Coassociative部分多様体の具体的構成

河井　公大朗（東北大学大学院理学研究科数学専攻）*

1　序

実 7 次元のリーマン多様体 (Y, g) のホロノミー群が例外型 Lie 群 G_2 に含まれるとき、(Y, g) は G_2 多様体であるという。G_2 多様体は Y 上の 3 次微分形式 φ を用いても特徴づけることができる。φ の制限が常に 0 になるような 4 次元部分多様体を coassociative 部分多様体という。特に $SU(3) \subset G_2$ より、（3 次元カラビ・ヤウ多様体）$\times\mathbb{R}$ は G_2 多様体であり、（phase $-i$ の特殊ラグランジュ部分多様体）$\times\mathbb{R}$ はその中の coassociative 部分多様体になる。近年はミラー対称性の観点 [2] からも注目を集めており、今回はその具体的構成を考える。

2　G_2 幾何学

定義 1. $(x^1, \cdots, x^7)$ を $\mathbb{R}^7$ の標準座標とし、$\mathbb{R}^7$ 上の 3-form φ_0 を次で定義する。

$$\varphi_0 = dx^{123} + dx^1(dx^{45} - dx^{67}) + dx^2(dx^{46} - dx^{57}) + dx^3(dx^{47} - dx^{56}),$$

ここで外積の記号は省略した。φ_0 は次を満たすことが知られている。

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}); g^*\varphi_0 = \varphi_0\}.$$

Lie 群 G_2 は、$\mathbb{R}^7$ の標準計量 g_0、体積要素 vol_{g_0}、および φ の Hodge 双対 $*\varphi_0$ も固定する。これらは次の関係式より φ_0 から一意的に定まる。

$$-6g_0(v_1, v_2)\mathrm{vol}_{g_0} = i(v_1)\varphi_0 \wedge i(v_2)\varphi_0 \wedge \varphi_0, \quad (v_i \in T(\mathbb{R}^7)) \tag{2.1}$$

注意 2. 同一視 $\mathbb{R}^7 \cong \Lambda^2_-\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3$ のもと、$\varphi = d\tau + \mathrm{vol}_{\mathcal{V}}$ とかける。ここで τ は tautological 2-form で、$\mathrm{vol}_{\mathcal{V}}$ はファイバー方向の体積要素。

定義 3. (Y, g) を向きづけられた 7 次元リーマン多様体とし、φ を Y 上の 3-form で $d\varphi = 0, d * \varphi = 0$ とする。(Y, φ, g) が G_2 **多様体**であるとは、各 $y \in Y$ に対して、向きを保つ同型 $T_yY \cong \mathbb{R}^7$ が存在して、それにより φ_y と φ_0 が同一視され、g が φ から誘導される計量であるときをいう。これは $\mathrm{Hol}(g) \subset G_2$ と同値。

定義 4. $L \subset Y$ を 4 次元部分多様体とする。$\varphi|_{TL} = 0$ のとき L を **coassociative** という。

*日本学術振興会特別研究員 PD (課題番号:24-3603)
e-mail: sb1d07@math.tohoku.ac.jp

3 Lie 群の対称性を用いた例の構成

coassociative 部分多様体 L の構成のために、L がある Lie 群 G の作用によって保たれると仮定する。よく知られているように、G が L に余等質性 1 に作用しているとき、coassociative となる条件の偏微分方程式は、軌道空間上の 1 階の常微分方程式に帰着される。この手法は次のようにまとめられる。

命題 5. (Y, φ, g) を G_2 多様体とする。*Lie* 群 G が Y に作用しており、その作用は φ を定数倍を除いて保ち、かつ G の主軌道の次元は *3* とする。

1. 以下のような部分集合 $\Sigma \subset Y$ を見つける。(Σ は軌道空間 "Y/G" と思える。)

- $G \cdot \Sigma = \{g \cdot x \in Y; g \in G, x \in \Sigma\} = Y,$
- $T_x\Sigma \cap T_x(G\text{-}orbit) = \{0\}$ $(\forall x \in \Sigma),$

ここで $T_x(G\text{-}orbit)$ は、点 x における G-*orbit* 方向の接空間。

2. 以下の条件を満たす *path* $c : I \to \Sigma$ *(*$I \subset \mathbb{R}$*:* 開区間*)* を探す。

$$\varphi(v_1^*, v_2^*, v_3^*)|_c = 0, \quad \varphi(v_i^*, v_j^*, \dot{c})|_c = 0 \quad (\forall v_i \in \mathfrak{g} = Lie(G)),$$

