

複素グラスマン空間上の大対蹠集合のデザインによる特徴付け

栗原 大武*

北九州工業高等専門学校 総合科学科

概要

球面上の北極と南極のような「極対的な点のペア」の概念は、Chen–Nagano によって対称空間上で対蹠集合として一般化された。対蹠集合の中でも最もサイズ大きいものを大対蹠集合と呼ぶ。大対蹠集合は、空間上に“きれいに”散らばっている点配置と考えられる。本稿での主結果は、デザインの言葉を用いて複素グラスマン空間上の大対蹠集合をとあるデザインの中でも最小サイズをもつものとして特徴づけることである。この結果は奥田隆幸氏（東北大学）との共同研究によって得られたものである。

また、最後にこの結果に関連した最新の話題についても触れることにする。

1 対蹠集合

M を連結なコンパクトリーマン対称空間とし、各点 $x \in M$ に対して、 x における点対称を s_x とする。対蹠集合の概念は 1988 年に Chen–Nagano [1] によって導入された。

定義 1.1. M の部分集合 S が

$$\forall x, y \in S, s_x(y) = y$$

を満たすときに、 S を**対蹠集合**と呼ぶ。

任意のコンパクトリーマン対称空間 M の 1 点からなる部分集合 $\{x\}$ は自明な対蹠集合である。また自明な例以外で対蹠集合の簡単な例を挙げるならば、球面 S^{n-1} 上の北極と南極のような極対的な点のペア $\{x, -x\}$ ($x \in S^{n-1}$) である。

M はコンパクトであり、各 $x \in M$ は s_x の孤立固定点であるので、対蹠集合のサイズは必ず有限になることがわかる。対蹠集合の中でもこの最大のサイズを持つ対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。上で挙げた球面 S^{n-1} 上の北極と南極のような極対的な点のペアは大対蹠集合である。

M が対称空間の中でも性質の良い‘対称 R 空間^{*1}’であることを仮定すると、 M の中の大対蹠集合は以下のような性質を持つ：

事実 1.2 (Sánchez [6], Tanaka–Tasaki [7]). $M \cong G/K$ を対称 R 空間とする。このとき次が成り立つ。

- (1) 任意の極大な対蹠集合は大対蹠集合である。つまり任意の対蹠集合 S_0 に対して、 $S_0 \subset S$ なる大対蹠集合 S が存在する。
- (2) 大対蹠集合は G 作用によって移り合う同型を除き一意である。つまり、2 つの大対蹠集合 S, S' に対して $S' = gS$ なる $g \in G$ が存在する。

なお、後述の複素グラスマン空間は対称 R 空間であることが知られている。

* E-mail : kurihara@kct.ac.jp

^{*1} 対称 R 空間について以下のことが知られている：対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になり、逆にコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になる。

2 球面上のデザイン

この節では、球面デザインについて考察する。球面デザインの概念は 1977 年に Delsarte–Goethals–Seidel [2] によって導入された。

定義 2.1. t を非負整数とし、 X を単位球面 S^{n-1} の空でない有限部分集合とする。このとき X が、任意の t 次以下の $\mathbb{R}^n$ 上の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して、

$$\frac{1}{\sigma(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} f d\sigma = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

を満たすとき、 X を**球面 t デザイン**と呼ぶ。但し、 σ は S^{n-1} 上の Lebesgue 測度とする。

デザインの定義を言い換えると、任意の t 次以下の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して、 X は

$$f \text{ の } S^{n-1} \text{ 上での平均} = f \text{ の } X \text{ 上での平均}$$

という性質を満たしている。これは X は球面を“良く”近似するものと見做すことが出来る。

例 2.2. (1) 球面 S^{n-1} 上の北極と南極の 2 点からなる極対的な集合 $X = \{(0, 0, \dots, 0, \pm 1)\}$ は球面 1 デザインである。

(2) 正多面体 P を正規化すると頂点は球面 S^2 上に乗る。この頂点集合を X とする。それぞれ、 P が正 4 面体のとき X は 12 点からなる球面 2 デザイン、 P が正 6 面体のとき X は 8 点からなる球面 3 デザイン、 P が正 8 面体のとき X は 6 点からなる球面 3 デザイン、 P が正 12 面体のとき X は 20 点からなる球面 5 デザイン、 P が正 20 面体のとき X は 12 点からなる球面 5 デザインであることが知られている。

