

二つの実形の交叉と対称三対

井川治 (京都工芸繊維大学)

この研究は筑波大学 田崎博之先生と東京理科大学 田中真紀子さんとの共同研究である。発表後に進展した内容も加えてあります。

1 導入

2次元球面 S^2 内に異なる大円を二つかくと、それらは二点で交わり、その二点は互いに対蹠点になる。 S^2 を複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ と見ると、大円は $\mathbb{C}P^1$ の実形と見ることができる。

これを拡張して compact 型既約 Hermite 対称空間内に二つの実形を考え、その交叉について考える。一般に compact 型既約 Hermite 対称空間内に二つの実形を考えるとそれらは合同とは限らない。合同な二つの実形については、それらの交叉が離散的になるための条件を制限ルート系の言葉を用いて表現できる。また、交叉が離散的のとき、交叉を制限ルート系の定める Weyl 群による特性元 (複素構造) の軌道として表現できる。特に交叉は実形の大対蹠集合になる。

一方、対称三対は既約ルート系の拡張概念であり、Hermann 作用の軌道の性質を調べるために導入された。compact 型既約 Hermite 対称空間内に合同でない二つの実形を考えると、compact 対称三対が定まるので、そこから対称三対を定義できる。二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対の言葉を用いて表現できる。この条件が講演者にとって驚くべきことに、丁度、Hermann 作用の軌道が正則軌道になることに対応している。また、交叉が離散的のとき、交叉を対称三対の定める Weyl 群による特性元 (複素構造) の軌道として表現できる。具体的に与えられた compact 型既約 Hermite 対称空間とその二つの実形について、それらの離散的な交叉の交点数は田中-田崎により Chen-長野理論を用いて得られていたが、今回の結果を用いてそれらを再証明できる。

2 ルート系に付随する特性元

$(\mathfrak{a}, \langle, \rangle)$ を内積 $\langle, \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする. R を $\mathfrak{a}$ のルート系とする. $J \in \mathfrak{a} - \{0\}$ が R に付随した **(第一種の) 特性元** であるとは, 任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, J \rangle = 0, \pm 1$ となることをいう. J が R に付随した特性元ならば, $-J$ もそうである. R の Weyl 群を $W(R)$ と表す. J が R に付随した特性元ならば, 任意の $s \in W(R)$ に対して, sJ も R に付随した特性元である.

命題 2.1. ワイル群 $W(R)$ による J の軌道 $W(R)J$ は二点等質である.

R の基本系 Π を任意の $\lambda \in R^+$ について $\langle \lambda, J \rangle = 0, 1$ となるようにとれる. $R = E_8, F_4, G_2$ のとき, 最高ルートを Π の元の線形結合で表すと, その全ての係数が 2 以上になるので, R に付随した特性元は存在しない. 以下, ルートの番号付けは [2] に合わせる.

例 2.2. $R = B_r$ のとき, 特性元 J は本質的にただ一つで

$$\langle J, \alpha_1 \rangle = 1, \quad \langle J, \alpha_i \rangle = 0 \quad (i \geq 2)$$

によって与えられる. すなわち, $J = e_1$ であり, 全ての特性元は

$$W(R)J = \{\pm e_1, \dots, \pm e_r\}$$

によって与えられる. 特に $\#(W(R)J) = 2r$.

例 2.3. $R = C_r$ のとき, 特性元 J は本質的にただ一つで

$$\langle J, \alpha_r \rangle = 1, \quad \langle J, \alpha_i \rangle = 0 \quad (i \leq r-1)$$

によって与えられる. すなわち, $J = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \dots + e_r)$ であり, 全ての特性元は

$$W(R)J = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \epsilon_i e_i \mid \epsilon_i = \pm 1 \right\}$$

によって与えられる. 特に $\#(W(R)J) = 2^r$.

例 2.2, 例 2.3 より $R = BC_r$ のとき, 特性元は存在しない.

例 2.4. $R = A_r$ のとき, 特性元は r 個存在する. それらを J_i ($1 \leq i \leq r$) で表すと, $\langle J_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$. すなわち,

$$J_i = (e_1 + \cdots + e_i) - \frac{i}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} e_j$$

このとき,

$$W(R)J_i = \left\{ \sum_{j \in A} e_j - \frac{i}{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} e_j \mid A \in P_i(r+1) \right\},$$

$$\#(W(R)J_i) = \binom{r+1}{i}$$

ここで, $P_i(r+1) = \{A \subset \{1, 2, \dots, r+1\} \mid \#A = i\}$ とおいた.

$$\begin{aligned} \{\alpha \in R^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 0\} &= \{e_j - e_k \mid i+1 \leq j < k \leq r+1\} \\ &\quad \cup \{e_j - e_k \mid 1 \leq j < k \leq i\}, \\ \{\alpha \in R^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 1\} &= \{e_j - e_k \mid 1 \leq j < i, i+1 \leq k \leq r+1\} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \#\{\alpha \in R^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 0\} &= \binom{r+1-i}{2} + \binom{i}{2}, \\ \#\{\alpha \in \Sigma^+ \mid \langle \alpha, J_i \rangle = 1\} &= i(r+1-i) \end{aligned}$$

$r = 2$ のときは,

$$J_1 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3), \quad J_2 = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 - 2e_3)$$

であり

$$\begin{aligned} W(R)J_1 &= \left\{ J_1, -J_2, \frac{1}{3}(2e_2 - e_1 - e_3) \right\}, \\ W(R)J_2 &= \left\{ J_2, -J_1, -\frac{1}{3}(2e_2 - e_1 - e_3) \right\} \end{aligned}$$

