成り立つ：

$$Q_v^c(z)(X) = \left(\cosh(\sqrt{-c}z) - \frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-c}z) \right) X$$

$$Q_v^c(z)(X) = 0 \Leftrightarrow \tanh(\sqrt{-c}z) = \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}-c}} \quad (> 1)$$

$$\Leftrightarrow \tanh(\sqrt{-c}z + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}) (= \frac{1}{\tanh(\sqrt{-c}z)}) = \frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}} \quad (< 1)$$

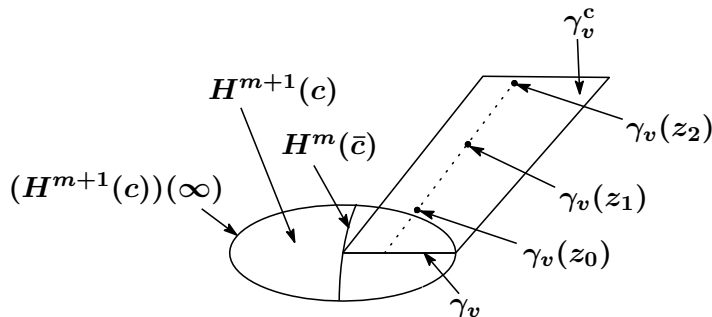
$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}} + (j + \frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} \right)$$

事実 3.4.

$H^m(\bar{c}) (\subset H^{m+1}(c))$ に対し、次が成り立つ：

$$\mathcal{CFR}_v = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}} + \left(j + \frac{1}{2}\right) \pi \sqrt{-1} \right) \mid j \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\mathcal{FR}_v = \emptyset$$



$$z_j := \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\bar{c}-c}}{\sqrt{-c}} + (j + \frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} \right)$$

例 3.

$\mathbb{R}^m \subset H^{m+1}(c)$ (horosphere)

$v : \mathbb{R}^m$ の点 x における単位法ベクトル

$X : \mathbb{R}^m$ の点 x における単位接ベクトル

このとき、次の関係式が成り立つ：

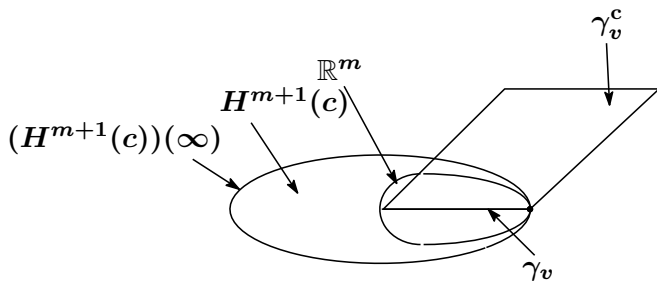
$$Q_v^c(z)(X) = (\cosh(\sqrt{-c}z) - \sinh(\sqrt{-c}z)) X = e^{-\sqrt{-c}z} X$$

$$Q_v^c(z)(X) \neq 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

事実 3.5.

$\mathbb{R}^m (\subset H^{m+1}(c))$ に対し、次が成り立つ：

$$\mathcal{FR}_v = \mathcal{CFR}_v = \emptyset$$



事実 3.6.

M を $H^m(c)$ 内の $\|A_v\|_{\text{op}} < \sqrt{-c}$ ($\forall v \in S^\perp M$) を満たす任意の部分多様体とすると、

M 上の ε チューブ $t_\varepsilon(M)$ は、等焦部分多様体になってしまうが、複素等焦部分多様体ではない。

ここで、 ε は、十分小さな正の数である。

この事実から、非コンパクト型対称空間内の非コンパクトな部分多様体に対しては、等焦性は本質的な性質ではないが、複素等焦性は本質的な性質であることが伺える。

4. プロパー複素等径部分多様体

$$M \hookrightarrow \mathbb{R}_\nu^m$$

$A : M$ の形テンソル

定義

M : 複素等径部分多様体

- $\begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ \text{def} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \bullet M \text{ の法ホロノミー群は自明である} \\ \bullet M \text{ の各平行法ベクトル } v \text{ に対し、} \\ \quad A_{v_x}^c \text{ の固有値らは、} x \text{ によらず} \\ \quad \text{一定である} \end{array} \right.$

定義

M : プロパー複素等径部分多様体

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ M \text{ は複素等径部分多様体である} \\ \bullet \ \text{各法ベクトル } w \text{ に対し、} A_w^c \text{ は擬正規直交基底} \\ \quad \text{に関して対角化可能である} \end{array} \right.$$

注意

V : 非退化内積をもつベクトル空間, $A : V$ の線形変換
 A^c がある擬正規直交基底に関して対角化可能であるとき
 A はプロパーであるという。

同様に、(無限次元) 擬ヒルベルト空間内で複素等径部分
 多様体、および、プロパー複素等径部分多様体の概念が
 定義される。

[illegible]

5. プロパー複素等焦部分多様体

G/K : 非コンパクト型対称空間

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) & \hookrightarrow & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 M & \hookrightarrow & G/K
 \end{array}$$

事実 5.1(K).

