法束の極小性と austere 部分多様体

梶ヶ谷徹[*] (東北大・理)

1 $\mathbb{C}^{n+k}$ 内の法束の極小性, H-極小性

N^n を標準的な内積を持つ Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする. $\mathbb{R}^{n+k}$ の接束 $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{R}^{n+k} \oplus \mathbb{R}^{n+k}$ には, $\mathbb{R}^{n+k}$ からの標準的な内積が定まり, また, $(X, Y) \in T_z\mathbb{R}^{n+k} \oplus T_z\mathbb{R}^{n+k}$ for $z \in \mathbb{R}^{n+k} \oplus \mathbb{R}^{n+k}$ に対し, 複素構造 J を $J(X, Y) = (-Y, X)$ と定めることで, 自然に複素 Euclide 空間 $\mathbb{C}^{n+k}$ と同一視することができる. 以下では常にこの同一視のもと $T\mathbb{R}^{n+k}$ を $\mathbb{C}^{n+k}$ と見なす. N の法束 $\nu N := \{(p, u) \in T\mathbb{R}^{n+k};\ p \in N, u \perp T_pN\}$ が $T\mathbb{R}^{n+k}$ 内の標準的なシンプレクティック形式 ω に関してラグランジュ部分多様体 (すなわち, $\omega|_{\nu N} = 0$ かつ $\dim \nu N = n + k$) になることは古典的な事実として知られている. このラグランジュ部分多様体の外在的性質を調べよう.

$T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ の標準的な Kähler 計量に関する νN の平均曲率ベクトルを H とし, $\alpha_H := H \rfloor \omega$ とおく. このとき, 次の等式が成り立つことが計算により分かる:

$$\alpha_H = d\theta, \text{ where } \theta(p, u) := \sum_{i=1}^{n} \arctan \kappa_i(p, u). \tag{1}$$

ここで, $\{\kappa_i(p, u)\}_{i=1}^n$ は, N の法ベクトル $u \in \nu_pN$ に対する形作用素 A^u の固有値である (特に, u が単位法ベクトルのとき, それは N の u 方向に関する**主曲率**と呼ばれる).

よく知られているように, $\mathbb{C}^{n+k}$ 内のラグランジュ部分多様体が極小 ($H = 0$) であることと, ある phase のもとでの特殊ラグランジュ部分多様体であることは同値である ([3]). 特殊ラグランジュ部分多様体は, ある calibration に関して calibrate された部分多様体であり, もれなくホモロジー類の中で体積最小という顕著な性質をもつ. Harvey-Lawson は, 特殊ラグランジュ部分多様体を構成する一つの手段として次を示した.

*日本学術振興会特別研究員 (DC2), E-mail: sa9m09@math.tohoku.ac.jp

定理 1 ([3])**.** N^n を Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする． このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内のある phase に関する特殊ラグランジュ部分多様体であるための必要十分条件は,
($\star$) N の各単位法ベクトルに関する主曲率 $\{\kappa_i(p,u)\}_{i=1}^n$ が -1 倍に関して不変になることである．

一般に Riemann 多様体内の部分多様体で, 条件 ($\star$) を満たすものを **austere 部分多様体**と呼ぶ． austere 部分多様体は, 自動的に極小部分多様体であるが逆は一般に正しくない． 極小曲面, Kähler 多様体内の複素部分多様体が典型的な austere 部分多様体の例である． 定理 1 より, $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の austere 部分多様体の構成は興味深く重要な問題であるが, 一般の場合も含めて多くのことが分かっているわけではない． このことについては次節において再び触れる．

さて, 極小部分多様体の拡張概念として, **ハミルトン極小性**の概念がある． これは, Y. -G.Oh が論文 [12] の中で定式化したもので, 一般に Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体に対して定義され, コンパクトサポートをもつハミルトン変形のもとでの体積汎関数に関する第一変分の停留値になるものとして特徴付けられる． Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体が H-極小であるための必要十分条件 (Euler-Lagrange 方程式) は, その平均曲率形式 α_H が $\delta\alpha_H = 0$ を満たすことである． ここで, δ は $\Omega^1(L)$ に作用する余微分作用素である． 例えば, 平行な平均曲率形式を持つラグランジュ部分多様体やコンパクトな等質ラグランジュ部分多様体は, H-極小な例であるが, $\mathbb{C}^{n+k}$ 内においては, 平行な平均曲率ベクトルを持たない H-極小な (埋め込まれた) ラグランジュ部分多様体の具体例が, 多く知られているわけではない．

