

対称空間内の等径部分多様体
を發する平均曲率流

小池 直之

東京理科大学理学部数学科
koike@ma.kagu.tus.ac.jp

2012年10月4日

目次

1. **Hamilton** の定理
2. 平均曲率流とリッチ流
3. 平均曲率流に関する **Huisken** の結果
4. ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流
5. コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流
6. ヒルベルト空間内の等径部分多様体
7. 第5節の結果の証明の概略
8. コンパクト型対称空間上の **Hermann** 作用の主軌道を発する平均曲率流
9. 非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体を発する平均曲率流

Hamilton の定理

M : コンパクト多様体

V : M 上のベクトルバンドル

$\Gamma(V)$: V の切断全体のなす空間

E : V の階数 2 の非線形微分作用素

DE_f : E の $f (\in \Gamma(V))$ における線形化

$f_t (0 \leq t < T)$: $\Gamma(V)$ における C^∞ 曲線

$$F : M \times [0, T) \rightarrow V$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F(x, t) := f_t(x) \quad ((x, t) \in M \times [0, T))$$

定理 1.1(Hamilton).

写像 $L : U \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$

($U : \Gamma(V)$ の開集合, $W : M$ 上のあるベクトルバンドル)

で、次の条件を満たすようなものが存在するとする：

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet L : \text{各成分に関して階数 2 の微分作用素} \\ \bullet L \circ (\text{id} \times E) \circ \Delta_{\Gamma(V)} : \text{階数 1 の微分作用素} \\ \bullet \text{各 } f \in \Gamma(V) \text{ に対し、} \sigma(DE_f)|_{N(\sigma(L)) \times N(\sigma(L))} \\ \quad \text{の各固有値の実部は正である} \\ \left(\begin{array}{l} \sigma(\cdot) : (\cdot) \text{ の表象} \\ N(\cdot) : (\cdot) \text{ の零化空間} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

このとき、

各 $f \in \Gamma(V)$ に対し、初期条件 $F(\cdot, 0) = f$ を満たす

$$\frac{\partial F}{\partial t} = E(f_t)$$

の解が短時間においてただ 1 つ存在する。

2. 平均曲率流とリッチ流

平均曲率流とリッチ流

$$\Gamma_{\text{imm}}(M \times \mathbb{R}^m) := \{\text{id}_M \times f \mid f \in \text{Imm}(M, \mathbb{R}^m)\}$$

$$\begin{aligned}
 & E : \Gamma_{\text{imm}}(M \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \Gamma(M \times \mathbb{R}^m) \\
 \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \text{def} \end{array} & E(f) = H \quad (f \in \Gamma_{\text{imm}}(M \times \mathbb{R}^m)) \\
 & \quad \quad \quad (H : f \text{ の平均曲率ベクトル})
 \end{aligned}$$

E は、定理 1.1 におけるような写像 L を許容することが示される。よって、定理 1.1 により、次の事実が示される：

平均曲率流とリッチ流

事実

各はめ込み $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ に対し、 f を発する平均曲率流は、短時間において一意に存在する。

(注) この事実は、外の空間が一般の完備リーマン多様体の場合にも成り立つことが、 $f(M)$ の各点のまわりで外の空間の局所チャート (U, ϕ) 達を補助的にとり、 f の代わりに $\phi \circ f$ 達に対し、同様の議論を行うことにより、示される。

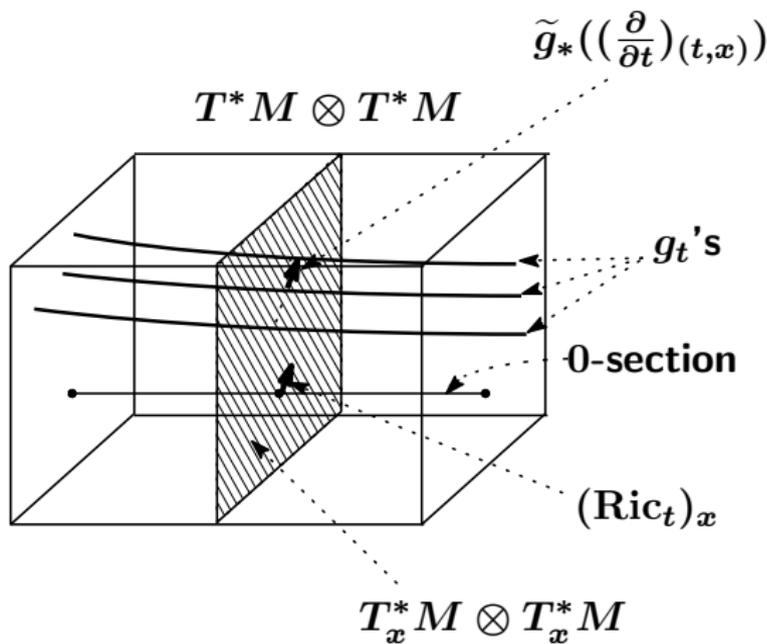
平均曲率流とリッチ流

定義 (リッチ流)

$$g_t \ (0 \leq t < T) : \text{リッチ流} \stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = -2\widetilde{\text{Ric}}$$

$$(\text{注}) \ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right)_{(x,t)} := \frac{d\tilde{g}_{(x,t)}}{dt}$$

平均曲率流とリッチ流



平均曲率流とリッチ流

\mathcal{RM}_M : M のリーマン計量全体のなす空間

$$\begin{aligned}
 & E : \mathcal{RM}_M \rightarrow \Gamma(T^{(0,2)}M) \\
 \iff_{\text{def}} & E(g) = -2\text{Ric} \quad (g \in \mathcal{RM}_M) \\
 & \quad \quad \quad (\text{Ric} : g \text{ のリッチテンソル})
 \end{aligned}$$

E は、定理 1.1 におけるような写像 L を許容することが示される。よって、定理 1.1 により、次の事実が示される：

平均曲率流とリッチ流

事実

M の各リーマン計量 g に対し、 g を発するリッチ流は、短時間において一意に存在する。

疑問

M の各擬リーマン計量 g に対し、 g を発するリッチ流は、短時間において一意に存在するのか？

平均曲率流とリッチ流

g_t ($0 \leq t < T$) : リッチ流とする。

定義 (リッチソリトン)

g_t ($0 \leq t < T$) : **リッチソリトン**

\iff
def

M の C^∞ 同相写像の C^∞ 級の 1 パラメーター族

ψ_t ($0 \leq t < T$) と C^∞ 正值関数 $c : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ で、

$c(t)\psi_t^*g_0 = g_t$ ($0 \leq t < T$) となるようなものが
存在する。

平均曲率流とリッチ流

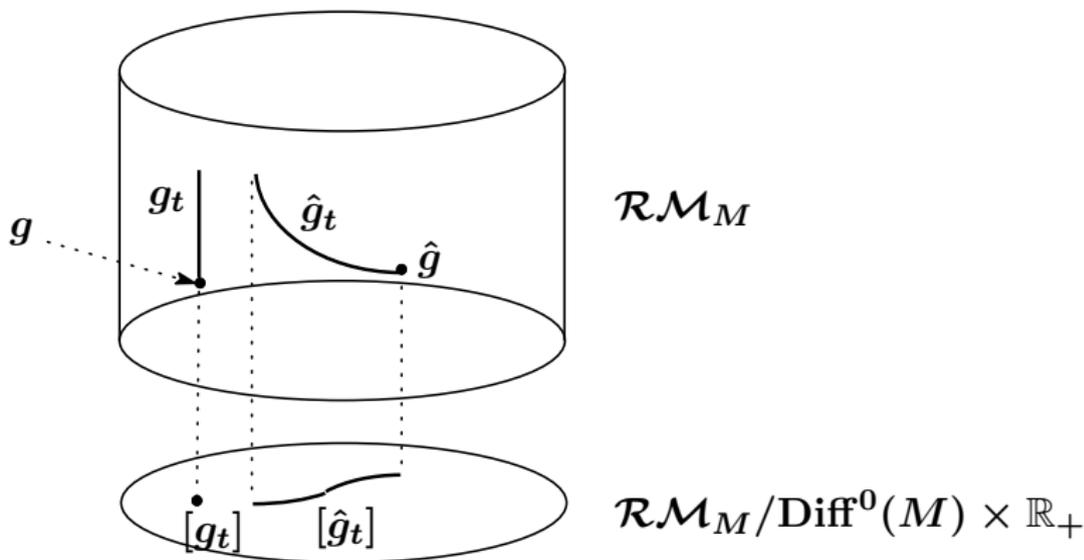
g : M 上のリーマン計量とする。

定義 (リッチソリトン計量)

g : **リッチソリトン計量**

\iff g を発するリッチ流がリッチソリトンである。
def

平均曲率流とリッチ流



g_t : リッチソリトン

\hat{g}_t : リッチソリトンでないリッチ流

g : リッチソリトン計量

\hat{g} : リッチソリトン計量でないリーマン計量

平均曲率流とリッチ流

$f_t : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ($0 \leq t < T$) : 平均曲率流とする。