となる. $W(R)J_k$ ($k = 1, 2$) は正三角形である. □

例 2.5. $R = E_6$ のとき, 特性元は2個存在する. それらを J_1, J'_2 で表すと,

$$\langle J_1, \alpha_i \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle J'_2, \alpha_6 \rangle = 1, \quad \langle J'_2, \alpha_i \rangle = 0 \quad (1 \leq i \leq 5)$$

すなわち,

$$J_1 = \frac{2}{3}(e_8 - e_7 - e_6) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6),$$

$$J'_2 = \frac{1}{3}(e_8 - e_7 - e_6) + e_5 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6)$$

したがって,

$$\#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J_1 \rangle = 1\} = \#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J'_2 \rangle = 1\} = 16,$$

$$\#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J_1 \rangle = 0\} = \#\{\lambda \in E_6^+ \mid \langle \lambda, J'_2 \rangle = 0\} = 20$$

$W(E_6)J_1$ の元 J_k ($2 \leq k \leq 27$) を

$$J_2 = s_1 J_1, \quad J_3 = s_3 J_2, \quad J_4 = s_4 J_3, \quad J_5 = s_2 J_4, \quad J_6 = s_5 J_4, \quad J_7 = s_5 J_5,$$

$$J_8 = s_6 J_6, \quad J_9 = s_4 J_7, \quad J_{10} = s_6 J_7, \quad J_{11} = s_6 J_9, \quad J_{12} = s_3 J_9, \quad J_{13} = s_6 J_{12},$$

$$J_{14} = s_5 J_{11}, \quad J_{15} = s_1 J_{12}, \quad J_{16} = s_1 J_{13}, \quad J_{17} = s_5 J_{13}, \quad J_{18} = s_5 J_{16},$$

$$J_{19} = s_4 J_{17}, \quad J_{20} = s_4 J_{18}, \quad J_{21} = s_2 J_{19}, \quad J_{22} = s_2 J_{20}, \quad J_{23} = s_3 J_{20},$$

$$J_{24} = s_3 J_{22}, \quad J_{25} = s_4 J_{24}, \quad J_{26} = s_5 J_{25}, \quad J_{27} = s_6 J_{26}$$

とおくと, $W(E_6)J_1 = \{J_i \mid 1 \leq i \leq 27\}$, $J'_2 = -J_{27}$ が成り立つ. 特に, $W(E_6)(J'_2) = W(E_6)(-J_1)$, $\#(W(E_6)J_1) = 27$. $W(E_6)J_1$ の中に J_1 を含む正三角形は全部で五つあり, それらは

$$\triangle_1 = \{J_1, J_{15}, J_{27}\}, \quad \triangle_2 = \{J_1, J_{16}, J_{26}\}, \quad \triangle_3 = \{J_1, J_{18}, J_{25}\},$$

$$\triangle_4 = \{J_1, J_{20}, J_{24}\}, \quad \triangle_5 = \{J_1, J_{22}, J_{23}\}$$

で与えられる. $\mathfrak{a}^{(i)} = \text{span}(\triangle_i)$ ($1 \leq i \leq 5$) とおくと, $1 \leq i \leq 5$ に対して

$$\triangle_i = \mathfrak{a}^{(i)} \cap W(E_6)J_1 \tag{2.1}$$

が成り立つ (証明の詳細は付録を参照).

例 2.6. $R = D_r$ のとき,

$$J_1 = e_1, \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r e_j, \quad J_3 = -J_2$$

とおくと、これらは特性元で全ての特性元は、これらの Weyl 群の軌道になる。

$$W(D_r)J_1 = \{\pm e_1, \dots, \pm e_r\},$$

$$W(D_r)J_2 = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \epsilon_j e_j \mid \epsilon_j = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_r = 1 \right\}$$

となるので、 $\#(W(D_r)J_1) = 2r$, $\#(W(D_r)J_2) = 2^{r-1}$. $J_3 \in W(D_r)J_2$ となるための条件は r が偶数になることである。

$R = E_7$ のとき、特性元 J に対して $\#(W(E_7)J)$ を計算するために次の補題を準備する。¹

補題 2.7. $M = G \cdot J = G/K$ を compact 型 Hermite 対称空間とする (記号については次節を参照). このとき、 $W(G)J$ は等質空間としての表示 $W(G)J = W(G)/W(K)$ を持つ. 特に $\#(W(G)J) = \frac{\#(W(G))}{\#(W(K))}$ が成り立つ.

証明 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ を極大可換部分環とする. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環でもある. $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する compact なルート全体と非 compact なルート全体をそれぞれ Δ_c と Δ_n で表すと

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_c^+} \mathfrak{k}_\alpha, \quad \mathfrak{m} = \sum_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{m}_\alpha$$

J は $\mathfrak{k}$ の中心の元なので、 $J \in \mathfrak{t}$ であり、任意の $\alpha \in \Delta_c^+, \beta \in \Delta_n^+$ に対して

$$\langle J, \alpha \rangle = 0, \quad \langle J, \beta \rangle = \pm 1$$

が成り立つ. よって、 J は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関するルート系に付随する特性元である. $W(G)J$ への $W(G)$ への自然な作用のイソトロピー群は

$$\{\sigma \in W(G) \mid \sigma J = J\} = \{\sigma \in W(K) \mid \sigma J = J\} = W(K)$$

よって、主張が成り立つ. □

例 2.8. $R = E_7$ のとき、特性元 J は本質的にただ一つで、

$$\langle J, \alpha_7 \rangle = 1, \quad \langle J, \alpha_i \rangle = 0 \quad (1 \leq i \leq 6)$$