そこで, 法束の構成法を用いて, H-極小ラグランジュ部分多様体の例が与えられるかという問題を考える． まず, (1) より法束が H-極小であることは, 次が成り立つことと同値である．

$$\Delta\theta = 0, \text{ where } \theta(p,u) = \sum_{i=1}^{n} \arctan \kappa_i(p,u), \text{ on } \nu N. \tag{2}$$

この式から直ちに次が分かる:

命題 1 ([7])**.** N^n を $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体とする． このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内で平行な平均曲率ベクトルを持つならば, それは極小である． 従って, 次の 3 つは同値である: (i) N は austere, (ii) νN は極小, (iii) νN は平行な平均曲率ベクトルを持つ．

この系より, 平行な平均曲率を持つと言う意味での, $\mathbb{C}^{n+k}$ 内の極小でない, H-極小ラグランジュ法束は存在しない． 一方で, Sakaki は, 3 次元 Euclide 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 N^2 の法

束が $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C}^3$ 内で H-極小となるものを完全に分類した [14]. それは (i) 極小曲面, (ii) $S^2(r)$, $(r>0)$, (iii) $S^1(1/\sqrt{2}) \subset S^2(1)$ の cone のいずれかである. (i) は austere であり, (ii), (iii) がそれ以外の例である. ここでは, (ii), (iii) が $\mathbb{R}^3$ または S^2 内の等径超曲面であることに着目し, 一般の $\mathbb{C}^{n+k}$ 内に H-極小なラグランジュ部分多様体の族を与える. 実際, (1) より法束の平均曲率は, N の主曲率で表されていたことを思い出すと, 等径超曲面またはより一般に等径部分多様体は最も調べやすいクラスであると考えられる.

本稿では, 等径超曲面に言及するが, 後に述べるように, 実際はより一般の等径部分多様体に拡張される.

実空間形内の等径超曲面について復習する. $f : M(c) \to \mathbb{R}$ を定値でない実空間形 $M(c)$ 上の滑らかな関数で, ある滑らかな関数 $a, b : f(M) \to \mathbb{R}$ に対して, 条件 (i) $|\nabla f|^2 = a \circ f$ および (ii) $\Delta f = b \circ f$ を満たすものとする. このとき, f を $M(c)$ 上の**等径関数**と呼ぶ. 条件 (i) によって, $f(M)$ 内の正則値 t に対して level set $f^{-1}(t)$ は $M(c)$ 内の超曲面となる. さらに, その超曲面の主曲率はすべて定数であることがわかる. この level set $f^{-1}(t)$ を $M(c)$ 内の**等径超曲面**と呼ぶ. また, f の最大値と最小値の逆像をそれぞれ N_+, N_- とかく. $N_\pm$ は $M(c)$ 内の滑らかな部分多様体となり, f の焦部分多様体と呼ばれる. ここで, 大事なことは, 等径超曲面は一定な主曲率を持ち, 法束が平坦な部分多様体であると言う事実である.

N を向き付けられた $M(c)$ 内の超曲面とし, ν をその単位法ベクトルとする. 超曲面 N を ν 方向の測地線で同じ距離だけ移動させて得られる超曲面の族を N の平行超曲面と呼ぶ. 例えば, $c \geq 0$ なら, $t \in \mathbb{R}$ に関して写像 $F_t : N \to M(c)$ を

$$\begin{cases} F_t(p) = \mathbf{p} + t\nu(p), \text{ if } c = 0, \\ F_t(p) = \cos t\mathbf{p} + \sin t\nu(p) \text{ if } c > 0, \end{cases}$$