定義 (自己相似解)

f_t ($0 \leq t < T$) : 自己相似解

\iff
def

M の C^∞ 同相写像の C^∞ 級の 1 パラメーター族

ψ_t ($0 \leq t < T$) と C^∞ 正值関数 $c : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ で、

$c(t)\psi_t^* f_0 = f_t$ ($0 \leq t < T$) となるようなものが存在する。

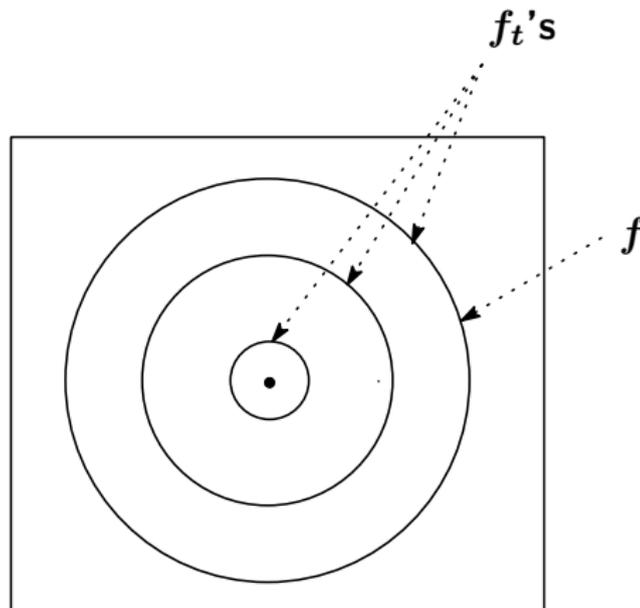
平均曲率流とリッチ流

$f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$: 等径超曲面はめ込み

$f_t (0 \leq t < T)$: f を発する平均曲率流

f_t は、ある C^∞ 正值関数 $c : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $f_t = c(t)f$ と表わされるので、自己相似解である。

平均曲率流とリッチ流



$$f_t = c(t)f$$

3. 平均曲率流に関する Huisken の結果

平均曲率流に関する Huisken の結果

M : n 次元コンパクト多様体

N : $(n + 1)$ 次元完備リーマン多様体

$f : M \hookrightarrow N$: はめ込み

f_t ($0 \leq t < T$) : f を発する平均曲率流

g_t : f_t によって誘導される計量

h_t : f_t の第 2 基本形式

A_t : f_t の形作用素

H_t : f_t の平均曲率ベクトル場

ξ_t : f_t の単位法ベクトル場

平均曲率流に関する Huisken の結果

\tilde{g} : g_t 達から得られる $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$ の切断

\tilde{h} : h_t 達から得られる $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$ の切断

\tilde{A} : A_t 達から得られる $\pi_M^*(T^{(1,1)}M)$ の切断

$\tilde{\xi}$: ξ_t 達から得られる $F^*(TN)$ の切断

平均曲率流に関する Huisken の結果

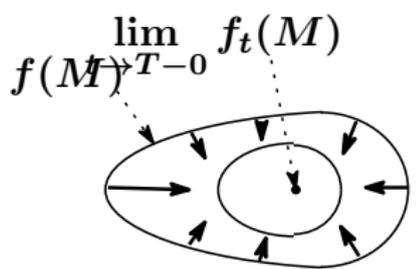
∇ : g_t のリーマン接続 ∇^t 達から誘導される $\pi_M^*(TM)$ の接続

$$\left(\begin{array}{l} (\nabla_X Y)_{(x,t)} := (\nabla_X^t Y)_x, \quad (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y)_{(x,t)} = \frac{dY_{(x,\cdot)}}{dt} \\ (X, Y \in \Gamma(\pi_M^*(TM))) \end{array} \right)$$

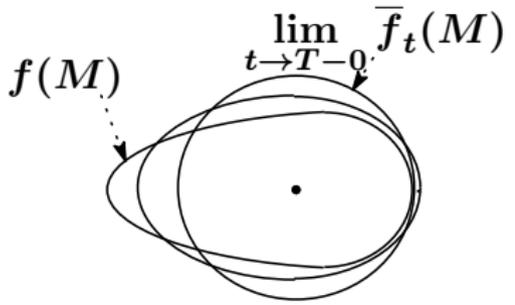
Δ : ∇ を用いて定義されるラプラス作用素

$$\left(\begin{array}{l} (\Delta S)_{(x,t)} := \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} S \quad (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M))) \\ ((e_1, \dots, e_n) : T_x M \text{ の } (g_t)_x \text{ に関する正規直交基底}) \end{array} \right)$$

平均曲率流に関する Huisken の結果



f_t : m. c. f.



\bar{f}_t : volume-preserving m. c. f.

平均曲率流に関する Huisken の結果

g : M のリーマン計量

g_t ($0 \leq t < T$) : g を発するリッチ流

定理 3.3(Hamilton)

g が正のリッチ曲率をもつとする。このとき、次の事実が成り立つ：

- g_t ($0 \leq t < T$) : 正のリッチ曲率をもつ
 - $\lim_{t \rightarrow T} c_t g_t$: 一定の断面曲率をもつ
- (c_t : 正の定数 s.t. $\text{Vol}_{c_t g_t} = \text{Vol}_g$)

平均曲率流に関する Huisken の結果

N : 完備リーマン多様体

$f : M \hookrightarrow N$: はめ込み

$$(\dim M = n, \dim N = n + 1)$$

$$K_1 := - \min \left\{ 0, \min_{\alpha \in \text{Gr}_2(M)} \text{Sec}(\alpha) \right\}$$

$$K_2 := \max \left\{ 0, \max_{\alpha \in \text{Gr}_2(M)} \text{Sec}(\alpha) \right\}$$

$$L := \max \|\nabla^N R_N\|$$

f_t ($0 \leq t < T$) : f を発する平均曲率流

平均曲率流に関する Huisken の結果

定理 3.4(Huisken).

$$(*) \quad \|H\|h > nK_1g + \frac{n^2}{\|H\|}Lg$$

が成り立ち、かつ、 N の単射半径が正であるとする。

このとき、次の事実が成り立つ：

(i) f_t ($0 \leq t < T$) : (*) を満たす

(ii) $\lim_{t \rightarrow T} f_t$: 定点写像

(iii) $\lim_{t \rightarrow T} (\exp_p \circ c_t (\exp_p^{-1} \circ f_t))$: 測地的球面はめ込み

$$\left(\begin{array}{l} p \in N \text{ s.t. } \{p\} = \left(\lim_{t \rightarrow T} f_t \right) (M) \\ c_t : \text{正の定数 s.t. } \text{Vol}_{(\exp_p \circ c_t (\exp_p^{-1} \circ f_t))^* \tilde{g}} = \text{Vol}_{f^* \tilde{g}} \end{array} \right)$$

平均曲率流に関する Huisken の結果

N がコンパクト型対称空間 G/K の場合を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) & \xrightarrow{\widehat{f}} & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 M & \xrightarrow{f} & G/K \\
 & & \text{コンパクト型} \\
 & & \text{対称空間}
 \end{array}$$

平均曲率流に関する Huisken の結果

f_t ($0 \leq t < T$) : f を発する平均曲率流

\hat{f}_t ($0 \leq t < \hat{T}$) : \hat{f} を発する (正則化された) 平均曲率流

f_t を調べる代わりに \hat{f}_t を調べることにより、定理 3.4 の (i) を
 おおよそ、示すことができた。つまり、定理 3.4 の **new proof**
 を、おおよそ、完成させた。

ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流

V : 無限次元 (可分な) ヒルベルト空間

$f : M \hookrightarrow V$: 余次元有限なはめ込み

定義 (プロパーフレッドホルム部分多様体)

M : **プロパーフレッドホルム部分多様体**

- \iff
def $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ は固有写像} \\ \bullet f \text{ の各形作用素はコンパクト作用素である} \end{array} \right.$

ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流

定義 (正則化可能な部分多様体)

M : 正則化可能な部分多様体

$$\Leftrightarrow_{\text{def}} \left\{ \begin{array}{l} \bullet M : \text{プロパーフレッドホルム部分多様体} \\ \bullet \forall v \in T^\perp M, \\ \exists \text{Tr}_r A_v (< \infty), \quad \exists \text{Tr}(A_v^2) (< \infty) \\ \left(\begin{array}{l} \text{Tr}_r A_v := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \mu_i) \\ (\text{Spec } A_v = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}) \\ \text{Tr}(A_v^2) := \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \\ (\text{Spec } A_v^2 = \{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots > 0\}) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流

$f_t : M \hookrightarrow V \quad (0 \leq t < T)$: 正則化可能部分多様体の
 C^∞ 級の 1 パラメーター族

$$F : M \times [0, T) \rightarrow V$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F(x, t) := f_t(x) \quad ((x, t) \in M \times [0, T))$$

定義 (正則化された平均曲率流)

$f_t \quad (0 \leq t < T)$: 正則化された平均曲率流

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = H_t \quad (0 \leq t < T)$$