によって与えられる. このとき、 $W(E_7)J$ は -1 倍で不変な部分集合であり、 $\#(W(E_7)J) = 2^3 \cdot 7$ となる.²

¹補題の主張は間下克哉先生に教えていただいた. 2013/8/21(東京理科大)

²間下克哉先生により位数だけでなく、軌道そのものが求められている. コンピュータによる計算を用いた. 2013/8/22

証明 特性元 J の一意性は明らかである． compact 型 Hermite 対称空間 $E_7/(E_6 \cdot T)$ の複素構造 J はルート系 E_7 に付随した特性元である． 上の補題より

$$\#(W(E_7)J) = \frac{\#(W(E_7))}{\#(W(E_6))} = \frac{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5} = 2^3 \cdot 7$$

となる． $W(E_7)J$ は -1 倍に関して不変であり， 二点等質になる（詳しい計算は付録を参照）． $\square$

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ (定義は [6]) に付随した特性元とは， 既約ルートの系 $\tilde{\Sigma}$ に付随した特性元のことを指す． 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の Weyl 群とは， $\tilde{\Sigma}$ の Weyl 群 $W(\tilde{\Sigma})$ のことを指す．

3 S^2 の二つの大円の交叉

次の節で自然に一般化される形で， S^2 の二つの大円 S^1 の交叉について述べておく． $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathbb{R}^3$ とを次のようにして同一視する：

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{g} &= \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ の標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathfrak{su}(2)$ の不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を誘導する． $J = (1/2, 0, 0) \in \mathfrak{su}(2)$ とおくと， $M = S^2 = \text{Ad}(SU(2))J \subset \mathbb{R}^3$ ． $\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3$ 上の変換 τ を

$$\tau : \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3; X = (x, y, z) \mapsto -\bar{X} = (x, -y, z)$$

と定めると， τ は $M = S^2$ 上の対合的反正則等長変換になる． S^2 上での τ の固定点集合 $F(\tau)$ は

$$F(\tau) = L = \left\{ \left(\frac{1}{2} \cos \theta, 0, \frac{1}{2} \sin \theta \right) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} = S^1 \ni J$$

$G = SU(2)$ 上の対合 I_τ を

$$I_\tau : G = SU(2) \rightarrow G; g \mapsto \tau \circ g \circ \tau^{-1} = \bar{g}$$

と定める. このとき, G 内での I_τ の固定点集合 $F(I_\tau)$ は $F(I_\tau) = SO(2)$ であり, $(G, F(I_\tau))$ は compact 対称対になる. そこで, $\mathfrak{su}(2)$ を標準分解し,

$$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{p}$$

と表す. $\mathfrak{p}$ 内の部分空間 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a} = \mathbb{R}J$ と定義すると, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の J を含む極大可換部分空間である. $\alpha = 4J$ とおくと, $\langle \alpha, J \rangle = 1$ であり, $(G, F(I_\tau))$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系 R とその Weyl 群は

$$R = \{\pm\alpha\} = A_1, \quad W(R)\{\pm 1\}$$

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \alpha, H \rangle \in \pi\mathbb{Z} \text{ のとき, } S^1 &= \text{Ad}(\exp H)S^1, \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \text{ のとき, } S^1 \cap \text{Ad}(\exp H)S^1 &= \{\pm J\} = W(R)J \end{aligned}$$

4 compact 型既約 Hermite 対称空間内の 二つの実形の交叉

$\mathfrak{g}$ を compact 単純 Lie 環とし, $J \in \mathfrak{g} - \{0\}$ を $(\text{ad}J)^3 = -\text{ad}J$ ととる. $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ とし, $M = G \cdot J$ とおく. $\mathfrak{g}$ 上に G -不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を入れる. G の閉部分群 K を $K = \{k \in G \mid k \cdot J = J\}$ とおく. K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [J, X] = 0\}$$

$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m} = \text{Im ad}J$ と定めると

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad (\text{直交直和})$$

$\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型写像 $e^{\pi \text{ad}J}$ の $(+1)$ -固有空間と (-1) -固有空間がそれぞれ $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{m}$ になる. J は $\mathfrak{m}$ 上の K -作用と可換な複素構造を定める. このようにして $M \cong G/K$ は compact 型既約 Hermite 対称空間になる. 逆に全ての compact 型既約 Hermite 対称空間は, このようにして得られる. L を M の実形とする. すなわち, L は M のある対合的反正則等長同型写像 τ の固定点集合である. 実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体である. 正の正則断面曲率を持つ compact ケーラー多様体 (compact 型 Hermite 対称空間はこの条件を満たす) の実形は連結になる ([16, Lemma 4.1]). この

ことから compact 型 Hermite 対称空間の二つの実形は必ず交わることがわかる．compact 型既約エルミート対称空間の実形については [8], [11] で分類されている． G 上の対合的自己同型写像 I_τ を

$$I_\tau : G \mapsto G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

と定める． G における I_τ の固定点集合を $F(I_\tau)$ と表すと $(G, F(I_\tau))$ は compact 対称対になる．この対称対による $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ と表すと $J \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ ([16, Theorem 4.3]). $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を $J \in \mathfrak{a}$ となるようにとり， $\mathfrak{a}$ に関する $(G, F(I_\tau))$ の制限ルート系を R と表す． $\lambda \in R$ の重複度を $m_R(\lambda)$ と表す．任意の $\lambda \in R^+$ に対して $\langle J, \lambda \rangle \geq 0$ としてよい． $\mathfrak{l}, \mathfrak{p}$ を R により制限ルート分解し，