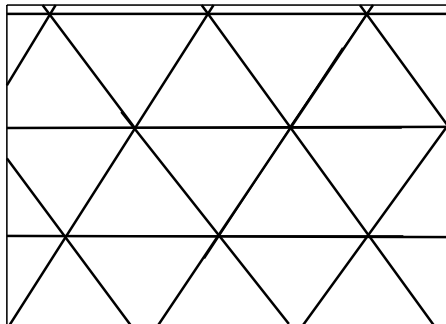
$$\begin{array}{l}
 M : \text{複素等焦部分多様体} \\
 \iff \widetilde{M} : \text{複素等径部分多様体}
 \end{array}$$

定義

M : プロパー複素等焦部分多様体
 $\begin{matrix} \longleftrightarrow \\ \text{def} \end{matrix} \quad \widetilde{M} : \text{プロパー複素等径部分多様体}$

事実 5.2.

コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体 M の
 任意の点 x におけるフォーカル集合は、法空間
 $T_x^\perp M$ 内の無限に多くの超平面達の和集合の法指数
 写像による像として与えられる。また、それらの
 超平面に関する鏡映達によって生成される群は、
 離散群、つまり、**Coxeter** 群である。



$$T_{x_0}^\perp M$$

事実 5.3.

$M : C^\omega$ 複素等焦部分多様体

このとき、

M : プロパー複素等焦部分多様体

$\iff \left\{ \begin{array}{l} M^c \text{ の任意の点 } x \text{ におけるフォーカル集合は、法空間} \\ T_x^\perp(M^c) \text{ 内の無限に多くの複素超平面達の和集合の} \\ \text{法指数写像による像として与えられる。また、それら} \\ \text{の超平面に関する位数 2 の複素鏡映達によって生成} \\ \text{される群は、離散群、つまり、Coxeter 群である。} \end{array} \right.$

このように、プロパー複素等焦部分多様体は、
 良い複素フォーカル構造をもつ複素等焦部分
 多様体と解釈される。

6. 先行結果

$M \hookrightarrow \widetilde{M}$: リーマン部分多様体

A : M の形テンソル, R : $\widetilde{M}$ の曲率テンソル

定義

$$\begin{aligned} & M : \text{curvature-adapted} \\ \iff_{\text{def}} & \begin{cases} R(v)(T_x M) \subset T_x M \quad (\forall x \in M, \forall v \in T_x^\perp M) \\ [A_v, R(v)] = 0 \end{cases} \\ & (R(v) := R(\cdot, v)v) \end{aligned}$$

事実 6.1(K).

Hermann 型作用の主軌道は、curvature-adapted かつ
プロパー複素等焦部分多様体である。

7. 今回得た結果

G/K : 階数 $r(\geq 2)$ の非コンパクト型対称空間

定理 1

G/K 内の余次元 2 以上の既約な C^ω 級の **curv.-adapted** プロパー複素等焦部分多様体は、ある **Hermann** 型作用の主軌道である。

定理 2

G/K のルート系が **reduced** であるとする。余次元 r の既約な C^ω 級のプロパー複素等焦部分多様体は、ある **Hermann** 型作用の主軌道である。

8. 証明の概略

事実 8.1(等質性定理)(K).

G/K 内の余次元 2 以上の既約な C^ω 級のプロパー複素等焦部分多様体は、等質である。

事実 8.2(K).

等質な複素等焦部分多様体は、ある超複素極作用の主軌道である。

事実 8.3(K).

全測地的軌道をもつ超複素極作用は、**Hermann** 型作用である。

定理 1 の証明の概略

M : 定理 1 の主張におけるようなプロパー複素等焦部分多様体

$\text{codim } M \geq 2$ & M : 既約

— — — $> M$: 等質

事実 8.1

— — — $> M$: ある超複素極作用 $H \curvearrowright G/K$ の主軌道

事実 8.2

M : curvature-adapted

— — — $> H \curvearrowright G/K$: 全測地的軌道をもつ

— — — $> H \curvearrowright G/K$: Hermann 型作用

事実 8.3

q.e.d.

定理 2 の証明の概略

M : 定理 2 の主張におけるようなプロパー複素等焦部分多様体

$\text{codim } M = \text{rank } G/K \geq 2$, G/K のルート系 : reduced

— — — $> M$: curvature-adapted

— — — $> M$: ある Hermann 型作用の主軌道

定理 1

q.e.d.