

プロパー複素等焦部分多様体と 平坦な切断をもつ等径部分多様体

小池 直之

東京理科大学理学部数学科
koike@ma.kagu.tus.ac.jp

2011年3月21日

目次

- ① 平坦な切断をもつ等径部分多様体
- ② 等焦部分多様体と平坦な切断をもつ等径部分多様体
- ③ 複素等焦部分多様体と平坦な切断をもつ等径部分多様体
- ④ プロパー複素等径部分多様体と代数的等径部分多様体
- ⑤ 相互関係
- ⑥ 可解群作用
- ⑦ 今回得た結果

1. 平坦な切断をもつ等径部分多様体

N : リーマン多様体

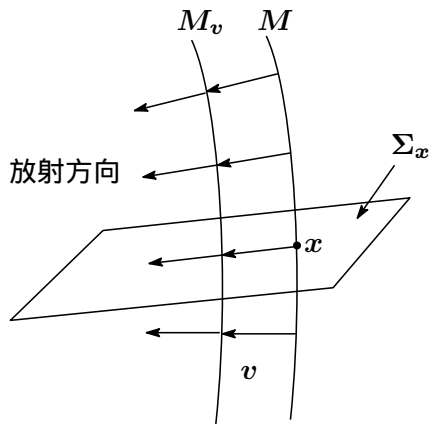
$M \hookrightarrow N$: 部分多様体

定義 (Heintze-Liu-Olmos)

M : 平坦な切断をもつ等径部分多様体

- \Leftrightarrow
def
- M の法ホロノミー群は自明である
 - M は平坦な切断をもつ
 - M の十分近くの平行部分多様体達が、放射方向に関して CMC である

平坦な切断をもつ等径部分多様体



2. 等焦部分多様体と平坦な切断をもつ

等径部分多様体

G/K : コンパクト型対称空間

M : G/K 内のコンパクト部分多様体

A : M の形テンソル

R : G/K の曲率テンソル

v : M の平行法ベクトル場

$$F_{v_x}(s) := \det \left(\cos(s\sqrt{R(v_x)}) - \frac{\sin(s\sqrt{R(v_x)})}{\sqrt{R(v_x)}} \circ A_{v_x} \right)$$

$$(x \in M)$$

$$(R(v_x) := R(\cdot, v_x)v_x)$$

事実 2.1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M : \text{等焦部分多様体} \\ M \text{ の各平行法ベクトル } v \text{ に対し、} \\ F_{v_x}^{-1}(0) = F_{v_y}^{-1}(0) \quad (\forall x, y \in M) \end{cases}$$

事実 2.2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M : \text{平坦な切断をもつ等径部分多様体} \\ M \text{ の各平行法ベクトル } v \text{ に対し、} \\ F_{v_x} = F_{v_y} \quad (\forall x, y \in M) \end{cases}$$

事実 2.3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M : \text{等焦部分多様体} \\ M : \text{平坦な切断をもつ等径部分多様体} \end{cases}$$

3. 複素等焦部分多様体と平坦な切断をもつ 等径部分多様体

G/K : 非コンパクト型対称空間

M : G/K 内の完備な部分多様体

A : M の形テンソル

R : G/K の曲率テンソル

v : M の平行法ベクトル場

$$F_{v_x}^c(z) := \det \left(\cos(z\sqrt{R(v_x)^c}) - \frac{\sin(s\sqrt{R(v_x)^c})}{\sqrt{R(v_x)^c}} \circ A_{v_x}^c \right)$$

$(x \in M)$

事実 3.1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M : \text{複素等焦部分多様体} \\ M \text{ の各平行法ベクトル場 } v \text{ に対し、} \\ (F_{v_x}^c)^{-1}(0) = (F_{v_y}^c)^{-1}(0) \quad (\forall x, y \in M) \end{cases}$$

事実 3.2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M : \text{平坦な切断をもつ等径部分多様体} \\ M \text{ の各平行法ベクトル場 } v \text{ に対し、} \\ F_{v_x}^c = F_{v_y}^c \quad (\forall x, y \in M) \end{cases}$$

事実 3.3.

M : 平坦な切断をもつ等径部分多様体

$\implies M$: 複素等焦部分多様体

事実 3.4.