$(H_t : f_t \text{ の正則化された平均曲率ベクトル場})$

ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流

問題

各正則化可能な部分多様体 $f : M \hookrightarrow V$ に対し、
 f を発する (正則化された) 平均曲率流は、(短時間において)
一意的に存在するか？

ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流

G : ヒルベルトリー群

V : ヒルベルト空間

$G \curvearrowright V$: 自由な等長作用で、各軌道が極小な正則化可能な部分多様体であるようなもの

$\phi : V \rightarrow V/G$: 軌道写像

M : ヒルベルト多様体

$f : M \hookrightarrow V$: 正則化可能な部分多様体

事実

$f(M)$ が G 不変、かつ、 $(\phi \circ f)(M)$ がコンパクトであるならば、 f を発する (正則化された) 平均曲率流が、短時間において、一意的に存在する。

ヒルベルト空間内の正則化可能な部分多様体を発する平均曲率流

例

G/K : G がコンパクト半単純リー群であるような、
コンパクト簡約リーマン等質空間

$$P(G, e \times K) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid ((g(0), g(1)) \in \{e\} \times K)\}$$

$P(G, e \times K)$ は、 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ にゲージ作用の接続への作用として、等長的かつ自由に作用し、その各軌道は、極小な正則化された部分多様体になる。また、 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})/P(G, e \times K) = G/K$ となる。

5. コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

N : 完備リーマン多様体

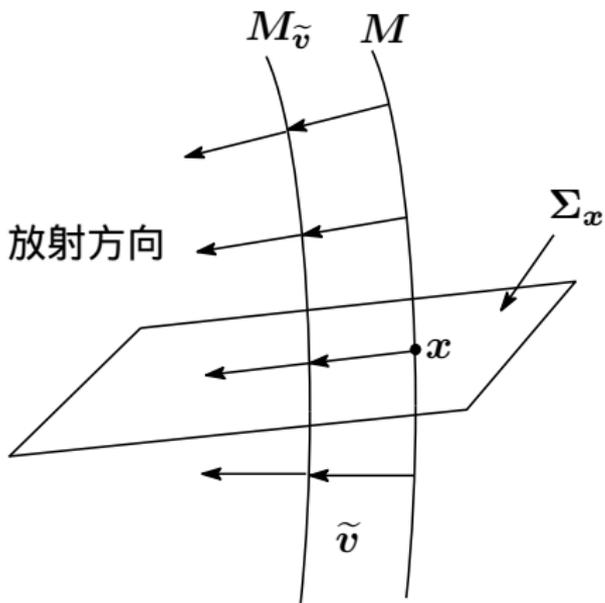
$f : M \hookrightarrow N$: はめ込み

定義 (平坦な切断をもつ等径部分多様体)(Heintze-Liu-Olmos)

M : 等径部分多様体

- \iff
def
- M の法ホロノミー群は自明である
 - M は切断をもつ
(つまり、 $\exp^\perp(T_x^\perp M) : \text{全測地的 } (\forall x \in M)$)
 - M の十分近くの平行部分多様体達が、放射方向に関して **CMC** である

以下、等径部分多様体は、すべて、平坦な切断をもつものとする。

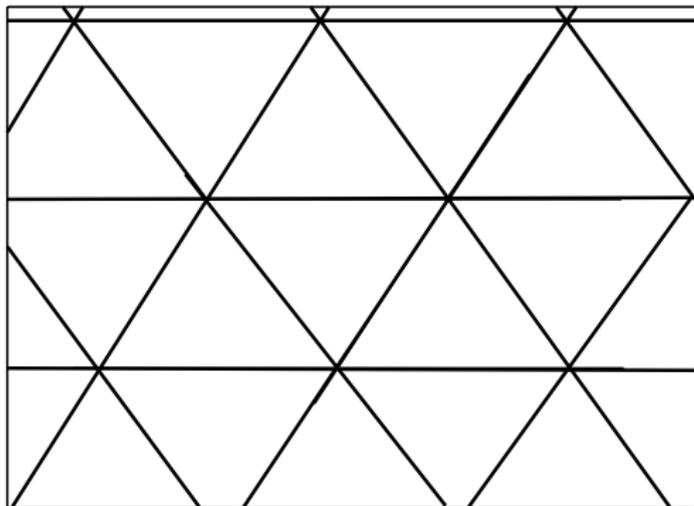


$\tilde{v} : M$ の平行法ベクトル場

$$M_{\tilde{v}} := \eta_{\tilde{v}}(M)$$

$$(\eta_{\tilde{v}} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \eta_{\tilde{v}}(x) := \exp^{\perp}(\tilde{v}_x) \quad (x \in M))$$

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流



$$T_{x_0}^\perp M$$

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

G/K : コンパクト型対称空間

$f : M \hookrightarrow G/K$: 極小でない等径部分多様体

$f_t (0 \leq t < T)$: f を発する平均曲率流

$M := f(M), M_t := f_t(M)$

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

定理 5.1(K).

- (i) M_t ($0 \leq t < T$) : M の平行部分多様体
- (ii) $T < \infty$ 、かつ、 $F := \lim_{t \rightarrow T} M_t$: M の焦部分多様体
- (iii) M : 既約、かつ、 $\text{codim } M \geq 2$ 、かつ、
 $\text{pr} : M \rightarrow F$: 球面的なファイブレーション
 $\Rightarrow M_t$ ($0 \leq t < T$) : I 型の特異性をもつ
- (iv) M の任意の焦部分多様体 \hat{F} に対し、
 $\exists M' : M$ の平行部分多様体 s.t. $\lim_{t \rightarrow \hat{T}} M'_t = \hat{F}$
 $(M'_t$ ($0 \leq t < \hat{T}$) : M' を発する平均曲率流)

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$\tilde{C}(\subset T_{x_0}^\perp M)$: M の Coxeter 群の (0 を含む)
 基本領域

$C := \exp^\perp(\tilde{C})$

σ : ∂C (これは自然に層分割されている) の
 1次元以上の層の1つ

F : σ を通る M の極小でない焦部分多様体

F_t ($0 \leq t < T$) : F を発する平均曲率流

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

定理 5.2(K).

(i) F_t ($0 \leq t < T$) : M の $\overset{\circ}{\sigma}$ を通る焦部分多様体

(ii) $F' := \lim_{t \rightarrow T} F_t$: M の $\partial\sigma$ を通る焦部分多様体
 $(T < \infty)$

(iii) M : 既約、かつ、 $\text{codim } M \geq 2$ 、かつ、
 $\text{pr} : F \rightarrow F'$: 球面的なファイブレーション
 $\Rightarrow F_t$ ($0 \leq t < T$) : I 型の特異性をもつ

(iv) $\partial\sigma$ を通る M の任意の焦部分多様体 \widehat{F} に対し、
 $\exists \widehat{F}' : \overset{\circ}{\sigma}$ を通る M の焦部分多様体
 s.t. $\lim_{t \rightarrow \bar{T}} \widehat{F}'_t = \widehat{F}$

$(\widehat{F}'_t$ ($0 \leq t < \bar{T}$) : \widehat{F}' を発する平均曲率流)

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$$\begin{array}{ccc}
 M_t & \xrightarrow{(t \rightarrow T_1)} & F^1 \\
 & & \text{non-min.} \\
 & & F_t^1 \xrightarrow{(t \rightarrow T_2)} F^2 \\
 & & \text{non-min.} \\
 & & \dots \\
 & & F_t^{k-1} \xrightarrow{(t \rightarrow T_k)} F^k \\
 & & \text{min.}
 \end{array}$$

$\left(\begin{array}{l} F^1 : M \text{ の焦部分多様体} \\ F^i : F^{i-1} \text{ の焦部分多様体 } (i = 2, \dots, k) \end{array} \right)$

コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) & \hookrightarrow & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 M & \hookrightarrow & G/K
 \end{array}$$

M : 等径部分多様体 \Leftrightarrow \widetilde{M} : (正則化された) 等径部分多様体

6. ヒルベルト空間内の等径部分多様体

ヒルベルト空間内の等径部分多様体

V : 無限次元 (可分な) ヒルベルト空間

$f : M \hookrightarrow V$: 正則化された部分多様体はめ込み

定義 (等径部分多様体)

M : 等径部分多様体

- | | | |
|---------------|---|--|
| \iff
def | { | <ul style="list-style-type: none"> ● M は正則化可能な部分多様体である ● M の法ホロノミー群は自明である ● M の各平行な法ベクトル場 \tilde{v} に対し、
 \tilde{v}_x に対する主曲率達は $x (\in M)$ によらず一定である |
|---------------|---|--|

ヒルベルト空間内の等径部分多様体

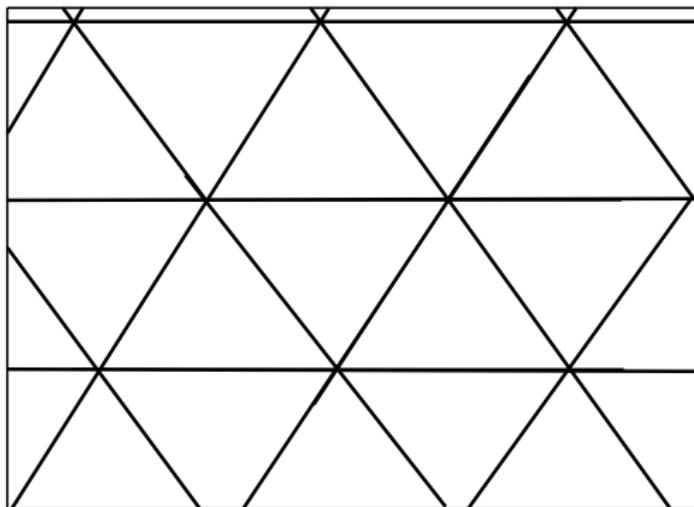
事実

M の x_0 における焦点集合は、 $T_{x_0}^\perp M$ 内の、有限個の「等間隔に並んだアフィン超平面の無限族」からなり、それらのアフィン超平面に関する鏡映達の生成する群は、離散群、つまり、Coxeter 群になる。

定義 (等径部分多様体に付随する Coxeter 群)

上述の群を M に付随する Coxeter 群とよび、 C_M と表す。

ヒルベルト空間内の等径部分多様体



$$T_{x_0}^\perp M$$

第 5 節の結果の証明の概略

定理 5.1(K).