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \oplus \sum_{\lambda \in R^+} \mathfrak{l}_\lambda, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in R^+} \mathfrak{p}_\lambda$$

と表す． J は R に付随する特性元である．このとき，

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, J \rangle = 0} (\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{l}_\lambda), \quad \mathfrak{m} = \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} (\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{l}_\lambda)$$

特に

$$\dim M = 2 \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} m_R(\lambda) \quad (4.2)$$

4.1 合同な二つの実形の交叉

交叉 $L \cap gL$ ($g \in G$) について考察する． $G = F(I_\tau)(\exp \mathfrak{a})F(I_\tau)$ だから，ある $b_1, b_2 \in F(I_\tau), a \in \exp \mathfrak{a}$ が存在して， $g = b_1 a b_2$ ．このとき，

$$L \cap gL = L \cap b_1 a L = b_1 (L \cap aL)$$

ゆえに交叉 $L \cap gL$ を調べるためには $g = a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) としてよい．[16, Theorem 4.3] より

$$L = M \cap \mathfrak{p}, \quad aL = M \cap a\mathfrak{p}, \quad L_1 \cap aL_2 = M \cap (\mathfrak{p} \cap a\mathfrak{p})$$

補題 4.1. $\mathfrak{p} \cap a\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in R^+, \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_\lambda$

上の補題から H が正則元 (任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$) ならば, 交叉 $L \cap aL$ は離散的になることがわかる. この逆も成立することを次に示す.

定理 4.2. 交叉 $L \cap aL$ ($a = \exp H$) が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである.

証明 H が正則元でなければ, 交叉 $L_1 \cap aL_2$ が離散的にならないことを示せばよい. H を正則元でないとすると, ある $\lambda \in R^+$ が存在して, $\langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$. ある $X \in W(R)J$ が存在して, $\langle \lambda, X \rangle \neq 0$. $S_\lambda \in \mathfrak{l}_\lambda, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda$ を $\|S_\lambda\| = \|T_\lambda\| = 1$, かつ, 任意の $H' \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[H', S_\lambda] = \langle \lambda, H' \rangle T_\lambda, [H', T_\lambda] = -\langle \lambda, H' \rangle S_\lambda, [S_\lambda, T_\lambda] = \lambda$$

を満たすようにとれる ([12, p. 89, Lemma 1]). このとき,

$$\exp(tS_\lambda)X = X + \frac{\langle \lambda, X \rangle}{\|\lambda\|^2}(\cos(t\|\lambda\|) - 1)\lambda - \frac{\langle \lambda, X \rangle}{\|\lambda\|} \sin(t\|\lambda\|)T_\lambda \in L_1 \cap aL_2$$

よって, 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的ではない. $\square$

上の補題と [5, Ch. VII, Prop. 2.2] より, 次が成り立つ.

定理 4.3. [16, Theorem 4.3] 交叉 $L \cap aL$ が離散的のとき,

$$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$$

$M \cap \mathfrak{a}$ は L の大対蹠集合を表している. $M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$ となることは知られている ([1, p. 227, 8.101 Remark]). L の大対蹠集合に $W(R)$ が推移的に働くことも知られている ([13]). 用語の説明をしておこう. 部分集合 $S \subset L$ が対蹠集合であるとは, 任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ となることをいう. ここで, s_x は x に関する点対称である. L の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい, $\#_2 L$ で表す. $\#_2 L$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**という. これらの概念は Chen-長野が導入した ([3]).

4.2 合同でない二つの実形の交叉

L_1, L_2 を M の二つの実形とする. L から決まる対象物に対する記号と対応する L_i から決まる対象物には同じ記号を用いる. ただし, 添え字 i をつける.

以下, $\mathfrak{g}$ は単純で, L_1 と L_2 は互いに合同でないと仮定する. このとき, M は compact 型既約 Hermite 対称空間になる. 合同でないという仮定から τ_1 と τ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない. compact 対称三対の分類と実形の分類から I_{τ_1} と I_{τ_2} は可換にとれる. このとき,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_2 \oplus \mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1)$$

$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を $J \in \mathfrak{a}$ ととり, compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$ の定める重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す. $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ の重複度をそれぞれ $m(\lambda), n(\alpha)$ と表す. 任意の $\lambda \in \tilde{\Sigma}^+$ に対して $\langle \lambda, J \rangle \geq 0$ としてよい. 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ による分解

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2 &= \mathfrak{l}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{l}_\lambda, & \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 &= \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{p}_\lambda, \\ \mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2 &= V(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2), \\ \mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1 &= V(\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1) \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, J は $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に付随した特性元であり,

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus V(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{l}_2) \oplus V(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1) \\ &\oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, J \rangle = 0} (\mathfrak{l}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_\lambda) \oplus \sum_{\alpha \in W^+, \langle \alpha, J \rangle = 0} (V_\alpha^\perp(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{l}_2) \oplus V_\alpha^\perp(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1)), \\ \mathfrak{m} &= \sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} (\mathfrak{l}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_\lambda) \oplus \sum_{\alpha \in W^+, \langle \alpha, J \rangle = 1} (V_\alpha^\perp(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{l}_2) \oplus V_\alpha^\perp(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1)) \end{aligned}$$

特に

$$\dim M = 2 \left(\sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, J \rangle = 1} m(\lambda) + \sum_{\alpha \in W^+, \langle \alpha, J \rangle = 1} n(\alpha) \right) \quad (4.3)$$