M : **curvature-adapted** 複素等焦部分多様体

$\implies M$: 平坦な切断をもつ等径部分多様体

4. プロパー複素等径部分多様体 と代数的等径部分多様体

$$M \hookrightarrow \mathbb{R}_v^m$$

$A : M$ の形テンソル

定義

M : 複素等径部分多様体

- \iff $\left\{ \begin{array}{l} \bullet M \text{ の法ホロノミー群は自明である} \\ \bullet \text{ 各平行法ベクトル場 } v \text{ に対し、} A_{v_x}^c \text{ の固有値らは} \\ \quad x \text{ によらず一定である} \end{array} \right.$
- def

注意

A_{v_x} は正規直交基底に関して対角可能であるとは限らず、さらに、 $A_{v_x}^c$ も擬正規直交基底に関して対角可能であるとは限らない。

定義

M : **プロパー複素等径部分多様体**

- \iff
def
- M は複素等径部分多様体である
 - 各法ベクトル w に対し、 A_w^c は擬正規直交基底に関して対角化可能である

定義

M : **代数的等径部分多様体**

- \iff
def
- M の法ホロノミー群は自明である
 - 各平行法ベクトル場 v に対し、 A_{v_x} の特性多項式が x によらず一定である

同様に、(無限次元) 擬ヒルベルト空間内で複素等径部分多様体，
プロパー複素等径部分多様体、および、代数的等径部分多様体
の概念が定義される。

5. 相互関係

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) & \hookrightarrow & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 M & \hookrightarrow & G/K
 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l}
 G/K : \text{非コンパクト型対称空間} \\
 H^0([0, 1], \mathfrak{g}) : \text{擬ヒルベルト空間}
 \end{array} \right)$$

M :Hermann 型作用の主軌道

↓

M : プロパー複素等焦

↓ ? ↗

M : 平坦切断をもつ等径

↓

M : 複素等焦

↓ ↗

M : 等焦 (コンパクト抜き)

⇔

\widetilde{M} : プロパー複素等径

↓ ↗

\widetilde{M} : 代数的等径

⇔

?

↓

\widetilde{M} : 複素等径

↓ ↗

\widetilde{M} : 実等径

⇔

⇔

$$B_{\lambda,i} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(i,i) -type

相互関係

$$C_{\alpha+\sqrt{-1}\beta, i} := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & \alpha & -\beta \\ & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

($2i, 2i$)-type

V : 擬ヒルベルト空間

A : V の自己随伴作用素

A は、 V の擬正規直交基底に関して上述の行列達の直和

$$\left(\bigoplus_i \left(\bigoplus_j B_{\lambda_{ij}, i} \right) \right) \oplus \left(\bigoplus_k \left(\bigoplus_l C_{\alpha_{kl} + \sqrt{-1}\beta_{kl}, k} \right) \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} |\lambda_{ij}| > |\lambda_{i,j+1}| \text{ or } \lambda_{ij} = -\lambda_{i,j+1} \\ |\alpha_{ij} + \sqrt{-1}\beta_{ij}| > |\alpha_{i,j+1} + \sqrt{-1}\beta_{i,j+1}| \\ \text{or } " |\alpha_{ij} + \sqrt{-1}\beta_{ij}| = |\alpha_{i,j+1} + \sqrt{-1}\beta_{i,j+1}| \\ \quad \& \alpha_{ij} > \alpha_{i,j+1} " \\ \text{or } \dots \end{array} \right)$$

という形の行列で表現される。この行列を $M(A)$ と表す。

事実 5.1.

M : プロパー複素等径

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ の各平行法ベクトル場 } v \text{ に対し、} \\ M(A_{v_x}) = \left(\bigoplus_j B_{\lambda_{1j}^x, 1} \right) \oplus \left(\bigoplus_l C_{\alpha_{1l}^x + \sqrt{-1}\beta_{1l}^x, 1} \right) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (\forall x \in M) \\ \& M(A_{v_x}) = M(A_{v_y}) \quad (\forall x, y \in M) \end{cases}$$

事実 5.2.

M : 代数的等径

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ の各平行法ベクトル場 } v \text{ に対し、} \\ M(A_{v_x}) = M(A_{v_y}) \quad (\forall x, y \in M) \end{cases}$$

これらの事実から、

”プロパー複素等径 \implies 代数的等径”

一方、M. A. Magid (Pacific J. Math. 118, 1985) は、ローレンツ空間内の null 曲線に沿う Cartan 枠を用いて、プロパー複素等径ではない代数的等径超曲面の例をいくつか構成した。よって、

”代数的等径 $\not\Rightarrow$ プロパー複素等径”