- (i) M_t ($0 \leq t < T$) : M の平行部分多様体
- (ii) $T < \infty$ 、かつ、 $F := \lim_{t \rightarrow T} M_t$: M の焦部分多様体
- (iii) M : 既約、かつ、 $\text{codim } M \geq 2$ 、かつ、
 $\text{pr} : M \rightarrow F$: 球面的なファイブレーション
 $\Rightarrow M_t$ ($0 \leq t < T$) : I 型の特異性をもつ
- (iv) M の任意の焦部分多様体 \hat{F} に対し、
 $\exists M'$: M の平行部分多様体 s.t. $\lim_{t \rightarrow \hat{T}} M'_t = \hat{F}$
 $(M'_t$ ($0 \leq t < \hat{T}$) : M' を発する平均曲率流)

第 5 節の結果の証明の概略

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) & \hookrightarrow & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 M & \hookrightarrow & G/K
 \end{array}$$

M : 等径部分多様体 — — — $>$ \widetilde{M} : 等径部分多様体

\widetilde{M}_t : \widetilde{M} を発する (正則化された) 平均曲率流

第 5 節の結果の証明の概略

$$x_0 \in M$$

$$u_0 \in (\pi \circ \phi)^{-1}(x_0) (\subset \widetilde{M})$$

$\widetilde{C} (\subset T_{u_0}^\perp \widetilde{M})$: \widetilde{M} の 0 における **Coxeter 群** の
 (0 を含む) 基本領域

定義

$$X \in \Gamma(T\widetilde{C})$$

$$\begin{array}{l}
 \iff \\
 \text{def}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 X_w := (\widetilde{H}^w)_{u_0+w} \quad (w \in \widetilde{C}) \\
 \left(\begin{array}{l}
 \widetilde{H}^w : \eta_{\widetilde{w}}(\widetilde{M}) \text{ の正則化された平均曲率ベクトル場} \\
 \left(\begin{array}{l}
 \eta_{\widetilde{w}} : \widetilde{w}_{u_0} = w \text{ となる平行法ベクトル場 } \widetilde{w} \\
 \text{に対する終点写像}
 \end{array} \right)
 \end{array} \right)
 \end{array} \right.$$

第 5 節の結果の証明の概略

$\{\psi_t\}$: X に付随する局所 1 パラメーター変換群

$$\xi(t) := \psi_t(0)$$

$\widetilde{\xi}(t)$: $\widetilde{\xi}(t)_0 = \xi(t)$ となる \widetilde{M} の平行法ベクトル場

補題 7.2.

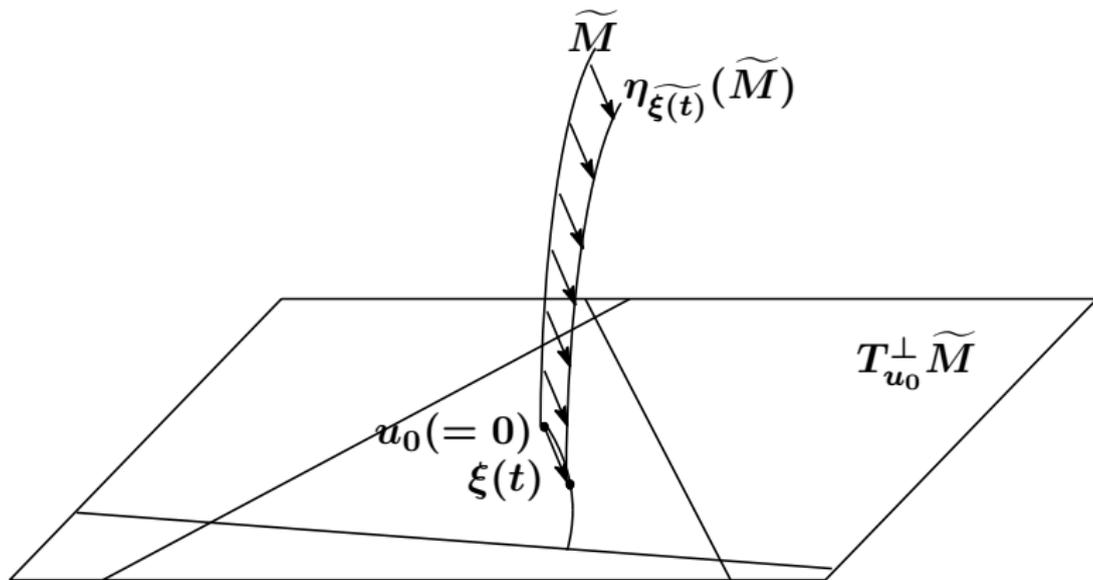
$$\widetilde{M}_t = \eta_{\widetilde{\xi}(t)}(\widetilde{M})$$

定理 5.1 の (i) の証明

$$\begin{aligned}
 M_t &= (\pi \circ \phi)(\widetilde{M}_t) = (\pi \circ \phi)(\eta_{\widetilde{\xi}(t)}(\widetilde{M})) \\
 &= \eta_{(\pi \circ \phi)_*(\widetilde{\xi}(t))}(M)
 \end{aligned}$$

q.e.d.

第 5 節の結果の証明の概略



第 5 節の結果の証明の概略

$$w \in \tilde{C}$$

$$\tilde{M}^w := \eta_{\tilde{w}}(\tilde{M})$$

\tilde{M}_t^w : \tilde{M}^w を発する平均曲率流

補題 7.2'.

$$\tilde{M}_t^w = \eta_{\widetilde{\psi_t(w)}}(\tilde{M})$$

それゆえ、定理 5.1 の (ii) と (iv) を示すためには、 X を解析すればよい。

第 5 節の結果の証明の概略

\tilde{A} : \tilde{M} の形テンソル

$$T_u \tilde{M} = \bigoplus_{i \in I_u} E_i^u : \tilde{A}_v \ (v \in T_u^\perp \tilde{M}) \text{ 達の同時固有空間分解}$$

私たちは、次の事実が成り立っているとしてよい：

- $I_{u_1} = I_{u_2} \ (\forall u_1, u_2 \in \tilde{M})$,
- $\forall i \in I(:= I_u)$, $E_i : u \mapsto E_i^u \ (u \in \tilde{M}) : C^\infty$ 接分布

E_i 達は、**主曲率分布**とよばれる。

第 5 節の結果の証明の概略

事実

- $\dim E_i < \infty$
- E_i : \widetilde{M} 上の全測地的接分布
- E_i の各積分多様体は球面である。

第 5 節の結果の証明の概略

$$\lambda_i^u \in (T_u^\perp \widetilde{M})^* \stackrel{\text{def}}{\iff} \widetilde{A}_v|_{E_i^u} = \lambda_i^u(v)\text{id} \quad (v \in T_u^\perp \widetilde{M})$$

$$\lambda_i \in \Gamma((T^\perp \widetilde{M})^*) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\lambda_i)_u := \lambda_i^u \quad (u \in \widetilde{M})$$

主曲率

$$\mathbf{n}_i \in \Gamma(T^\perp \widetilde{M}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_i = \langle \mathbf{n}_i, \cdot \rangle \quad (i \in I)$$

主曲率法ベクトル場

第 5 節の結果の証明の概略

事実

$$\{\lambda_i \mid i \in I\} = \bigcup_{a=1}^{\bar{r}} \left\{ \frac{\lambda_a}{1 + b_a j} \mid j \in \mathbb{Z} \right\} \quad (b_a > 1)$$