ここで $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$、v^* は $v \in \mathfrak{g}$ で生成される Y 上のベクトル場。

3. このとき $L := G \cdot \mathrm{Image}(c)$ は G 不変な部分多様体となる。

この手法の利点として、構成された部分多様体内の特異軌道がわかりやすく、位相を解析しやすい点が挙げられる。

4 $\mathbb{R}^7$ 上での構成

4.1 $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合

SU(2) の $\mathbb{R}^7$ への作用として、SU(2) の $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ への標準的な作用から $\Lambda^2_- \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^7$ に誘導されるものを考える。このとき "軌道空間" Σ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3, \\
\Sigma_1 &= \{(y^1, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0, a^i \in \mathbb{R}\}, \\
\Sigma_2 &= \{(0, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; \sum_{i=1}^3 |a^i|^2 > 0\}, \ \Sigma_3 = \{0\},
\end{aligned}$$

このとき $\mathrm{SU}(2)\cdot\Sigma=\mathbb{R}^7$ となり、軌道の位相は次のようになる。

$$\mathrm{SU}(2)\cdot x\cong\begin{cases} S^3 & (x\in\Sigma_1),\\ S^2 & (x\in\Sigma_2),\\ * & (x\in\Sigma_3).\end{cases}$$

$\mathrm{SU}(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の基底 $\{X_1,X_2,X_3\}$ で $[X_j,X_{j+1}]=X_{j+2}(j\in\mathbb{Z}/3)$ となるものをとる。このとき path $c:I\to\Sigma$ で、

$$\varphi(X_1^*,X_2^*,X_3^*)|_c=0,\ \varphi(X_i^*,X_j^*,\dot{c})|_c=0\ \ (1\le i,j\le 3)$$

を満たすものを探せばよい。これを解くと、c は次の形になる。

$$\left\{((y^1,0,0,0),r\vec{v})\in\mathbb{R}^7;r(4r^2-5(y^1)^2)^2=C,r\ge 0\right\}$$

($\vec{v}\in S^2\subset\mathbb{R}^3$、$C\ge 0$) そして次の Harvey, Lawson による例を再構成できる。

定理 6 (Harvey and Lawson [3])**.** 任意の $\vec{v}\in S^2\subset\mathbb{R}^3$、$C\ge 0$ に対して、

$$M_C:=\mathrm{SU}(2)\cdot\left\{((y^1,0,0,0),r\vec{v})\in\mathbb{R}^7;r(4r^2-5(y^1)^2)^2=C,r\ge 0\right\}$$

は $\mathbb{R}^7$ の $\mathrm{SU}(2)$ 不変 *coassociative* 部分多様体である。
$C>0$ のとき、M_C は次の *2* つの連結成分 $M_C^{\pm}$ を持つ。

$$M_C^{\pm}:=M_C\cap\mathrm{SU}(2)\cdot\left\{((y^1,0,0,0),r\vec{v})\in\mathbb{R}^7;\pm(4r^2-5(y^1)^2)>0\right\}$$

M_C^+ *(resp.* M_C^-*)* は $\mathbb{C}P^1\cong S^2$ 上の自然束 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)$ *(resp.* $S^3\times\mathbb{R}$*)* と同型である。$C=0$ のとき

$$\begin{aligned}M_0&=M_0^0\sqcup M_0',\ M_0^0=\mathrm{SU}(2)\cdot\left\{(y^1,0,0,0,0,0,0);y^1\ge 0\right\},\\ M_0'&=\mathrm{SU}(2)\cdot\left\{y^1\cdot\left((1,0,0,0),\tfrac{\sqrt{5}}{2}\vec{v}\right)\in\mathbb{R}^7;y^1>0\right\},\end{aligned}$$

となり、M_0^0 は 平坦な $\mathbb{R}^4$、M_0' は *Hopf fibration* $S^3\to S^2$ のグラフ上の錐で、$S^3\times\mathbb{R}$ に同型である。更に、この $\mathrm{SU}(2)$ 作用で不変な *coassociative* 部分多様体はすべてこの形にかける。

4.2 $G=T^2\times\mathbb{R}_{>0}$ の場合

$T^2\times\mathbb{R}_{>0}$ の $\mathbb{R}^7$ への作用を次で定める。

$$(e^{i\theta},e^{i\psi},R)\cdot(z^1,z^2,a^1,w)=(Re^{i\theta}z^1,Re^{i\psi}z^2,Ra^1,Re^{i(\psi-\theta)}w),$$