交叉 $L_1 \cap gL_2$ ($g \in G$) について考察する. $\exp \mathfrak{a}$ は G 内のトーラスで, $G = F(I_{\tau_1})(\exp \mathfrak{a})F(I_{\tau_2})$ が成り立つ ([4]). よって, 任意の $g \in G$ について, $b_i \in F(I_{\tau_i}), a \in \exp \mathfrak{a}$ が存在して, $g = b_1 a b_2$. このとき,

$$L_1 \cap gL_2 = L_1 \cap b_1 a L_2 = b_1 (L_1 \cap a L_2)$$

ゆえに交叉 $L_1 \cap gL_2$ を調べるためには $g = a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) としてよい. [16, Theorem 4.3] より

$$L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1, \quad aL_2 = M \cap a\mathfrak{p}_2, \quad L_1 \cap aL_2 = M \cap (\mathfrak{p}_1 \cap a\mathfrak{p}_2)$$

補題 4.4. $\mathfrak{p}_1 \cap a\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W^+, \langle \alpha, H \rangle \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}} V_\alpha(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{l}_2)$

証明 $X \in \mathfrak{p}_2$ を

$$X = H_1 + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} T_\lambda + Y + \sum_{\alpha \in W^+} X_\alpha$$

$$(H_1 \in \mathfrak{a}, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda, X_\alpha \in V_\alpha(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1), Y \in V(\mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{l}_1))$$

と分解する. このとき, $aH_1 = H_1, aY = Y,$

$$aT_\lambda = \cos(\langle \lambda, H \rangle)T_\lambda + \sin(\langle \lambda, H \rangle) \frac{[H, T_\lambda]}{\langle \lambda, H \rangle},$$

$$aX_\alpha = \cos(\langle \alpha, H \rangle)X_\alpha + \sin(\langle \alpha, H \rangle) \frac{[H, X_\alpha]}{\langle \alpha, H \rangle}$$

が成り立つ. この等式は $\langle \lambda, H \rangle = 0$ や $\langle \alpha, H \rangle = 0$ の場合でも意味を持ち, 全ての場合で成り立つ. これより主張が得られる. $\square$

上の補題から H が正則元 (任意の $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$) ならば, 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的になることがわかる. この逆も成立することを次に示す.

定理 4.5. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ ($a = \exp H$) が離散的になるための必要十分条件は H が正則元になることである.

証明 H が正則元でなければ, 交叉 $L_1 \cap aL_2$ が離散的にならないことを示せばよい. H を正則元でないとすると, (i) ある $\lambda \in \Sigma^+$ が存在して, $\langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$, または, (ii) ある $\alpha \in W$ が存在して, $\langle \alpha, H \rangle \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ となる.

(i) の場合: ある $X \in W(\Sigma)J$ が存在して, $\langle \lambda, X \rangle \neq 0$. $S_\lambda \in \mathfrak{l}_\lambda, T_\lambda \in \mathfrak{p}_\lambda$ を $\|S_\lambda\| = \|T_\lambda\| = 1$, かつ, 任意の $H' \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[H', S_\lambda] = \langle \lambda, H' \rangle T_\lambda, [H', T_\lambda] = -\langle \lambda, H' \rangle S_\lambda, [S_\lambda, T_\lambda] = \lambda$$

を満たすようにとれる ([12, p. 89, Lemma 1]). このとき,

$$\exp(tS_\lambda)X = X + \frac{\langle \lambda, X \rangle}{\|\lambda\|^2} (\cos(t\|\lambda\|) - 1)\lambda - \frac{\langle \lambda, X \rangle}{\|\lambda\|} \sin(t\|\lambda\|)T_\lambda \in L_1 \cap aL_2$$

よって, 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的ではない.

(ii) の場合 : $\text{span}(W(\Sigma)\alpha) = \mathfrak{a}$ となるので, $X \in W(\Sigma)J$ が存在して, $\langle \alpha, X \rangle \neq 0$. $V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{p}_2)$ と $V_\alpha^\perp(\mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{p}_1)$ の基底 $\{X_{\alpha,i}\}$ と $\{Y_{\alpha,i}\}$ を [6, Lemma 4.16] のようにとる. このとき,

$$\exp(tX_{\alpha,i})X = X + \frac{\langle \alpha, X \rangle}{\|\alpha\|^2} (\cos(t\|\alpha\|) - 1)\alpha - \frac{\langle \alpha, X \rangle}{\|\alpha\|} \sin(t\|\alpha\|)Y_{\alpha,i} \in L_1 \cap aL_2$$

よって, 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的ではない. $\square$

以下, 交叉は離散的と仮定する. $M \cap \mathfrak{a}_i$ は L_i の大対蹠集合であり,

$$L_1 \cap aL_2 = M \cap \mathfrak{a} = G \cdot J \cap \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2, \quad M \cap \mathfrak{a}_i = W(R_i)J$$

が成り立つ. これより

$$W(\tilde{\Sigma})J \subset L_1 \cap aL_2 \subset M \cap \mathfrak{a}_i = W(R_i)J$$

が成り立つ. 以上の準備の下で次の主結果を示す.

定理 4.6. 交叉 $L_1 \cap aL_2$ は離散的であるとする. このとき,

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

証明 $W(\tilde{\Sigma})J \subset L_1 \cap aL_2 \subset W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2$ となることは証明済みである. (M, L_1, L_2) の分類から $\tilde{\Sigma}$ は A 型, B 型, C 型のいずれかになる.