事実

$$\tilde{C} = \{w \in T_{u_0}^\perp \tilde{M} \mid (\lambda_a)_{u_0}^{-1}(w) < 1 \quad (a = 1, \dots, \bar{r})\}$$

$$E_{aj} := \text{Ker} \left(\tilde{A} \cdot - \frac{\lambda_a(\cdot)}{1 + b_a j} \text{id} \right)$$

$$m_a^e := \dim E_{a,2j}, \quad m_a^o := \dim E_{a,2j+1}$$

第 5 節の結果の証明の概略

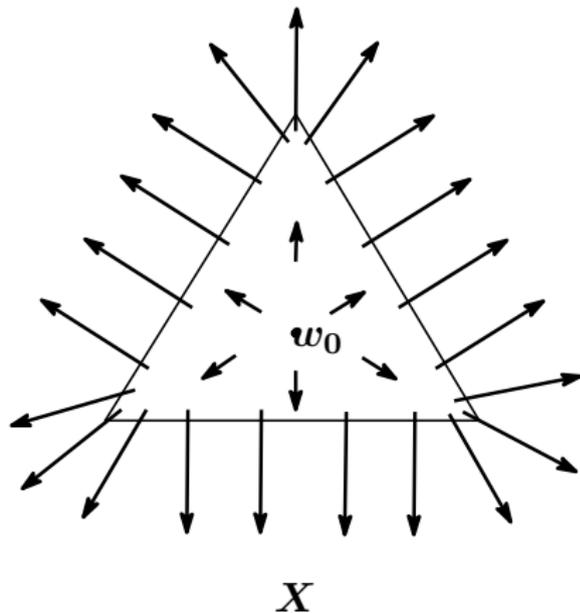
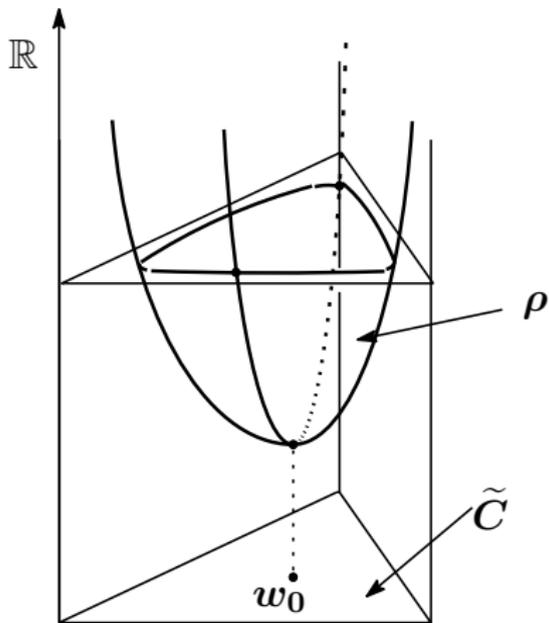
定理 5.1 の (ii) の証明

$$\begin{aligned}
 & \rho \in C^\infty(\tilde{C}) \\
 \Leftrightarrow_{\text{def}} & \rho(w) := - \sum_{a=1}^{\bar{r}} \left(m_a^e \log \sin \frac{\pi}{b_a} (1 - (\lambda_a)_{u_0}(w)) \right) \\
 & \quad + m_a^o \log \cos \frac{\pi}{b_a} (1 - (\lambda_a)_{u_0}(w)) \quad (w \in \tilde{C})
 \end{aligned}$$

このとき、次の事実が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 \text{grad } \rho &= X, & \rho &: \text{下に凸} \\
 \rho(w) &\rightarrow \infty & (w &\rightarrow \partial\tilde{C})
 \end{aligned}$$

第 5 節の結果の証明の概略



コンパクト型対称空間上の Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

G/K : コンパクト型対称空間

$\theta : (\text{Fix } \theta)_0 \subset K \subset \text{Fix } \theta$ を満たす G の対合

$H : G$ の対称部分群

自然な作用 $H \curvearrowright G/K$ は、**Hermann 作用**とよばれる。

命題 8.1.

Hermann 作用の主軌道は、**curvature-adapted** な等径部分多様体である。

Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

$\tau : (\text{Fix } \tau)_0 \subset H \subset \text{Fix } \tau$ を満たす G の対合

3つの Hermann 作用を除いて、 $\tau \circ \theta = \theta \circ \tau$
と仮定してよい。

以下、 $\tau \circ \theta = \theta \circ \tau$ と仮定する。

コンパクト型対称空間上の Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

$\mathfrak{b} : \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大アーベル部分空間

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in \Delta'_+} \mathfrak{p}_{\beta}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) : \mathfrak{b} \text{ の } \mathfrak{p} \text{ における中心化代数} \\ \mathfrak{p}_{\beta} := \{X \in \mathfrak{p} \mid \text{ad}(b)^2(X) = -\beta(b)^2 X \ (\forall b \in \mathfrak{b})\} \ (\beta \in \mathfrak{b}^*) \\ \Delta'_+ := \{\beta \in \mathfrak{b}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{p}_{\beta} \neq \{0\}\} \end{array} \right)$$

コンパクト型対称空間上の Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

$$\Delta'_+{}^V := \{\beta \in \Delta'_+ \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q} \neq \{0\}\}$$

$$\Delta'_+{}^H := \{\beta \in \Delta'_+ \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}\}$$

$$\tilde{C} := \{b \in \mathfrak{b} \mid 0 < \beta(b) < \pi \ (\forall \beta \in \Delta'_+{}^V), \\ -\frac{\pi}{2} < \beta(b) < \frac{\pi}{2} \ (\forall \beta \in \Delta'_+{}^H)\}$$

$$C := \mathbf{Exp}(\tilde{C})$$

(Exp : G/K の eK における指数写像)

コンパクト型対称空間上の Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

$$P(G, H \times K) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid (g(0), g(1)) \in H \times K\}$$

$$P(G, H \times K) \underset{\text{gauge}}{\curvearrowright} H^0([0, 1], \mathfrak{g})$$

$$g \cdot u = \text{Ad}(g)u - g'g_*^{-1}$$

事実

$P(G, H \times K)$ 軌道達は、 H 軌道達の $\pi \circ \phi$ による逆像である。

コンパクト型対称空間上の Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

$$Z \in \tilde{C}$$

$$M := H(\text{Exp } Z), \quad \tilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) (= P(G, H \times K) \cdot Z)$$

Λ : \tilde{M} の主曲率全体からなる集合

補題 8.1.

$$\begin{aligned}
 \Lambda = & \left\{ \frac{-\tilde{\beta}}{\beta(Z) + j\pi} \mid \beta \in \Delta'_+, j \in \mathbb{Z} \right\} \\
 & \cup \left\{ \frac{-\tilde{\beta}}{\beta(Z) + (j + \frac{1}{2})\pi} \mid \beta \in \Delta'_+, j \in \mathbb{Z} \right\} \\
 & \left(\tilde{\beta} : \tilde{\beta}_{u_0} = \beta \circ \exp^G(Z)_*^{-1} \text{ を満たす } (T^\perp \tilde{M})^* \text{ の平行切断} \right)
 \end{aligned}$$

コンパクト型対称空間上の Hermann 作用の主軌道を発する平均曲率流

定義

$$X \underset{\text{def}}{\iff} X_Z := (\widetilde{H}^Z)_Z \quad (Z \in \widetilde{C})$$

補題 8.2.

$$\begin{aligned}
 X_Z = & - \sum_{\beta \in \Delta'_+{}^V} m_\beta^V \cot \beta(Z) \beta^\sharp \\
 & + \sum_{\beta \in \Delta'_+{}^H} m_\beta^H \tan \beta(Z) \beta^\sharp \\
 \left(\begin{array}{l} m_\beta^V := \dim(\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q}), \quad m_\beta^H := \dim(\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h}) \\ \beta^\sharp \in \mathfrak{b} \underset{\text{def}}{\iff} \beta(\cdot) = \langle \beta^\sharp, \cdot \rangle \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

非コンパクト型対称空間 G/K 内の部分多様体 M が、その主曲率達が 0 に近づくように変形していくとき、その焦点集合は、 G/K の理想境界の彼方へ消えうせてしまう。

この事実に基づいて、 M の各法測地線に沿う焦半径を、実数の範囲だけで定義するのは不十分であると判断し、複素数の範囲に広げて定義し、それを**複素焦半径**と名づけた。その定義は、次の通りである。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

G/K : 非コンパクト型対称空間

M : G/K 内の C^ω 部分多様体

$M^c \subset G^c/K^c$: $M(\subset G/K)$ の複素化

定義 (複素焦半径)

$z = s + ti$: M の法測地線 γ_v に沿う **複素焦半径**

\Leftrightarrow $\gamma_{sv+tJv}(1)$ が M^c の γ_{sv+tJv} に沿う焦点
def

(J はアンチケーラー対称空間 G^c/K^c の複素構造を表す。)

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$\psi : T^\perp(M^c) \rightarrow M^c : M^c$ の法バンドル