ここで $(e^{i\theta}, e^{i\psi}, R) \in T^2 \times \mathbb{R}_{>0}$, $(z^1, z^2, a^1, w) \in \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{R}^7$ である。このとき "軌道空間"Σ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3 \sqcup \Sigma_4,\\
\Sigma_1 &= \{(y^1, 0, y^3, 0, a^1, a^2, a^3) \in S^6; y^1, y^3 \geq 0, |y^1|^2 + |y^3|^2 > 0\},\\
\Sigma_2 &= \{(y^1, 0, y^3, 0, a^1, a^2, 0) \in S^6; \#\{x = 0; x \in \{y^1, y^3, a^2\}\} = 2\},\\
\Sigma_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\},\ \Sigma_4 = \{0\}.
\end{aligned}$$

このとき $T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$ となり、軌道の位相は次のようになる。

$$T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \cdot x \cong \begin{cases} T^2 \times \mathbb{R}_{>0} & (x \in \Sigma_1),\\ S^1 \times \mathbb{R}_{>0} & (x \in \Sigma_2),\\ \mathbb{R}_{>0} & (x \in \Sigma_3),\\ * & (x \in \Sigma_4). \end{cases}$$

T^2 の Lie 環 $\mathfrak{t}^2$ の基底を X_1, X_2 をとすると、path $c : I \to \Sigma$ で、

$$\varphi(X_1^*, X_2^*, r\tfrac{\partial}{\partial r})|_c = 0,\ \varphi(X_1^*, X_2^*, \dot{c})|_c = 0,\ \varphi(X_1^*, r\tfrac{\partial}{\partial r}, \dot{c})|_c = 0,\ \varphi(X_2^*, r\tfrac{\partial}{\partial r}, \dot{c})|_c = 0$$

を満たすものを探せばよい。これより次の定理を得る。

定理 7. *[4]* $\alpha, \gamma : I \to (0, \pi/2)$, $\beta : I \to \mathbb{R}$ を、開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の滑らかな関数で、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log(\sin\gamma) &= -\frac{2\tan\beta \cdot \tan(2\alpha - \beta) \cdot \dot{\beta}}{\tan(2\alpha - \beta) + 3\tan\beta},\\
\frac{d}{dt}\log(\tan\gamma) &= -\tan(2\alpha - \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta})
\end{aligned}$$

を満たすとする。このとき、次の部分集合 $M \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^7$

$$\begin{aligned}
M = \big\{ \big(& Re^{i\theta}\cos\gamma(t) \cdot \cos\alpha(t), Re^{i\psi}\cos\gamma(t) \cdot \sin\alpha(t),\\
& R\sin\gamma(t) \cdot \cos\beta(t), Re^{i(\psi - \theta)}\sin\gamma(t) \cdot \sin\beta(t) \big) ; R > 0, \theta, \psi \in \mathbb{R}, t \in I \big\}
\end{aligned}$$

は T^2 不変 *coassociative cone* で、十分小さい $I \subset \mathbb{R}$ に対して $M \cong T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \times I$ となる。

5 $\Lambda^2_- S^4$ 上での構成

5.1 $\Lambda^2_- S^4$ 上の G_2 構造

S^4 の反自己双対束 $\Lambda^2_- S^4$ には、[1] により完備な G_2 計量 $g_\lambda (\lambda > 0)$ が入ることが知られている。$\Lambda^2_- S^4$ は S^4 の Levi-Civita 接続から誘導される接続を持つから、接空間は水平、垂直方向への自然な分解 $T_\omega(\Lambda^2_- S^4) \cong \mathcal{H}_\omega \oplus \mathcal{V}_\omega$ $(\omega \in \Lambda^2_- S^4)$ を持つ。

命題 8 (Bryant and Salamon [1]). 各 $\lambda > 0$ に対して、$\Lambda^2_- S^4$ 上の *3-form* $\varphi_\lambda \in \Omega^3(\Lambda^2_- S^4)$ と計量 g_λ を次のように定める。

$$\varphi_\lambda = 2s_\lambda d\tau + \frac{1}{s_\lambda^3}\mathrm{vol}_{\mathcal{V}},\ g_\lambda = 2s_\lambda^2 g_{\mathcal{H}} + \frac{1}{s_\lambda^2} g_{\mathcal{V}}$$