$\tilde{\Sigma}$ が B 型または C 型の場合 : $\tilde{\Sigma}$ に付随した $\mathfrak{a}$ の特性元全体は $W(\tilde{\Sigma})J$ で与えられる. $W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2$ の任意の元 X は $\mathfrak{a} - \{0\}$ の元で $(\text{ad} X)^3 = -\text{ad} X$ を満たす. よって $X \in W(\tilde{\Sigma})J$ となり $W(\tilde{\Sigma})J = L_1 \cap aL_2 = W(R_1)J \cap \mathfrak{a}_2$ が成り立つ. 同様に $L_1 \cap aL_2 = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}_1$ も成り立つ.

$\tilde{\Sigma}$ が A 型の場合は二種類しかなく個別に確かめた. $\square$

最近, 福島高専 馬場蔵人氏との共同研究により, $(G, F(I_{\tau_2}))$ が正規実形に付随する compact 対称対のときには, $\tilde{\Sigma} = R_1$ となることが示された. したがって, この場合には $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ. この条件を満たす (M, L_1, L_2) を全てあげると次のようになる.

例 4.7. ([15, Theorems 5.1, 5.2, 5.4–5.7]) 以下の (M, L_1, L_2) について $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ.

- (1) $(G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n}))$. このとき, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^n$.

$$(2) (Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m)).$$

$$\text{このとき, } \#(L_1 \cap aL_2) = 2^m.$$

$$(3) (SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m)).$$

$$\text{このとき, } \#(L_1 \cap aL_2) = 2^m.$$

$$(4) (E_7/T \cdot E_6, T \cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2).$$

$$\text{このとき, } \#(L_1 \cap aL_2) = 8.$$

$$(5) (E_6/T \cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2).$$

$$\text{このとき, } \#(L_1 \cap aL_2) = 3.$$

$$(6) (G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)})).$$

$$\text{このとき, } \#(L_1 \cap aL_2) = \binom{m+q}{q}.$$

$(G, F(I_{r_2}))$ が正規実形に付随する compact 対称対でなくとも, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ となれば, $\tilde{\Sigma} = R_1$ であり, $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ. この条件を満たす (M, L_1, L_2) はただ一つである :

例 4.8. ([14, Theorem 1.1]) $(M, L_1, L_2) = (Q_{r+s+t-1}(\mathbb{C}), S^{r-1, s+t-1}, S^{r+s-1, t-1})$ ($s > 0, r < t$) について $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$ が成り立つ. このとき, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2r$.

$\tilde{\Sigma} \neq R_1, R_2$ となる (M, L_1, L_2) はただ一つである :

例 4.9. ([15, Theorem 5.3]) $(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$ のとき,

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J, \#(L_1 \cap aL_2) = 2^m, \#_2(L_1) = \binom{2m}{m}, \#_2(L_2) = 2^{2m}$$

この場合には

$$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) = (\text{III-}C_m) = (C_m, C_m, C_m), \quad R_1 = A_{2m-1}, \quad R_2 = C_{2m}$$

となっている.

5 今後の課題

既約の仮定を落として, compact 型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉を考えると, どのようになるのだろうか? この場合には, 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の $\tilde{\Sigma}$ に当たる部分が既約ルート系ではなくなるので, これについて調べるためには対称三対の概念を拡張する必要があると思われる. また, 二つの制限ルート系 $(R_1, \mathfrak{a}_1)$, $(R_2, \mathfrak{a}_2)$ と対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の関係を詳しく知るような理論があれば, より便利と思われる. これについては $(R_1, \mathfrak{a}_1)$, $(R_2, \mathfrak{a}_2)$ の定める二つの佐武図形から [10] を用いて $\tilde{\Sigma}$ までは読み取れ, 馬場氏との共同研究が進行中である. もし, このようなことがはっきりわかれば, 例えば一般化された複素旗多様体内の二つの実形から compact 対称三対が定まるが, これらの実形の交叉の研究に役立つと期待される.

二つの実形と Hermann 作用 (の特別なもの) とは, 今のところ対称三対を通じて間接的に関係しているが, 直接的な関係はあるのだろうか? 一般的な Hermann 作用も交叉の理論と関係があるのだろうか?

参考文献

- [1] Arthur L. Besse, Einstein manifolds, Springer.
- [2] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Hermann, Paris, 1975.
- [3] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [4] E. Heintze, R. S. Palais, C. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, topology & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 214–245.
- [5] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.
- [6] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan, **63** (2011) 79–136.

- [7] O. Ikawa, A note on symmetric triad and Hermann action, Proceedings of the workshop on differential geometry of submanifolds and its related topics, Saga, August 4–6, (2012), 203–212.
- [8] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom., **14** (1979), 179–185.
- [9] T. Matsuki, Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.
- [10] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair, Advanced studies in pure mathematics, **4** (1984) 433–497.
- [11] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. Journ. **36** (1984), 293–314.
- [12] M. Takeuchi, Modern spherical functions, Translations of mathematical monographs, **135**, Amer. Math. Soc.
- [13] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.
- [14] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.
- [15] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, **64** (2012) 1297–1332.
- [16] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