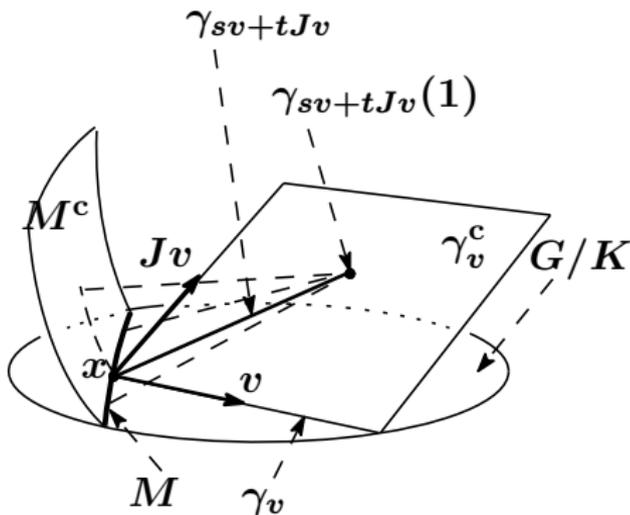
$\exp^\perp : M^c$ の法指数写像

定義 (複素焦半径の零化空間・重複度)

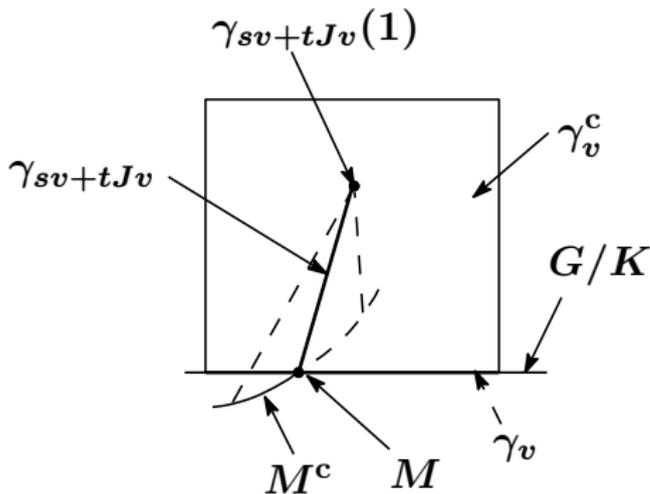
M の法測地線 γ_v に沿う複素焦半径 $z = s + ti$ に対し、
 $\psi_*(\text{Ker } \exp_{*sv+kJv}^\perp)$ は、複素焦半径 z に対する**零化空間**
 とよばれ、その複素次元は、複素焦半径 z の**重複度**とよば
 れる。

非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体を発する平均曲率流

非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体を発する平均曲率流



非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流



非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$G/K = H^m(c)$ の場合

$\mathcal{FR}_{M,v}^C$ は、次の集合に等しい：

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\lambda} + j\pi i \right) \mid \lambda \in (\operatorname{Spec} A_v)_+ \right\} \cup$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{\sqrt{-c}} + \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi i \right) \mid \lambda \in (\operatorname{Spec} A_v)_- \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l}
 (\operatorname{Spec} A_v)_+ := \{ \lambda \in \operatorname{Spec} A_v \mid |\lambda| > \sqrt{-c} \} \\
 (\operatorname{Spec} A_v)_- := \{ \lambda \in \operatorname{Spec} A_v \mid |\lambda| < \sqrt{-c} \}
 \end{array} \right)$$

A^c : M^c の形作用素

$\frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\lambda} + j\pi i \right)$ に対する零化空間は、
 $\operatorname{Ker}(A_v^c - \lambda \operatorname{id})$ に等しい。

$\frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{\sqrt{-c}} + (j + \frac{1}{2})\pi i \right)$ に対する零化空間は、
 $\operatorname{Ker}(A_v^c - \lambda \operatorname{id})$ に等しい。

したがって、

M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達は、

$$\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} A_v \text{ s.t. } |\lambda| \neq \sqrt{-c}} \operatorname{Ker}(A_v^c - \lambda \operatorname{id})$$

を張る。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

一方

$$T_x(M^c) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } A_v} \text{Ker}(A_v^c - \lambda \text{id})$$

が成り立つ。したがって、

M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達は、

$$T_x(M^c) \ominus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } A_v \text{ s.t. } |\lambda| = \sqrt{-c}} \text{Ker}(A_v^c - \lambda \text{id}) \right)$$

を張る。

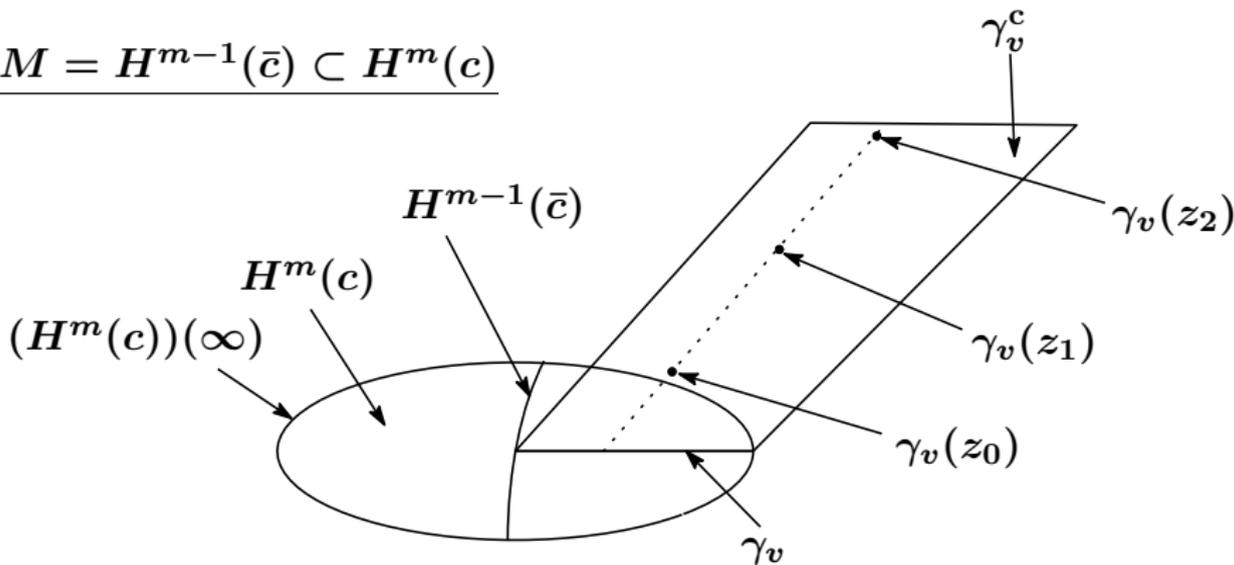
非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

したがって、次の条件 (*_C) は成り立つとは限らない。

- (*_C) M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達は、
 $(T_x(M^c) \ominus (\text{Ker } A_v^c \cap \text{Ker } R(v)^c))$
 を張る。

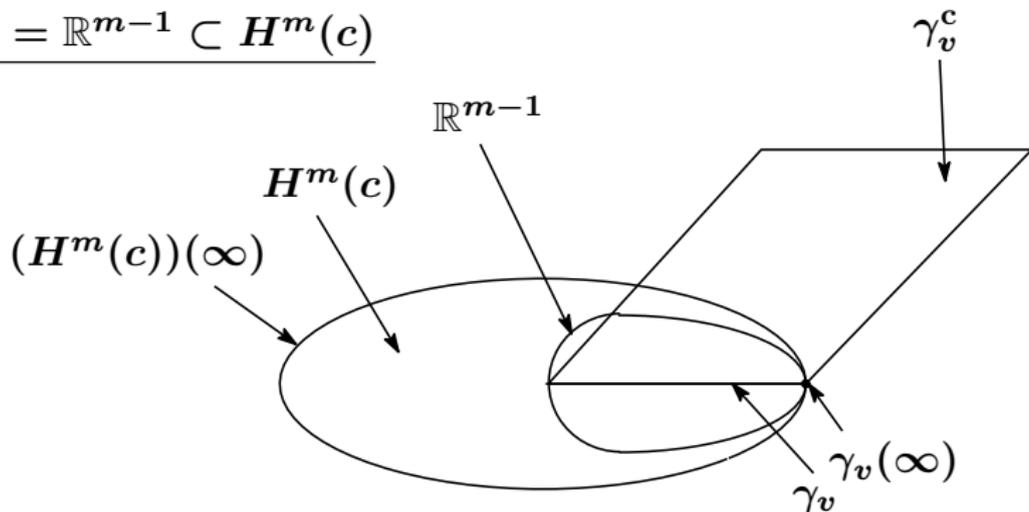
事実
 G/K 上の Hermann 作用の主軌道は、条件 (*_C) を満たす curvature-adapted な等径部分多様体である。

$$\underline{M = H^{m-1}(\bar{c}) \subset H^m(c)}$$



$$z_j := \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\bar{c} - c}}{\sqrt{-c}} + \left(j + \frac{1}{2}\right) \pi \sqrt{-1} \right)$$