と定義すると F_t がはめ込みである限り, $F_t(N)$ は N の平行超曲面である ($c<0$ の場合にも同様の表示は可能である). ここで, $\mathbf{p}$ は p の位置ベクトルである. 等径超曲面は, 焦部分多様体の tube として表され, 各等径関数 f に対し, その等径超曲面は互いに平行である.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の等径超曲面は, (i) (アファイン) 超平面, (ii) 球面 $S^n(r)$, $r>0$, (iii) spherical cylinder $S^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}, 0 < m < n$ のいずれかである. 一方で, 単位球面 $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面は豊富な例が知られており, 未だに完全な分類はなされていない. 例えば球面内のすべての等質超曲面は等径超曲面である. それらは Hsiang-Lawson により分類されており, 階数 2 の対称空間のイソトロピー表現 (s-表現) の主軌道として得られることが知られている [3]. 一方で, 尾関-竹内, Ferus-Karcher-Münzner らにより, 非等質なものを無数に含む球面内の等径超曲面のクラスが存在することが知られている. これらは今日, OT-FKM

型等径超曲面と呼ばれる.

さて, (1) と等径超曲面の性質から, $\mathbb{R}^{n+1}$ または $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面 N の (Euclide 空間内の部分多様体と見たときの) 法束 νN に対し, 微分方程式 (2) を解くことは, 主曲率とその重複度に関するある方程式を満たす等径超曲面を分類することに帰着される. まず, Sakaki の与えた例は次のように一般化される.

定理 2 ([7]). (1) N^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の等径超曲面とする. このとき νN が, $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ 内の, 極小でない, H-極小な Lagrange 部分多様体であるための必要十分条件は, N が spherical cylinder $N(r) := \mathbb{R}^{n-2} \times S^2(r)(r > 0, n \geq 2)$ と局所的に合同になることである. 特に $r \neq r'$ なら, $\nu N(r)$ と $\nu N(r')$ は互いに等長的ではない. 従って, 平行超曲面族 $\{N(r)\}_{r>0}$ の法束は, $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の H-極小 Lagrange 部分多様体の 1 パラメータ族を与える.
(2)* N^n を $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面とする. このとき N の twisted normal cone $\mathcal{CN} := \{(tp, s\nu) \in T\mathbb{R}^{n+2};\ p \in N, \nu \in \nu_1 N, s, t \in \mathbb{R}\}$ が, $T\mathbb{R}^{n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+2}$ 内の, 極小でない, H-極小な Lagrange 部分多様体であるための必要十分条件は, N が次のいずれかと局所的に合同になることである: (i) $S^2(r)$ $(0 < r < 1)$, (ii) $S^n(1/\sqrt{2})(n \geq 1)$, (iii) $S^{m_1}(1/\sqrt{2}) \times S^{m_2}(1/\sqrt{2})$ $(m_1 + m_2 = n,\ m_1 \neq m_2)$.

球面の等径超曲面のうち, 異なる主曲率の重複度の等しいものの平行超曲面族の中には唯一つ austere なものが含まれることに注意しておく (従って, その twisted normal cone は特殊ラグランジュ錐である). また, 一般の s-表現の austere 軌道もすべて分類されている [4].

次に球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 N で, それを Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の部分多様体と見なしたときの法束の H-極小性を考える. この場合, N はコンパクトであり, 特に N は $\mathbb{R}^{n+2}$ 内で austere にはなり得ない. 従って, 法束は極小にはならないことに注意する.

球面内の等径超曲面 N には, 等質なものと非等質なものがあるが, いずれにしてもその主曲率に関して, 次の Münzner の結果が使える:

定理 3 ([11]). (1) N の $S^{n+1}(1)$ 内における相異なる主曲率を $\kappa_i := \cot\theta_i$ $(i = 1, \ldots, g)$, その重複度を m_i とすると, 次が成り立つ:

$$\theta_i = \theta_1 + \frac{i-1}{g}\pi, \text{ for } i = 1, \ldots, g,$$
$$m_i = m_{i+2}, \text{ modulo } g \text{ indexing.}$$

* (ii), (iii) の例は, 二重調和部分多様体の例にもなっている. 球面内の等径超曲面のうちで, 球面内の二重調和部分多様体になっているのは, 極小を除き, (ii), (iii) だけであることが知られている (cf. [5])

(2) 相異なる主曲率の個数は次のいずれかである: $g = 1, 2, 3, 4, 6$.

この結果を, (2) から得られる主曲率の関係式に適用することで, 次を示すことができる:

命題 2 ([7])**.** (1) N^n を $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面とする. このとき, $\mathbb{R}^{n+2}$ の部分多様体として, N の法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ 内の H-極小 Lagrange 部分多様体である必要十分条件は, N の S^{n+1} 内における相異なる主曲率の重複度がすべて 2 となることである.