6 付録： E_6 に随伴した特性元

例 2.5 の計算の詳細を示しておく．

J_j を $J_j = J_1 - \sum_{j=1}^6 k_j \alpha_j$ と表示したときの係数 k_j は次のようになる．

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
J_1						
J_2	1					
J_3	1		1			
J_4	1		1	1		
J_5	1	1	1	1		
J_6	1		1	1	1	
J_7	1	1	1	1	1	
J_8	1		1	1	1	1
J_9	1	1	1	2	1	
J_{10}	1	1	1	1	1	1
J_{11}	1	1	1	2	1	1
J_{12}	1	1	2	2	1	
J_{13}	1	1	2	2	1	1
J_{14}	1	1	1	2	2	1
J_{15}	2	1	2	2	1	
J_{16}	2	1	2	2	1	1
J_{17}	1	1	2	2	2	1
J_{18}	2	1	2	2	2	1
J_{19}	1	1	2	3	2	1
J_{20}	2	1	2	3	2	1
J_{21}	1	2	2	3	2	1
J_{22}	2	2	2	3	2	1
J_{23}	2	1	3	3	2	1
J_{24}	2	2	3	3	2	1
J_{25}	2	2	3	4	2	1
J_{26}	2	2	3	4	3	1
J_{27}	2	2	3	4	3	2

$s_i J_j$ は次のようになる.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
J_1	J_2	J_1	J_1	J_1	J_1	J_1
J_2	J_1	J_2	J_3	J_2	J_2	J_2
J_3	J_3	J_3	J_2	J_4	J_3	J_3
J_4	J_4	J_5	J_4	J_3	J_6	J_4
J_5	J_5	J_4	J_5	J_5	J_7	J_5
J_6	J_6	J_7	J_6	J_6	J_4	J_8
J_7	J_7	J_6	J_7	J_9	J_5	J_{10}
J_8	J_8	J_{10}	J_8	J_8	J_8	J_6
J_9	J_9	J_9	J_{12}	J_7	J_9	J_{11}
J_{10}	J_{10}	J_8	J_{10}	J_{11}	J_{10}	J_7
J_{11}	J_{11}	J_{11}	J_{13}	J_{10}	J_{14}	J_9
J_{12}	J_{15}	J_{12}	J_9	J_{12}	J_{12}	J_{13}
J_{13}	J_{16}	J_{13}	J_{11}	J_{13}	J_{17}	J_{12}
J_{14}	J_{14}	J_{14}	J_{11}	J_{14}	J_{11}	J_{14}
J_{15}	J_{12}	J_{15}	J_{15}	J_{15}	J_{15}	J_{16}
J_{16}	J_{13}	J_{16}	J_{16}	J_{16}	J_{18}	J_{15}
J_{17}	J_{18}	J_{17}	J_{14}	J_{19}	J_{13}	J_{17}
J_{18}	J_{17}	J_{18}	J_{18}	J_{20}	J_{16}	J_{18}
J_{19}	J_{20}	J_{21}	J_{19}	J_{17}	J_{19}	J_{19}
J_{20}	J_{19}	J_{22}	J_{23}	J_{18}	J_{20}	J_{20}
J_{21}	J_{19}	J_{19}	J_{21}	J_{21}	J_{21}	J_{21}
J_{22}	J_{21}	J_{20}	J_{24}	J_{22}	J_{22}	J_{22}
J_{23}	J_{23}	J_{24}	J_{20}	J_{23}	J_{23}	J_{23}
J_{24}	J_{24}	J_{22}	J_{22}	J_{25}	J_{24}	J_{24}
J_{25}	J_{25}	J_{25}	J_{25}	J_{24}	J_{26}	J_{25}
J_{26}	J_{26}	J_{26}	J_{26}	J_{26}	J_{25}	J_{27}
J_{27}	J_{27}	J_{27}	J_{27}	J_{27}	J_{27}	J_{26}

上の表から直ちに次がわかる.

$$\bigcup_{i=1}^5 \Delta_i - \{J_1\} = \{J = J_1 - \sum_{j=1}^6 k_j \alpha_j \in W(E_6)J_1 \mid k_1 = 2\},$$

$$W(E_6)J_1 - \bigcup_{i=1}^5 \Delta_i = \{J - \sum_{j=1}^6 k_j \alpha_j \in W(E_6)J_1 \mid k_1 = 1\}$$

補題 6.1. $1 \leq i \leq 5$ に対して, $\Delta_i = \mathfrak{a}^{(i)} \cap W(E_6)J_1$.

証明 $\subset$ は明らかだから $\supset$ を示す. 例えば $i = 1$ とする. 今, 仮に $J_k \in \mathfrak{a}^{(1)} \cap W(E_6)J_1$ で $J_k \notin \Delta_1$ となるものが存在したとする. 明らかに $j \geq 2$ に対して $J_k \notin \Delta^{(j)}$. したがって, $J_k = J_1 - \alpha_1 - \sum_{j=2}^6 k_j \alpha_j$ という形になる. 特に,

$$\langle J_1, J_k \rangle = \|J_1\|^2 - \langle \alpha_1, J_1 \rangle = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$J_k \in \mathfrak{a}^{(1)}$ より $x, y \in \mathbb{R}$ が存在して $J_k = xJ_1 + yJ_{15}$. 両辺のノルムの二乗を計算し,

$$1 = x^2 + y^2 - xy$$

J_k と J_1 との内積を計算し

$$\frac{1}{3} = \langle J_1, J_k \rangle = x\langle J_1, J_{15} \rangle + y\|J_1\|^2 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y$$

J_k と J_{15} との内積を計算し,

$$\langle J_k, J_{15} \rangle = x\langle J_1, J_{15} \rangle + y\|J_1\|^2 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = 2x - \frac{1}{6}$$

上の式より $x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{4}$. よって, $\langle J_k, J_{15} \rangle \notin \mathbb{Q}$ となり矛盾が起こる.

