複素双曲空間への polar 作用の幾何 *

久保 亮 (広島大学大学院理学研究科 D2) †

概要

リーマン多様体への等長的作用は, すべての軌道と垂直に交わる完備閉部分多様体が存在するとき，polar 作用と呼ばれる．複素双曲空間への polar 作用で特異軌道を持たない (すなわち軌道全体が foliation をなす) ものは J. Berndt と J. C. Díaz-Ramoz によって分類された. 本稿では, そのような作用の幾何について得られた結果を紹介する．尚, 本稿の結果のいくつかは広島大学の田丸博士氏, 橋永貴弘氏との共同研究に基づく.

1 導入

我々は非コンパクト型対称空間内の等質部分多様体, すなわち等長的な群作用の軌道の幾何に興味を持っている．本稿では次の作用を扱う.

定義 1.1. M を連結 Riemann 多様体, H を M の等長変換群の連結閉部分群とする．このとき, 等長的作用 $H \curvearrowright M$ が

(1) **polar** であるとは, ある M の完備連結閉部分多様体 Σ が存在して, すべての H-軌道が Σ と交わり, 直交すること (このような Σ を **section** と呼ぶ),
(2) **hyperpolar** であるとは, polar であり, かつ section Σ が平坦であること,
(3) **余等質性 1** であるとは, 余次元 1 の軌道が存在すること.

注意 1.2. M が対称空間ならば, M への余等質性 1 作用は hyperpolar であることが知られている ([6]). 定義から hyperpolar 作用は polar 作用であるので, polar 作用は余等質性 1 作用のある種の一般化と捉えることができる.

注意 1.3. これらの群作用は等質部分多様体の典型例を供給する．実際, 余等質性 1 作用の主軌道は明らかに等質超曲面であり, また polar 作用の主軌道は等径部分多様体であることが知られている.

また軌道を分類する際は, 次の同値関係の元で行う.

---

* 部分多様体幾何とリー群作用 2013 (東京理科大学森戸記念館, 2013/08/20–21) 記録集原稿

† E-mail: akira-kubo@hiroshima-u.ac.jp

定義 1.4. Riemann 多様体 M への等長的作用 $H \curvearrowright M$, および $H' \curvearrowright M$ が <u>軌道同値</u> であるとは, 全ての H-軌道を H'-軌道に移す等長変換が存在すること.

我々の目的はこれらの群作用について, その性質や軌道の幾何を調べることである. 本稿では, 特に特異軌道を持たない (すなわち軌道全体が foliation をなす) 群作用についてのみ考える.

2　実双曲平面への余等質性 1 作用

ここでは, 実双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ への余等質性 1 作用について述べる. 特に, 特異軌道を持たない余等質性 1 作用は軌道同値を除いて 2 個存在すること, さらにその軌道の極小性について紹介する.

まず $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc=1, z \in \mathbb{R}\mathrm{H}^n). \tag{2.1}$$

で作用していることから, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ という等質空間表示を得る (このとき $\mathrm{SO}(2)$ は $z = \sqrt{-1}$ の固定部分群). ここで, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の部分群 A, N, S を次のように定める:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \tag{2.2}$$

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}, \tag{2.3}$$

$$S := AN = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.4}$$

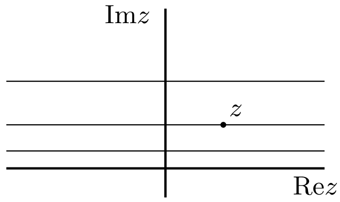
このとき, S は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の岩澤分解の可解部分であり, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に単純推移的に作用する. また A, N は S の余次元 1 部分群である.

さて, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用は, S の余次元 1 部分群の作用に軌道同値である. よって, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用を分類するためには, S の余次元 1 部分群を分類すればよいが, S の余次元 1 部分群は N, A のいずれかに共役なので, 次を得る.

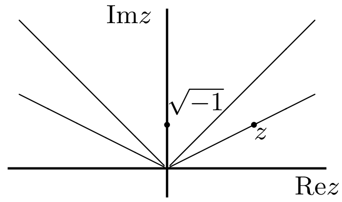
命題 2.1. $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用は, N-作用と A-作用のいずれかに軌道同値である.

したがって, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用の軌道について調べるためには, N-軌道と A-軌道について調べれば十分である.

以下, N-作用, A-作用の軌道について, 知られている結果を紹介する. まずそれぞれの作用の軌道を上半平面に図示すると, 次のようになる:



N-軌道



A-軌道

更に, 軌道の極小性ついては次が成り立つ.

命題 2.2. N-作用, 及び A-作用について, 次が成り立つ:

(1) N-作用のすべての軌道は互いに等長的に合同であり, かつ極小ではない,
(2) A-作用は極小軌道を唯一持つ.