相異なる主曲率の重複度がすべて 2 であるならば, それは等質超曲面である. 実際, $g \leq 3$ の等質性は E. Cartan, $(g, m) = (4, 2)$ の場合は尾関-竹内により示された. ここで, m は等しい重複度のことである. 残る $(g, m) = (6, 2)$ の等質性は宮岡により最近証明された [10].

より正確には, N は表 1 の Riemann 対称対 (U, K) のイソトロピー軌道のうち, いずれかと局所的に合同である. 特にこれらの平行超曲面族の法束は H-極小ラグランジュ部分多様体の 1-パラメータ族をなす.

g	(U, K)	$N \simeq K/K_0$	dim N	N_+	N_-
1	$(S^1 \times SO(4), SO(3))$	S^2	2	$\{pt\}$	$\{pt\}$
2	$(SO(4) \times SO(4), SO(3) \times SO(3))$	$S^2 \times S^2$	4	S^2	S^2
3	$(SU(3) \times SU(3), SU(3))$	$SU(3)/T^2$	6	$\mathbb{C}P^2$	$\mathbb{C}P^2$
4	$(SO(5) \times SO(5), SO(5))$	$SO(5)/T^2$	8	$\mathbb{C}P^3$	$\mathbb{Q}^3$
6	$(G_2 \times G_2, G_2)$	G_2/T^2	12	$\mathbb{Q}^5$	$\mathbb{Q}^5$

表 1: $m = 2$ の球面内の等径超曲面. $\mathbb{Q}^n$ は複素二次超曲面.

二つの部分多様体の Riemann 直積 $N_1 \times N_2 \to \mathbb{R}^{n_1+k_1} \times \mathbb{R}^{n_2+k_2}$ の法束が H-極小であるための必要十分条件は, 各 N_i の法束が H-極小になることである. 従って, H-極小性だけなら本質的には既約なものに意味がある. 定理 2(1) の場合, 既約なものは $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ であり, これはやはり, 主曲率の重複度が 2 である. 表 1 に現れる等径超曲面の場合を見れば, $g = 1, 2$ の場合はイソトロピー表現が可約で, 既約表現になっているのは, $g \geq 3$ の場合であり, それらは, Lie 群 K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ への随伴表現の主軌道になっていることが観察される.

実際このことは, 次のように一般化される:

Euclide 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の部分多様体 N^n が**等径部分多様体**であるとは,

(i) N 上の任意の区分的に滑らかな曲線 $c(t)$ に沿った平行な法ベクトル場 $u(t)$ に対して, 形作用素 $A^{u(t)}$ は一定の固有値を持つ.

(ii) N は平坦な法束を持つ. すなわち, $R^{\perp} = 0$.

(i) だけを満たす部分多様体は, 一定の主曲率を持つ部分多様体と呼ばれる. 等径部分多様体は $k = 1, 2$ のときは, それぞれ $\mathbb{R}^{n+1}$ および S^{n+1} 内の等径超曲面に一致する. $k \geq 3$ の場合は, Thorbergsson らの結果により, full かつ既約なら, s-表現 (対称空間のイソトロピー表現) の主軌道として得られることが知られている. 等径部分多様体のクラスのうちでは, 命題 2 は次のように一般化される.

定理 4 ([7]). N を $\mathbb{R}^{n+k}$ 内の full かつ既約な等径部分多様体とする. このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{C}^{n+k}$ 内の H-極小ラグランジュ部分多様体であるための必要十分条件は, N があるコンパクト単純 Lie 群 G の $\mathfrak{g}$ 上への随伴表現による主軌道になることである.

証明には制限ルート系などの s-表現の主軌道に関する準備が必要なので詳細は省略するが, 命題 2 の証明をルート系の言葉を使って一般化することで行われる.

2 法束の極小性と austere 部分多様体

定理 1 や定理 4 で見たように, 法束の接束内における部分多様体としての外在的性質が, 底空間のある性質と結びついているのは興味深い. この節では, より一般の Riemann 多様体 M 内の部分多様体 N の法束 νN の性質と, N の性質の関係を調べた結果を紹介する.