注意 M. A. Magid は、代数的等径超曲面をローレンツ等径超曲面とよんでいる。

6. 可解群作用

定義 (ゲージ作用)

$$\begin{aligned}
 & H^1([0, 1], G) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \iff_{\text{def}} & \left\{ \begin{array}{l} (g * u)(t) := \text{Ad}(g(t))u(t) - (R_{g(t)})_*^{-1}(g'(t)) \\ (g \in H^1([0, 1], G), u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

注意

$H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ は、 $[0, 1]$ 上の自明な G バンドル $[0, 1] \times G$ の H^0 接続の空間であり、 $H^1([0, 1], G)$ の各元は、バンドル $[0, 1] \times G$ にゲージ変換として作用する。

G/K : 非コンパクト型対称空間

H : G のリー部分群

$$P(G, H \times K) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid (g(0), g(1)) \in H \times K\}$$

事実 6.1.

$$P(G, H \times K) \cdot u = (\pi \circ \phi)^{-1}(H \cdot (\pi \circ \phi)(u)) \\ (u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g}))$$

$G = KAN$: G の岩澤分解

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$: \mathfrak{g} の Cartan 分解 ($\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$: G, K のリー代数)

S : 可解群 AN のリー部分群

s.t. $\text{pr}_{\mathfrak{p}}((\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) \ominus \mathfrak{s})$: アーベル

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{a}, \mathfrak{n}, \mathfrak{s} : A, N, S \text{ のリー代数} \\ \text{pr}_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{g} \text{ から } \mathfrak{p} \text{ への射影} \end{array} \right)$$

事実 6.2.

- $S \curvearrowright G/K$ の各軌道は、平坦切断をもつ等径部分多様体であるが、プロパー複素等焦部分多様体ではない。
- $P(G, S \times K) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ の各軌道は、代数的等径部分多様体であるが、プロパー複素等径部分多様体ではない。

7. 今回得た結果

予想

プロパー複素等焦部分多様体は、平坦切断をもつ等径部分多様体になるのではないか？

G/K : 階数 r の非コンパクト型対称空間

M : G/K 内の C^ω 部分多様体

定理 1

M : 余次元 r のプロパー複素等焦部分多様体
 $\implies M$: 平坦切断をもつ等径部分多様体

定理 2

G/K のルート系が **reduced** とする。

このとき

M : 余次元 r のプロパー複素等焦部分多様体

$\implies M$: **curvature-adapted**

定理 1 の証明の概略

$v : M$ の平行法ベクトル場

テクニカルな議論により、次の事実が示される：

$\text{Spec } R(v_x) : x(\in M)$ によらず一定

$\text{Spec } R(v_x) = \{b_1^v, \dots, b_n^v\}$ とする。

このとき、 $F_{v_x}^c$ は次のように記述される：

$$F_{v_x}^c(z) = \det \left(\cosh(z\sqrt{-b_i^v})\delta_{ij} - \frac{a_{ij}^v(x) \sinh(z\sqrt{-b_j^v})}{\sqrt{-b_j^v}} \right)$$

$$\mathcal{W} := \{w \in T_x^\perp M \mid \sqrt{-b_1^w} : \cdots : \sqrt{-b_n^w} : \text{integer ratio}\}$$

$\text{codim } M = \text{rank } G/K$ より

$$\overline{\mathcal{W}} = T_x^\perp M$$

$v_x \in \mathcal{W}$ とする。このとき、

$$\sqrt{-b_i^v} = m_i b \quad (\forall i) \quad (b \in \mathbb{R}, m_i \in \mathbb{Z})$$

と表せる。

それゆえ、 $F_{v_x}^c$ は、ある $\sum_{i=1}^n |m_i|$ 次多項式 G_x を用いて、次のように記述される：

$$F_{v_x}^c(z) = e^{-bz \sum_{i=1}^n |m_i|} G_x(e^{2bz})$$

- — — > $(F_{v_x}^c)^{-1}(0) : x$ によらず一定
- — — > $G_x^{-1}(0) : x$ によらず一定
- — — > G_x : 定数倍を除いて x によらず一定
- — — > $F_{v_x}^c$: 定数倍を除いて x によらず一定
- — — > $F_{v_x}^c$: x によらず一定

$$(F_{v_x}^c)^{-1}(0) = 1$$

$$(\forall x \in M)$$

さらに、 $\overline{W} = T_x^\perp M$ より、次が示される：

$$F_{v_x}^c : x \text{ によらず一定 } (\forall v : \text{平行法ベクトル場})$$

よって、 M : 平坦切断をもつ等径部分多様体 q.e.d.