注意 2.3. N-作用の軌道は**ホロ円**とよばれる. また, A-作用の唯一の極小軌道は $A.\sqrt{-1}$ であり, これは全測地的 $\mathbb{R}\mathrm{H}^1$ である.

3 複素双曲空間への polar 作用

複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への群作用やその軌道の幾何は盛んに研究されている ([1], [2], [3]). 特に, 特異軌道を持たない polar 作用については [2] で分類され, それらは大きく 2 種類, 正確には軌道同値を除いて $2n-1$ 個存在することが示されている. ここでは, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への polar 作用に関する先行研究について述べる.

まず複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の可解モデルを定義する. S を $\mathrm{SU}(1,n)$ の岩澤分解の可解部分, $\mathfrak{s}$ をその Lie 代数とする. このとき $\mathfrak{s}$ には次の関係式を満たす基底 $\{A_0, X_1, Y_1, \ldots, X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_0\}$ が存在する:

$$[A_0, X_i] = (1/2)X_i,\ [A_0, Y_i] = (1/2)Y_i,\ [A_0, Z_0] = Z_0,\ [X_i, Y_i] = Z_0. \tag{3.1}$$

また $\mathfrak{s}$ には上記の基底を正規直交とする内積 $\langle , \rangle$ を入れる (このとき, S は $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ に単純推移的に作用し, S に $\langle , \rangle$ に対応する左不変計量を入れた空間は $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ と等長的になる). このように定めた $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ を $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の **可解モデル** と呼び, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ と同一視する.

次に $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない polar 作用の分類について述べる.

定義 3.1. N_b, S_b を, それぞれ次の Lie 代数 $\mathfrak{n}_b$, $\mathfrak{s}_b$ に対応する S の連結 Lie 部分群とする:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_b &:= \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{A_0, X_1, \ldots, X_{b-1}\} && (b \in \{1, \ldots, n\}), \\ \mathfrak{s}_b &:= \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_b\} && (b \in \{1, \ldots, n-1\}). \end{aligned}$$

注意 3.2. $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への N_b-作用, S_b-作用はいずれも, すべての軌道の余次元が b である.

定理 3.3 ([2])**.** $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない非自明な polar 作用は, 次の作用のいずれかに軌道同値である:

(i) N_b-作用 (ただし, $b \in \{1, \ldots, n\}$),

(ii) S_b-作用 (ただし, $b \in \{1, \ldots, n-1\}$).

$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への hyperpolar 作用は余等質性 1 作用である. また, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用は [3] で分類されているが, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への余等質性 1 作用は polar なので, 定理 3.3 からも従う.

系 3.4 (cf. [3]). $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用は, N_1-作用か S_1-作用のいずれかに軌道同値である.

最後に, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用の軌道の幾何に関する先行研究について述べる.

定理 3.5 ([1], [4]). N_1-作用, 及び S_1-作用について, 次が成り立つ:

(1) N_1-作用のすべての軌道は互いに等長的に合同であり, かつ極小ではない,

(2) S_1-作用は極小軌道を唯一持つ.

注意 3.6. o を $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の原点とするとき, 軌道 $N_1.o$, $S_1.o$ はそれぞれ**ホロ球面**, **等質極小線織超曲面**と呼ばれる.

4 主結果

ここでは, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない polar 作用の軌道について, 得られた結果について述べる. 定理 3.3 から, それらの軌道について調べるためには, 各 N_b-軌道, S_b-軌道について調べれば十分である.

4.1 軌道の極小性

まず N_b-作用, 及び S_b-作用について調べることで定理 3.5 を拡張することができた.

定理 4.1 ([7]). N_b-作用, 及び S_b-作用について, 次が成り立つ:

(1) 各 $b \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, N_b-作用のすべての軌道は互いに等長的に合同であり, かつ極小ではない,

(2) 各 $b \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して, S_b-作用は極小軌道を唯一持つ.

証明の概略を述べる (証明の方針は定理 3.5 ($b = 1$ の場合) と同様である).

まず, N_b-作用については Lie 代数 $\mathfrak{n}_b$ が $\mathfrak{s}$ のイデアルであることから軌道の合同性が従う (軌道の合同性については [8] を参照). よって, N_b-作用の軌道の幾何を調べるためには原点軌道 $N_b.o$ について調べれば十分であり, $N_b.o$ が極小でないことから定理 4.1 (1) が示される.