ここで $s_\lambda = (\lambda + r^2)^{1/4}$, r は S^4 からの誘導計量で測った零切断からの距離。τ は *tautological 2-form* で、$\mathrm{vol}_{\mathcal{V}}$ はファイバー上の計量 $g_{\mathcal{V}}$ に関する体積要素である。

このとき各 $\lambda > 0$ に対して、$(\Lambda^2_- S^4, \varphi_\lambda, g_\lambda)$ は G_2 多様体となり、g_λ は完備で $\mathrm{Hol}(g_\lambda) = G_2$ を満たす。

注意 9. $\Lambda^2_- S^4 - \{\text{0-section}\} \cong \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_{>0}$ であり、$\lambda = 0$ のとき、計量 g_0 は $\mathbb{C}P^3$ 上の錐計量になる。$\mathbb{C}P^3$ 上の計量 $g_{\mathbb{C}P^3}$ は標準的な計量ではなく、3-symmetric Einstein の非ケーラー計量になる。g_0 は完備ではないが、$\mathrm{Hol}(g_0) = G_2$ を満たす。

5.2 $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合

$\mathrm{SU}(2)$ の $\Lambda^2_- S^4$ への作用として、$\mathrm{SU}(2)$ の $S^4 \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R}$ への標準的な作用から誘導されるものを考える。S^4 の局所座標

$$\begin{array}{ccccc} S^4 - \{x^5 = 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ (x^1, \cdots, x^5) & \longmapsto & \frac{1}{1-x^5}(x^1, \cdots, x^4) & =: & (y^1, \cdots, y^4). \end{array}$$

をとり、それに随伴する $\Lambda^2_- S^4$ のファイバー座標 (a^1, a^2, a^3) を取る。このとき、$\mathbb{R}^7$ の場合同様 "軌道空間"Σ は次のようにかける。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3, \\ \Sigma_1 &= \{(y^1, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0, a^i \in \mathbb{R}\}, \\ \Sigma_2 &= \Lambda^2_- S^4|_{x^5=-1} - \{0\} \sqcup \Lambda^2_- S^4|_{x^5=1} - \{0\},\ \Sigma_3 = \{x^5 = \pm 1\} \subset S^4, \end{aligned}$$

このとき $\mathrm{SU}(2) \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$ となり、軌道の位相は次のようになる。

$$\mathrm{SU}(2) \cdot x \cong \begin{cases} S^3 & (x \in \Sigma_1), \\ S^2 & (x \in \Sigma_2), \\ * & (x \in \Sigma_3). \end{cases}$$

$\mathbb{R}^7$ の場合と同様に考えると、次を得る。これは定理 6 の一般化とも捉えられる。

定理 10. *[4]* 任意の $C \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ に対して、部分集合

$$M_C := \mathrm{SU}(2) \cdot \left\{ ((y^1, 0, 0, 0), r\vec{v});\ \begin{array}{c} -\int_0^{\sqrt{r}} (\lambda + a^4)^{1/8} da + \frac{(\lambda + r^2)^{1/8}\sqrt{r}}{1 + (y^1)^2} = C, \\ r \geq 0, y^1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{array} \right\},$$

は $\Lambda^2_- S^4$ 内の $\mathrm{SU}(2)$ 不変 *coassociative* 部分多様体であり、次の位相を持つ。

$$M_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)\ (C \neq 0), \quad S^4 \sqcup S^3 \times \mathbb{R}\ (C = 0).$$

更に、すべての $\mathrm{SU}(2)$ 不変部分多様体は上の形で与えられる。

5.3　$G = T^2 \times \mathbb{R}_{>0}$ の場合

同様に $\Lambda^2_- S^4 - \{0\text{-section}\} \cong \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_{>0}$ 上にも、その解がすべての T^2 不変 coassociative cone を表す微分方程式が導ける。具体的な解として、T^*S^2 ($S^2 \subset S^4$: 全測地的)、S^4 内の小円上の階数 1 のベクトル束等が得られる。

参考文献

[1] R. L. Bryant and S. M. Salamon, On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, Duke Math. J. 58 (1989), 829-850.

[2] S. Gukov, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Duality and fibrations on G_2-manifolds, Turkish J. Math. 27 (2003), 61-97.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. 148 (1982), 47-157.

[4] K. Kawai, Construction of Coassociative submanifolds in $\mathbb{R}^7$ and $\Lambda^2_- S^4$ with symmetries, preprint, arXiv:1305.2786.