接束または余接束上の構造には, 様々なものが知られており, Harvey-Lawson の結果 (定理 1) はそのいくつかの場合に拡張されている. 例えば, Stenzel は階数 1 のコンパクト型対称空間 M 上の余接束上に Ricci-flat な Kähler 計量 g_{st} を構成したが, Karigiannis-MinOo は, 球面 S^n の場合に austere 部分多様体を, その余法束が (T^*S^n, g_{st}) 内の特殊 Lagrange 部分多様体になることとして特徴付けた [9]. また, Y. Dong は, austere の概念を擬 Euclide 空間 $\mathbb{R}^m_p$ の場合に拡張し, $\mathbb{R}^m_p$ 内の (拡張された意味での)austere 部分多様体に対して, 同様の特徴付けを与えている [2]. しかし, 一般の Riemann 多様体内の austere 部分多様体に対し, その幾何学的な意味合いは, 多くが知られているわけではない.

以下では, (M, g) は常に Riemann 多様体を考え, 余接束 T^*M は, 計量 g による標準的な同型のもと接束 TM と同一視する. $\pi : TM \to M$ を自然な射影とする. 接続写像 K とはバンドル写像 $K : TTM \to TM$ で次のように定義されるものを言う: まず, $\exp_p : V' \to V$ を p の十分小さな近傍における指数写像による局所的な微分同相とする. また, $\tau : \pi^{-1}(V) \to T_pM$ は, $Y \in \pi^{-1}(V)$ を $q = \pi(Y)$ から p までを結ぶ V 上の一意的な測地線に沿って平行移動する滑らかな写像とする. さらに, $u \in T_pM$ に対して, 写像 $R_{-u} : T_pM \to T_pM$ を $R_{-u} := X - u$ によって定義する. このとき, 接続写像は $K_{(p,u)} := d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)$ で定義される.

点 $z=(p,u)\in TM$ に対して, T_zTM の部分空間を $\mathcal{H}_z := \mathrm{Ker}K_z$ および $\mathcal{V}_z := \mathrm{Ker}d\pi_z$ で定義する．そのとき点 z における TM の接空間は直和分解 $T_zTM = \mathcal{H}_z \oplus \mathcal{V}_z$ を持ち, $d\pi_z : \mathcal{H}_z \tilde{\to} T_pM$ および $K_z : \mathcal{V}_z \tilde{\to} T_pM$ は同型写像を与える．接ベクトル $X_p \in T_pM$ に対して, $(X_p)^h_z := (d\pi_z)^{-1}X_p$, $(X_p)^v_z := K_z^{-1}X_p$ をそれぞれ X_p の水平, 垂直リフトと呼ぶ. 従って, 任意の接ベクトル $\tilde{V}_z \in T_zTM$ は $\tilde{V}_z := (X_p)^h_z + (Y_p)^v_z$ なる分解を一意的に持つ. ここで, $X_p, Y_p \in T_pM$ は $X_p := \pi_*(\tilde{V}_z)$ および $Y_p := K(\tilde{V}_z)$ により決まる接ベクトルである．同様に M 上のベクトル場 X に対し, TM 上のベクトル場 X^h, X^v は, 各点 $z\in TM$ で $X^h_z = (X_{\pi(z)})^h_z$, $X^v_z = (X_{\pi(z)})^v_z$ を満たすとき, X の水平および垂直リフトと呼ぶ.

接束 TM は, 次のようにして定義される標準的な概複素構造 J を持つ: M 上のベクトル場 X に対して, $JX^h = X^v$ および $JX^v = -X^h$. また, 佐々木計量 g_S とは次で定義される TM 上の Riemann 計量のことを言う:

$$\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})_z := \langle d\pi_z\tilde{X}, d\pi_z\tilde{Y}\rangle_{\pi(z)} + \langle K_z\tilde{X}, K_z\tilde{Y}\rangle_{\pi(z)}.$$

ここで, $\tilde{X},\tilde{Y}\in T_zTM$ である．定義より, 分解 $T_zTM = \mathcal{H}_z \oplus \mathcal{V}_z$ は g_S に関する直交分解である.