次に, S_b-作用の場合を考える．この場合, 次の補題が成り立つ:

補題 4.2 ([7])**.** 各 $b \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して, 次が成り立つ: 任意の点 $p \in \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ に対して, ある $\varphi \in [0, \pi/2)$ が存在して, $S_b.p$ と $S_b(\varphi).o$ に等長的合同である．ここで, $S_b(\varphi)$ は次の Lie 代数 $\mathfrak{s}_b(\varphi)$ に対応する S の連結 Lie 部分群:

$$\mathfrak{s}_b(\varphi) := \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{\cos(\varphi)X_1 + \sin(\varphi)A_0, X_2, \ldots, X_{b-1}\} \qquad (\varphi \in [0, \pi/2]). \tag{4.1}$$

よって, S_b-作用の軌道の幾何を調べるためには原点軌道 $S_b(\varphi).o$ について調べれば十分であり, 次の結果から定理 4.1 (2) が示される．

命題 4.3 ([7])**.** 各 $b \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して, 次が成り立つ: $S_b(\varphi).o$ ($\varphi \in [0, \pi/2)$) が極小であるための必要十分条件は $\varphi = 0$.

4.2 等質 Ricci solition Lie 超曲面

$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用, すなわち N_1-作用, 及び S_1-作用の軌道は **Lie 超曲面**と呼ばれる．$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Lie 超曲面の幾何 (極小性や曲率) については [1], [4] で研究されている．ここでは, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Lie 超曲面で Ricci soliton であるものの分類結果について述べる．まず Ricci soliton の定義を復習をする．

定義 4.4. Riemann 多様体 (M, g) が <u>**Ricci soliton**</u> であるとは, 定数 $c \in \mathbb{R}$ および完備ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して, Ricci テンソル ric_g が次を満たすことである:

$$\mathrm{ric}_g = cg + \mathcal{L}_X g. \tag{4.2}$$

Ricci soliton 多様体は定義から分かるように Einstein 多様体の一般化であり, 多くの研究がなされている．例えば, [9] では $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内のホロ球面 $N_1.o$ が Ricci soliton であることが示されている．

我々は $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Lie 超曲面で Ricci soliton であるものを分類した．次の結果は田丸博士氏, 橋永貴弘氏との共同研究によるものである．

定理 4.5 ([5])**.** $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Lie 超曲面 が Ricci soliton であるための必要十分条件は,

(1) ホロ球面 $N_1.o$ に等長的合同, または,
(2) $n = 2$, かつ等質極小線織超曲面 $S_1.o$ に等長的合同.

証明の概略を述べる．前の小節の議論から, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Lie 超曲面の幾何を調べるためには $S_1(\varphi).o$ ($\varphi \in [0, \pi/2]$) について調べれば十分である．$S_1(\varphi).o$ は可解 Lie 群 $S_1(\varphi)$ に然るべき左不変計量を入れた空間と等長的であることから, これらを同一視する．特に, $S_1(\varphi)$ が完全可解であることから, 次の定理が適用できる．

補題 4.6 ([10])**.** G を単連結 Lie 群, g を G 上の左不変計量とする．このとき, G が完全可解であるならば, (G, g) が (左不変) Ricci soliton であることと, 代数的 Ricci soliton であることは同値

である.

ここで, 単連結 Lie 群 (G,g) が **代数的 Ricci soliton** であるとは, 定数 $c \in \mathbb{R}$ および $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, Ricci 作用素 Ric_g が次を満たすことである:

$$\mathrm{Ric}_g = c \cdot \mathrm{id} + D. \tag{4.3}$$

補題 4.6 により, 定理 4.5 を証明するためには $S_1(\varphi)$ が代数的 Ricci soliton であるかどうかを調べればよい. 特に, Lie 超曲面 $S_1(\varphi)$ の Ricci 作用素は [4] で明示的に計算されているので, $\mathrm{Der}(\mathfrak{s}_1(\varphi))$ について調べることで我々の結果を得る.

参考文献

[1] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.*, **229** (1998), 589–600.

[2] J. Berndt & J. C. Díaz-Ramos, Homogeneous polar foliations of complex hyperbolic spaces, *Comm. Anal. Geom.*, **20** (2012), 435–454.

[3] J. Berndt & H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact type symmetric spaces, *J. Differential Geom.*, **63** (2003), no. 1, 1–40.

[4] T. Hamada, Y. Hoshikawa & H. Tamaru, Curvature properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, *J. Geom.*, **103** (2012), no. 2, 247–261.

[5] T. Hashinaga, A. Kubo & H. Tamaru, Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces, preprint, arXiv:1305.6128.

[6] E. Heintze, R. S. Palais, C.-L. Terng & G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, *Geometry, topology, & physics*, 214–245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[7] A. Kubo, Geometry of homogeneous polar foliations of complex hyperbolic spaces, in preparation.

[8] A. Kubo & H. Tamaru, A sufficient condition for congruency of orbits of Lie groups and some applications, *Geom. Dedicata*, **167** (2013), no. 1, 233–238.

[9] J. Lauret, Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.*, **319** (2001), 715–733.

[10] J. Lauret, Ricci soliton solvmanifolds, *J. reine angew. Math.*, **650** (2011), 1–21.