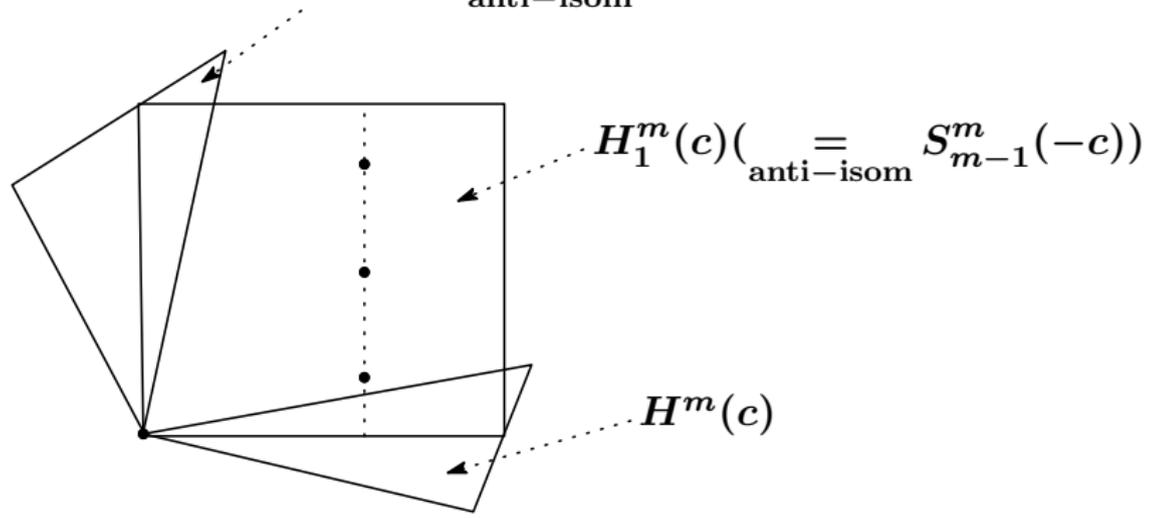
$$\underline{M = \mathbb{R}^{m-1} \subset H^m(c)}$$



γ_v^c に沿う焦点は存在しない

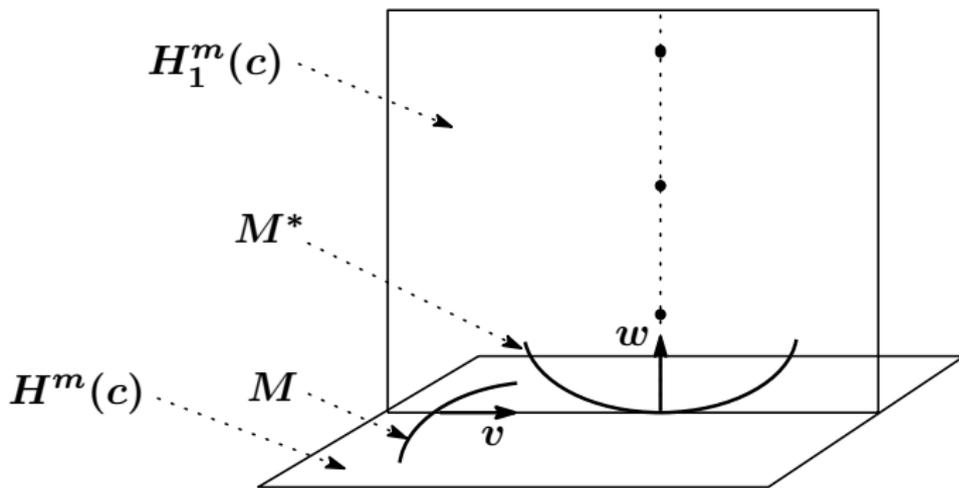
$$M = H^{m-1}(\bar{c}) \subset H^m(c)$$

$$H_m^m(c) \underset{\text{anti-isom}}{=} S^m(-c)$$



$H^m(c), H_m^m(c), H_1^m(c) : S_C^m(c)$ の 3 つの実形

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流



非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$$\Delta' := \{\alpha|_{\mathfrak{b}} \mid \alpha \in \Delta \text{ s.t. } \alpha|_{\mathfrak{b}} \neq 0\}$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in \Delta'_+} \mathfrak{p}_{\beta}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) : \mathfrak{b} \text{ の } \mathfrak{p} \text{ における中心化群} \\ \mathfrak{p}_{\beta} = \sum_{\alpha \in \Delta \text{ s.t. } \alpha|_{\mathfrak{b}} = \beta} \mathfrak{p}_{\alpha} \end{array} \right)$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

M_t ($0 \leq t < T$) : M を発する平均曲率流

定理 9.1.

$\text{codim } M = \text{rank}(G/K)$, $\dim(\mathfrak{p}_\alpha \cap \mathfrak{p}') \geq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{p}_\alpha$ ($\forall \alpha$)

であるとする。このとき、

- (i) M は極小でなく、 M_t は有限時間である焦部分多様体に崩壊する。
- (ii) M から F への自然な射影が球面的であるならば、 M_t は **type I** の特異性をもつ。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

例

$SO_0(1, m - 1) \curvearrowright SO_0(1, m)/SO(m)$ の (主) 軌道 M に対し、 $\text{codim } M = \text{rank}(G/K) (= 1)$ は成り立っているが、

$$\dim(\mathfrak{p}_\alpha \cap \mathfrak{p}') \geq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{p}_\alpha \quad (\forall \alpha)$$

は成り立っていない。実際、 $\mathfrak{p}' = \{0\}$ である。

$SO(1, m - 1) \curvearrowright SO(1, m)/SO(m)$ のすべての軌道は、主軌道であり、その中に 1 本、極小軌道があり、 M はその軌道である可能性があり、また、その軌道でない場合、 M は平均曲率流に沿って崩壊しない。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$$\begin{array}{ccc}
 M_t & \xrightarrow{(t \rightarrow T_1)} & F^1 \\
 & & F_t^1 \xrightarrow{(t \rightarrow T_2)} F^2 \\
 & & \dots \\
 & & F_t^{k-1} \xrightarrow{(t \rightarrow T_k)} \{\text{pt.}\}
 \end{array}$$

- $\left(\begin{array}{l} F^1 : M \text{ の焦部分多様体} \\ F^i : F^{i-1} \text{ の焦部分多様体 } (i = 2, \dots, k-1) \end{array} \right)$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) & \hookrightarrow & H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 M & \hookrightarrow & G/K
 \end{array}$$

\widetilde{M} は、プロパー複素等焦部分多様体になる。

M を発する平均曲率流の代わりに、 \widetilde{M} を発する正則化された平均曲率流を調べる。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

定義 (複素等径部分多様体)

M : 複素等径部分多様体

- \Leftrightarrow
 def
- M の法ホロノミー群は自明である
 - $\forall \tilde{v} \in \Gamma(T^\perp M)$ s.t. $\nabla^\perp \tilde{v} = 0$,
 $\text{Spec } A_{\tilde{v}_x}^c$ は、重複度を込めて、 $x(\in M)$ によらず一定である

非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体を発する平均曲率流

定義 (形作用素のプロパー性)

$$\begin{array}{l} A_v : \text{プロパー} \\ \iff \left\{ \begin{array}{l} A_v^c \text{ は、ある擬正規直交基底に関して} \\ \text{対角化可能 } (\forall v \in T^\perp M) \end{array} \right. \\ \text{def} \end{array}$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

M : プロパーな形作用素をもつ正則化可能な
 フレッドホルム部分多様体

事実

$$\mathrm{Tr} A_v^c, \mathrm{Tr} (A_v^c)^2 \in \mathbb{R}$$

定義 (正則化された平均曲率)

$H \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle H, v \rangle = \mathrm{Tr}_r A_v^c \quad (\forall v \in T^\perp M)$
 H を M の **正則化された平均曲率** とよぶ。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

V : 無限次元擬ヒルベルト空間

$f : M \hookrightarrow V$: プロパーな形作用素をもつ正則化可能な
 フレッドホルム部分多様体

$f_t : M \hookrightarrow V$ ($0 \leq t < T$) : プロパーな形作用素をもつ
 正則化可能なフレッドホルム
 部分多様体の C^∞ 族

$$\tilde{f} : M \times [0, T) \rightarrow V$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \tilde{f}(x, t) := f_t(x) \quad ((x, t) \in M \times [0, T))$$

非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体を発する平均曲率流

定義 (正則化された平均曲率流)

$$\begin{aligned}
 & f_t \quad (0 \leq t < T) : \text{正則化された平均曲率流} \\
 \iff_{\text{def}} \quad & \frac{\partial f}{\partial t} = H_t \quad (0 \leq t < T) \\
 & (H_t : f_t \text{ の正則化された平均曲率ベクトル})
 \end{aligned}$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

G/K : 非コンパクト型対称空間

$M(\subset G/K)$: 条件 $(*_C)$ を満たす curvature-adapted な
 複素等焦部分多様体

$$\widetilde{M} := (\pi \circ \phi)^{-1}(M) (\hookrightarrow H^0([0, 1], \mathfrak{g}))$$

事実

- \widetilde{M} : 正則化可能なプロパー複素等径部分多様体
- \widetilde{M} を発する平均曲率流は、短時間において一意的に存在する。

非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体を発する平均曲率流

定理 9.1.