余接束 T^*M の標準的なシンプレクティック構造を g_S により引き戻した TM 上のシンプレクティック構造を ω と書くと, (TM, J, ω, g_S) は almost Kähler となる．ただし, これが Kähler になるのは, (M,g) が flat の時に限ることに注意しておく.

以下における目的は, この構造に関して, Harvey-Lawson の結果の拡張ができるかどうかを考えることである．N を M の部分多様体とすると, N の法束 νN は ω に関して Lagrange 部分多様体になる．まず, この Lagrange 法束 νN の (TM, g_S) 内における平均曲率形式を計算する．ここで, 平均曲率形式とは, νN の平均曲率ベクトル H に対して, $\alpha_H := H\rfloor\omega|_{\nu N}$ で定義される νN 上の 1 形式である．(M,g) が実空間形の場合には, (1) の一般化として, 次の公式が得られる.

命題 3 (cf. [8])**.** N を実空間形 $M(c)$ 内の部分多様体とする．このとき, g_S に関する, 法束 νN の平均曲率形式は次で与えられる:

$$\alpha_H = d\theta - cU(\theta)U^\flat, \text{ where } \theta(p,u) = \sum_{i=1}^{n} \arctan\kappa_i(p,u)$$

ここで, $\kappa_i(p,u)$ $(i=1,\cdots,n)$ は N の点 p における形作用素 A^u の固有値であり, $U(z) := u^v_z$ for $z=(p,u)$ は canonical vertical vector field である.

この平均曲率形式からまず次が従う.

系 1 ([1])**.** 実空間形 $M(c)$ 内の部分多様体 N が austere であることは, その法束 νN が (TM, g_S) 内の極小 Lagrange 部分多様体であることと同値である.

$c=0$ のときが, Harvey-Lawson の結果である. この系 1 は Cintract-Morvan らによって初めて示されたものであるが [1], 命題 3 の公式はそこには現れていない.

命題 3 を単位接束 T_1M 内の単位法束 $\nu_1 N$ に適用することができる. この場合, T_1M には標準的な接触計量構造が入り, $\nu_1 N$ は Legendre 部分多様体となる. また, その平均曲率ベクトルは H を $\nu_1 N$ に制限したものに等しい. 従って, 次を得る.

系 2. N を実空間形 $M(c)$ 内の austere 部分多様体とする. このとき, $\nu_1 N$ は $T_1 M$ 内の極小 Legendre 部分多様体である.

この逆は一般に成り立たないことに注意する. また, $M=S^m(1)$ のときに限り, T_1S^m は佐々木多様体である. この場合, g_S から誘導される計量は Einstein ではないが, η-Einstein であり, Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{R}^{m+1}) \simeq T_1S^m$ の標準的な $SO(m+1)$ 不変佐々木-Einstein 構造と D-相似的となる. 計量の D-相似変形で, Legendre 部分多様体の極小性は保たれるから, 球面内の austere 部分多様体の単位法束は, Stiefel 多様体内の極小 Legendre 部分多様体を与える. このことは次のように言い換えることもできる. $\pi : V_2(\mathbb{R}^{m+1}) \to \tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1})$ は向き付けられた 2 平面 Grassmann 多様体上の主 S^1 束で, $\phi : \nu_1 N \to T_1 S^m$ を Legendre はめ込みとすると, $\mathcal{G} := \pi \circ \phi$ は $\tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1})$(これは複素二次曲面 $\mathbb{Q}^m$ と同一視される) への Lagrange はめ込みである. 一方, この写像 $\mathcal{G}$ は, $\nu_1 N$ を指数写像によって N の球面内の tube と同一視したときの tube の (法空間を対応させる)Gauss 写像と見なせる.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \nu N & \xrightarrow{\text{min.}} & TS^m & \\
 & \cup & & \cup & \\
 & \nu_1 N & \xrightarrow{\text{min.}} & T_1S^m \simeq V_2(\mathbb{R}^{m+1}) & \\
\text{exp}\swarrow & \downarrow & \overset{\text{min.}}{\underset{\mathcal{G}}{\searrow}} & \downarrow \pi & \\
S^m \underset{\text{aust.}}{\leftarrow} & N & & \tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1}) &
\end{array}
$$

すなわち,

系 3. N を球面 $S^m(1)$ 内の austere 部分多様体とする. このとき, N の tube は $\tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1})$ 内への極小な Gauss 写像を持つ.