7 付録: E_7 に随伴した特性元

E_7 の特性元

$$J = \frac{1}{2}(2e_6 - e_7 + e_8) = \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 5\alpha_6 + 4\alpha_7 + 3\alpha_8)$$

の軌道について調べる. J_k を次の表で定める. 次の表は $2J_k = \sum c_i e_i$ と表したときの, 係数 c_i を書いている. J_k の番号 k が飛び飛びなのは間下先生の番号付けに合わせたため.

$2J_k$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
$2J_1$	1	1	1	1	1	1	0	0
$2J_4$	-1	-1	1	1	1	1	0	0
$2J_6$	-1	1	-1	1	1	1	0	0
$2J_7$	1	-1	-1	1	1	1	0	0
$2J_{10}$	-1	1	1	-1	1	1	0	0
$2J_{11}$	1	-1	1	-1	1	1	0	0
$2J_{13}$	1	1	-1	-1	1	1	0	0
$2J_{16}$	-1	-1	-1	-1	1	1	0	0
$2J_{18}$	-1	1	1	1	-1	1	0	0
$2J_{19}$	1	-1	1	1	-1	1	0	0
$2J_{21}$	1	1	-1	1	-1	1	0	0
$2J_{24}$	-1	-1	-1	1	-1	1	0	0
$2J_{25}$	1	1	1	-1	-1	1	0	0
$2J_{28}$	-1	-1	1	-1	-1	1	0	0
$2J_{30}$	-1	1	-1	-1	-1	1	0	0
$2J_{31}$	1	-1	-1	-1	-1	1	0	0
$2J_{33}$	0	0	0	0	0	2	1	-1
$2J_{46}$	0	0	0	0	2	0	-1	1
$2J_{47}$	0	0	0	2	0	0	-1	1
$2J_{48}$	0	0	2	0	0	0	-1	1
$2J_{49}$	0	2	0	0	0	0	-1	1
$2J_{50}$	2	0	0	0	0	0	-1	1
$2J_{52}$	-2	0	0	0	0	0	-1	1
$2J_{53}$	0	-2	0	0	0	0	-1	1
$2J_{54}$	0	0	-2	0	0	0	-1	1
$2J_{55}$	0	0	0	-2	0	0	-1	1
$2J_{56}$	0	0	0	0	-2	0	-1	1

このとき, $W(E_7)J$ は J と J_k 及びこれらの -1 倍からなる.

$$\|J - J_k\| = \sqrt{2}, \quad \|J + J_k\| = 2, \quad \|J - (-J)\| = \sqrt{6}$$

が成り立つ. $s_1, \dots, s_6$ で生成される $W(E_7)$ の部分群 $W(E_6)$ は J に関するイソトロピー部分群である. $s_i J_k$ については次が成り立つ.

J_k	$s_1 J_k$	$s_2 J_k$	$s_3 J_k$	$s_4 J_k$	$s_5 J_k$	$s_6 J_k$
J_1	J_{50}	J_4	J_1	J_1	J_1	J_1
J_4	J_{53}	J_1	J_4	J_6	J_4	J_4
J_6	J_{54}	J_6	J_7	J_4	J_{10}	J_6
J_7	J_7	J_7	J_6	J_7	J_{11}	J_7
J_{10}	J_{55}	J_{10}	J_{11}	J_{10}	J_6	J_{18}
J_{11}	J_{11}	J_{11}	J_{10}	J_{13}	J_7	J_{19}
J_{13}	J_{13}	J_{16}	J_{13}	J_{11}	J_{13}	J_{21}
J_{16}	J_{16}	J_{13}	J_{16}	J_{16}	J_{16}	J_{24}
J_{18}	J_{18}	J_{18}	J_{19}	J_{18}	J_{18}	J_{10}
J_{19}	J_{19}	J_{19}	J_{18}	J_{21}	J_{19}	J_{11}
J_{21}	J_{21}	J_{24}	J_{21}	J_{19}	J_{25}	J_{13}
J_{24}	J_{24}	J_{21}	J_{24}	J_{24}	J_{28}	J_{16}
J_{25}	J_{25}	J_{28}	J_{25}	J_{25}	J_{21}	J_{25}
J_{28}	J_{28}	J_{25}	J_{28}	J_{30}	J_{21}	J_{28}
J_{30}	J_{30}	J_{30}	J_{31}	J_{28}	J_{30}	J_{30}
J_{31}	J_{33}	J_{31}	J_{30}	J_{31}	J_{31}	J_{31}
J_{33}	J_{31}	J_{33}	J_{33}	J_{33}	J_{33}	J_{33}
J_{46}	J_{46}	J_{46}	J_{46}	J_{46}	J_{46}	J_{47}
J_{47}	J_{47}	J_{47}	J_{47}	J_{47}	J_{48}	J_{46}
J_{48}	J_{48}	J_{48}	J_{48}	J_{49}	J_{47}	J_{48}
J_{49}	J_{49}	J_{52}	J_{50}	J_{48}	J_{49}	J_{49}
J_{50}	J_1	J_{53}	J_{49}	J_{50}	J_{50}	J_{50}
J_{52}	J_{52}	J_{49}	J_{53}	J_{52}	J_{52}	J_{52}
J_{53}	J_4	J_{50}	J_{52}	J_{54}	J_{53}	J_{53}
J_{54}	J_6	J_{54}	J_{54}	J_{53}	J_{55}	J_{54}
J_{55}	J_{10}	J_{55}	J_{55}	J_{55}	J_{54}	J_{56}
J_{56}	J_{18}	J_{56}	J_{56}	J_{56}	J_{56}	J_{55}

s_7 の作用については $s_7 J = J_{46}$, $s_7 J_{56} = -J_{33}$ となる. ゆえに $W(E_7)J$ は二点等質である.