$\text{codim } M = \text{rank}(G/K)$, $\dim(\mathfrak{p}_\alpha \cap \mathfrak{p}') \geq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{p}_\alpha$ ($\forall \alpha$)

であるとする。このとき、

- (i) M は極小でなく、 M_t は有限時間である焦部分多様体に崩壊する。
- (ii) M から F への自然な射影が球面的であるならば、 M_t は type I の特異性をもつ。

$\{\psi_t\}$: X の生成する局所 1 パラメーター変換群

$\xi(t) := \psi_t(0)$ ($0 : T_{u_0}^\perp \widetilde{M}$ の零ベクトル)

$\widetilde{\xi}(t) : \widetilde{\xi}(t)_{u_0} = \xi(t)$ となる平行法ベクトル場

補題 9.4.

$$\widetilde{M}_t = \eta_{\widetilde{\xi}(t)}(\widetilde{M})$$

定理 9.1 の (i) の証明

$$\begin{aligned} M_t &= (\pi \circ \phi)(\widetilde{M}_t) = (\pi \circ \phi)(\eta_{\widetilde{\xi}(t)}(\widetilde{M})) \\ &= \eta_{(\pi \circ \phi)_*(\widetilde{\xi}(t))}(M) \end{aligned}$$

q.e.d.

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

$\tilde{A} : \tilde{M}$ の形作用素

$$(T_u \tilde{M})^c = \overline{\bigoplus_{i \in I_u} E_i^u} : \tilde{A}_v^c \text{ 達の同時固有空間分解}$$

$$(v \in (T_u^\perp \tilde{M})^c)$$

$$\lambda_i^u : (T_u^\perp \tilde{M})^c \rightarrow \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{\iff} \tilde{A}_v^c|_{E_i^u} = \lambda_i^u(v) \text{id} \quad (v \in T_u^\perp \tilde{M})$$

事実

$$\lambda_i^u \in ((T_u^\perp \tilde{M})^c)^*$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

E_i^u ($u \in \widetilde{M}$) 達を適当にとることにより、次を仮定してよい：

$$\forall i \in I (:= I_u),$$

$$E_i : u \mapsto E_i^u (u \in \widetilde{M}) : (T\widetilde{M})^c \text{ の } C^\infty \text{ 部分バンドル}$$

複素主曲率分布

$$\lambda_i \in \Gamma(((T^\perp \widetilde{M})^c)^*) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\lambda_i)_u := \lambda_i^u (u \in \widetilde{M})$$

複素主曲率

$$\mathbf{n}_i \in \Gamma((T^\perp \widetilde{M})^c) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_i = \langle \mathbf{n}_i, \cdot \rangle (i \in I)$$

複素主曲率法ベクトル場

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

Λ : \widetilde{M} の複素主曲率の全体

$\widetilde{M}^c \subset H^0([0, 1], \mathfrak{g}^c)$: $M \subset G/K$ の複素化 $M^c \subset G^c/K^c$ のリフト

事実

同一視 $(T_u \widetilde{M})^c = T_u(\widetilde{M}^c)$ の下、
 \widetilde{M}^c の u における焦点集合は、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda_u^{-1}(1) =$ に等しい。

事実

\widetilde{M}^c の u における焦点集合は、 $T_u^\perp(\widetilde{M}^c)$ 内の有限個の
 ”(複素的に) 等間隔に並んだ無限個の複素超平面族”
 からなる。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

これらの事実から、次を得る。

事実

$$\Lambda = \bigcup_{a=1}^{\bar{r}} \left\{ \frac{\lambda_a}{1 + b_a j} \mid j \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left(\lambda_a \in \Gamma((T^\perp \widetilde{M})^c), \quad b_a \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |b_a| > 1 \right)$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

仮定

$\text{codim } M = \text{rank}(G/K) \ \& \ \dim(\mathfrak{p}_\alpha \cap \mathfrak{p}') \geq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{p}_\alpha$
 によれば、 $I_- \subset I_+ = I$ となり、次の事実が成り立つ：

事実

$$\Lambda = \left\{ \frac{\widetilde{\beta}_i^c}{b_i + j\pi\sqrt{-1}} \mid i \in I_+ = I, j \in \mathbb{Z} \right\} \cup \frac{\widetilde{\beta}_i^c}{b_i + (j + \frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}} \mid i \in I_-, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \widetilde{\beta}_i^c : (\widetilde{\beta}_i^c)_{u_0} = \beta_i^c \text{ となる } ((T^\perp \widetilde{M})^c)^* \text{ の平行切断} \\ b_i \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

簡単のため

$$\tilde{\lambda}_{ij}^+ := \frac{\tilde{\beta}_i^c}{b_i + j\pi\sqrt{-1}} \quad (i \in I_+ = I, j \in \mathbb{Z})$$

$$\tilde{\lambda}_{ij}^- := \frac{\tilde{\beta}_i^c}{b_i + (j + \frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}} \quad (i \in I_-, j \in \mathbb{Z})$$

E_{ij}^+ : $\tilde{\lambda}_{ij}^+$ に対応する複素主曲率分布

E_{ij}^- : $\tilde{\lambda}_{ij}^-$ に対応する複素主曲率分布

$$m_i^+ := \dim E_{ij}^+, \quad m_i^- := \dim E_{ij}^-$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

補題 9.5.

$$\begin{aligned}
 X_w = & \sum_{i \in I_+} m_i^+ \coth(b_i - \beta_i(w)) \beta_i^\sharp \\
 & + \sum_{i \in I_-} m_i^- \tanh(b_i - \beta_i(w)) \beta_i^\sharp
 \end{aligned}$$

$$\left(\beta_i^\sharp \underset{\text{def}}{\iff} \langle \beta_i^\sharp, \cdot \rangle = \beta_i(\cdot) \right)$$

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

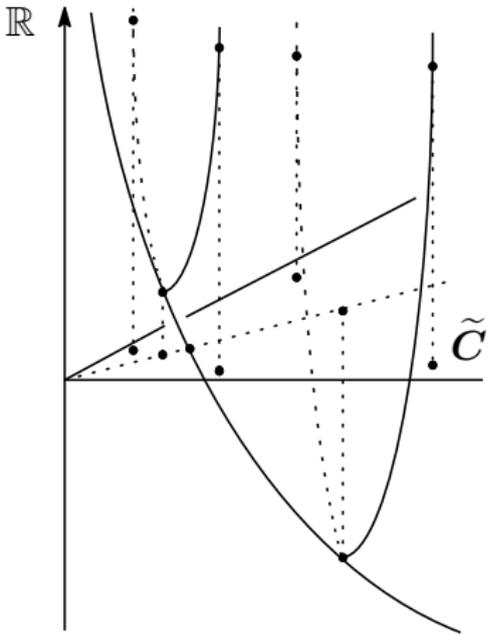
$$\begin{aligned}
 (\partial_j \partial_k \rho)(w) &= \sum_{i \in I_+} \frac{m_i^+}{\sinh^2(b_i - \beta_i(w))} \beta_i(\partial_j) \beta_i(\partial_k) \\
 &\quad - \sum_{i \in I_-} \frac{m_i^-}{\cosh^2(b_i - \beta_i(w))} \beta_i(\partial_j) \beta_i(\partial_k) \\
 &\qquad\qquad\qquad (\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i})
 \end{aligned}$$

$\text{codim } M = \text{rank}(G/K)$ & $\dim(\mathfrak{p}_\alpha \cap \mathfrak{p}')$ $\geq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{p}_\alpha$ から

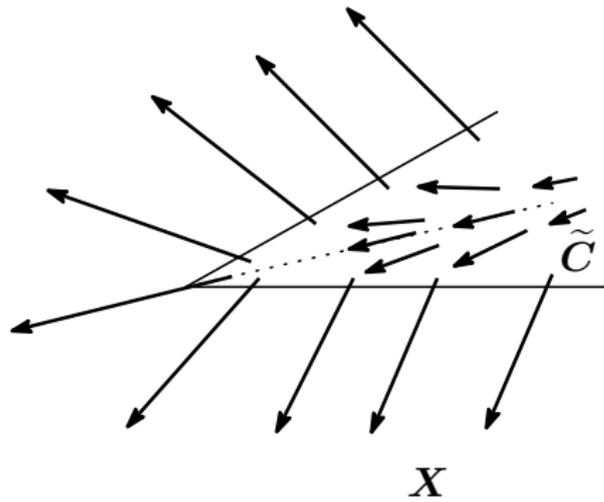
$$I_- \subset I_+ = I \text{ and } m_i^+ \geq m_i^- \quad (\forall i \in I_-)$$

したがって、 ρ は下に凸である。

非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流



the graph of ρ



非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流

これらの事実から、次の事実を得る：

- ρ は極値をもたない。
- 0 を発する X の積分曲線 $\xi(t)$ は、ある有限時間 T で $\partial\tilde{C}$ のある点 w_1 に収束する。

$M_t = \eta_{(\pi \circ \phi)_*(\tilde{\xi}(t))}(M)$ なので、

M_t が有限時間 T で焦部分多様体 $\eta_{(\pi \circ \phi)_*(\tilde{w}_1)}(M)$ に崩壊することがわかる。

q.e.d.