N が austere 超曲面なら N 自体が極小な Gauss 写像を持つ. また, この系の最も基本的な例が, 等径超曲面 (次節参照) である. (球面内の) 等径超曲面は, ある焦部分多様体の tube であるが, その焦部分多様体はすべて austere であることが知られている (例えば, [6]). なお, 等径超曲面の Gauss 写像の極小性は B.Palmer が初めて指摘したことである. 系 3 は

そのことの拡張である (実際, 系 3 は tube の主曲率を計算し, Palmer の公式を適用することでも示すことができる). また, 定理 1 は Palmer が示した Gauss 写像に対する平均曲率形式の公式の一般化にあたる [13].

なお, austere 部分多様体の例は, 極小曲面の他, いくつかの具体例が知られている. 球面の場合なら, 重複度の等しい等径超曲面族のうちの一つや, 他にも例えば, [4] や [6] に例がある.

系 1 をふまえて, 以上のことがより一般の Riemann 多様体で成立するかどうかは, 興味深い問題である. 例えば, 次が示せる:

命題 4 ([8]). (1) (M, g) を Riemann 多様体とする. N を全測地的部分多様体とすると, 法束 νN は (TM, g_S) 内の極小ラグランジュ部分多様体である.

(2) M を non-flat な複素空間形とする. N が複素部分多様体ならば, 法束 νN は (TM, g_S) 内の極小ラグランジュ部分多様体である.

(3) M を non-flat な複素空間形, N を一定の主曲率を持つ Hopf 超曲面とする. このとき, 法束 νN が (TM, g_S) 内の極小ラグランジュ部分多様体であるための必要十分条件は, N が austere になることである.

この命題で挙げた極小法束を持つ例はすべて austere である. (3) において, 一定の主曲率を持つ austere Hopf 超曲面は $\mathbb{C}P^{2k+1}$ 内の全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^k$ の tube しかないことに注意しておく.

ところが, non-flat な複素空間形には, austere であっても極小法束を持たない例が存在することが計算により分かる. 例えば, non-flat な複素空間形 M 内の極小曲面 N^2 の法束がまた (TM, g_S) 内で極小であるなら, N^2 は全測地的であるか複素曲線でなければならないことが示される. 従ってそれら以外の極小曲面は極小な法束を持たない.

なお, 実空間形の場合, N が全測地的であることと, νN が全測地的であることは同値である. しかし, この同値性も一般の Riemann 多様体では成立しない. 例えば, $\mathbb{C}P^n$ (resp. $\mathbb{C}H^n$) 内の部分多様体 N の法束が全測地的であるための必要十分条件は, N が全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^k$ (resp. $\mathbb{C}H^k$, $k = 1, \cdots, n-1$) または $\mathbb{R}P^n$ (resp. $\mathbb{R}H^n$) と局所的に合同になることである [8].

参考文献

[1] B. Cintract and J-M. Morvan, *Geometry of the normal bundle of a submanifold*, Monatsh. Math. 137, (2002), no.1, 5–20.

[2] Y. Dong, *On indefinite special Lagrangian submanifolds in indefinite complex Euclidean spaces*, J. Geom. Phys. 59 (2009), no.6, 710–726.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geometry*, Acta Math. **148** (1982) 47-157.

[4] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 61, No. 2 (2009) 437-481.

[5] T. Ichiyama, J. Inoguchi and H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. 28 (2009), 233–275.

[6] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, *Submanifolds with degenerate Gauss mappings in Spheres*, Advanced Studies in Pure Mathematics 37 (2002), 115–149.

[7] T. Kajigaya, *Hamiltonian minimality of normal bundles over the isoparametric submanifodls*, in preparation.

[8] T. Kajigaya, *On the minimality of normal bundles in tangent bundles over the complex space forms*, Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related topics Saga, August 4-6, 2012. 260–272.

[9] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371–394.

[10] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 1, 53–110.

[11] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I*, Math. Ann. **251** (1980), 57–71; *II*, **256** (1981), 215–232.

[12] Y. G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Zeit. 212 (1993), 175–192.

[13] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps.* Diff. Geom and its Appl. **7** (1997), 51-58.

[14] M. Sakaki, *Hamiltonian stationary normal bundles of surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1509–1515.