X_1, X_2 を球面 S^{n-1} 上の t デザインかつ $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ とする。このとき、デザインの定義より $X_1 \cup X_2$ もまた t デザインであることが確かめられる。また球面 S^{n-1} 上の t デザイン X と直交群 $O(n)$ の元 g に対して、 $gX := \{gx \mid x \in X\}$ もまた t デザインである。従って S^{n-1} 上の t デザイン X が与えられたときに、 X を $O(n)$ の元で少しずつずらして和集合をとればいくらかでも大きいサイズの t デザインが得られる。一方、デザインは球面を近似するものなので、デザインのサイズはある程度大きくないといけなことが予想される。実際デザインのサイズに関して自然な下界が知られている。

事実 2.3 (Absolute bounds for designs). X を S^{n-1} 上の球面 t デザインとする。このとき、 X のサイズに関して次の不等式が成り立つ：

$$|X| \geq \begin{cases} \binom{n+t/2-1}{t/2} + \binom{n+t/2-2}{t/2-1} & \text{if } t \text{ is even,} \\ 2 \binom{n+(t-1)/2-2}{(t-1)/2-1} & \text{if } t \text{ is odd} \end{cases}$$

上記で述べたことより、サイズの小さいデザインこそ注目すべきものである。 S^{n-1} 上の球面 t デザイン X のサイズ $|X|$ がこの下界と等しいとき、 X を**堅い t デザイン**という。

例 2.4. (1) 北極と南極の 2 点から成る極対的な集合は堅い 1 デザインである。

(2) 正 4 面体の頂点集合は堅い 2 デザイン、正 8 面体の頂点集合は堅い 3 デザイン、正 20 面体の頂点集合は堅い 5 デザインである。

球面上の堅いデザインは多く存在しないことが知られている。しかし、堅いデザインはアソシエーションスキーム*2の構造を持つなどの良い性質を持つ。またいくつかの堅いデザインの構造は一意に決まってしまう：

*2 代数的組合せ論における主要な概念のうちの一つである。詳しい定義は省略するが、簡単に述べると、有限集合上 X と $X \times X$

注意 2.5. (1) X を 2 点からなる S^{n-1} の有限部分集合とする. このとき, 以下は同値:

- X は極対称的な点配置. つまり $X = \{x, -x\}$ となる $x \in S^{n-1}$ が存在する.
- X は S^{n-1} 上の堅い 1 デザイン.

(2) X を 12 点からなる S^2 の有限部分集合とする. このとき, 以下は同値:

- X は正二十面体の頂点集合.
- X は S^2 上の堅い 5 デザイン.

なお, 正 4 面体, 正 8 面体に関しても同様のことが言える.

注意 2.5 (1) を言い換えると次のようになる: **球面上の大対称集合は堅い 1 デザインとして特徴づけられる.** 本稿では, このことを複素グラスマン空間上で同様のことを示していく. つまり, 複素グラスマン空間上の大対称集合をとある堅いデザインとして特徴づけられることを示す.

複素グラスマン空間上にデザインを定義するために球面デザインの同値条件を導入する. $\mathcal{P}_t(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の t 次の斉次多項式からなる空間とし, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) + \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n) + \cdots$ とする. また $\mathcal{P}(S^{n-1})$ を $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の定義域を S^{n-1} に制限した関数からなる空間とし, 正の整数 l に対して,

$$\text{Harm}_l(S^{n-1}) := \{f|_{S^{n-1}} \mid f \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n), \Delta f = 0\} \subset \mathcal{P}(S^{n-1}) \quad (\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上のラプラシアン})$$

とする. 球面 S^{n-1} には直交群 $O(n)$ が自然に作用しており, この作用から $\mathcal{P}(S^{n-1})$ や $\text{Harm}_l(S^{n-1})$ にも $O(n)$ の作用が引き起こされる. 更に各 l に対して $(O(n), \text{Harm}_l(S^{n-1}))$ は既約表現になり, $\mathcal{P}(S^{n-1})$ の既約表現分解が $\bigoplus_{l \geq 0} \text{Harm}_l(S^{n-1})$ で与えられることが知られている. この $\text{Harm}_l(S^{n-1})$ を用いてデザインの同値条件を与えることが出来る:

事実 2.6. t を正の整数とし, X を球面 S^{n-1} 上の空でない部分集合とする. このとき次は同値:

- (1) X は球面 t デザイン.
- (2) 任意の $l \in \{1, 2, \dots, t\}$ と任意の $f \in \text{Harm}_l(S^{n-1})$ に対して,

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \frac{1}{\sigma(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} f d\sigma \quad *3$$

を満たす.

これより, 群 G が作用するような空間 M において, M 上の関数空間の部分空間の中でも既約 G 空間の関数について事実 2.6 (2) にあるような等式が成り立つことをデザインの定義にすればよさそうである. 実際, 階数 1 のコンパクト対称空間上であれば, 既約 G 表現を用いて球面同様にデザインを定義すれば, 球面上とほぼ平行にデザイン理論が成り立つことが示されている (Hoggar [3] など). しかし一般の階数を持つ対称空間では, デザイン理論がまだ整備されていない状況である.

次の節では具体的に複素グラスマン空間上のデザインについて述べる.

3 複素グラスマン空間上のデザイン

n, m を $n \geq 2m$ を満たす正整数とする. $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}^n$ の m 次元部分空間からなる集合とし, **複素グラスマン空間** と呼ぶ. 複素グラスマン空間は対称空間であることが以下のようにして確かめられる. $\mathbf{a} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ を固定す

の “良い” 分割の組のことである. 例えば X を円周上の正 6 角形, $X \times X$ を距離によって 4 分割したもの: $R_a := \{(x, y) \in X \times X \mid \|x - y\| = a\}$ ($a \in \{0, 1, \sqrt{3}, 2\}$) の組はアソシエーションスキームの例になる.

*3 実際には, この積分の値は 0.

る. このとき, $\mathbb{C}^n$ は直和分解 $\mathbb{C}^n = \mathbf{a} \oplus \mathbf{a}^\perp$ を持つので各ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ に対して, $v = v_{\mathbf{a}} + v_{\mathbf{a}^\perp}$ なるベクトル $v_{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}$, $v_{\mathbf{a}^\perp} \in \mathbf{a}^\perp$ が一意に決まる. この分解から $\mathbb{C}^n$ の対合的自己同型写像

$$\tilde{s}_{\mathbf{a}}(v) = v_{\mathbf{a}} - v_{\mathbf{a}^\perp} \quad \text{for } v \in \mathbb{C}^n \quad (3.1)$$

が得られる. 更に $\tilde{s}_{\mathbf{a}}$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上に点対称 $s_{\mathbf{a}}$ を引き起こす. これによって $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ は対称空間であることが確かめられた. $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ はユニタリ群 $U(n)$ が可移に作用する等質空間であり, $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}} \cong U(n)/(U(m) \times U(n-m))$ が成り立つ.

ν を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度として, $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数 $f, g \in C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ に対して, 内積を

$$(f, g) := \frac{1}{\nu(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})} \int_{\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}} f \bar{g} d\nu$$

で定める. $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の関数空間 $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ にも $U(n)$ が自然に作用しており, $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ も $U(n)$ の表現になる. ここで $\mu \in P_m := \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \mid \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq 0\}$ に対して, H_μ を $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の $U(n)$ 部分空間の中で最高ウェイト

$$(\mu_1, \dots, \mu_m, 0, \dots, 0, -\mu_m, \dots, -\mu_1)$$

をもつ $U(n)$ の既約表現に同型なものとする. このとき, $\bigoplus_{\mu \in P_m} H_\mu$ は $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の中に稠密に入っている.

以下で球面デザインの定義を少し拡張した複素グラスマン空間上のデザインの定義を与える.

定義 3.1. T を P_m の有限部分集合とする. このとき $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合 X が以下の条件をみたすときに X を T デザインと呼ぶ:

$$\frac{1}{|X|} \sum_{a \in X} f(a) = \frac{1}{\nu(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})} \int_{\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}} f d\nu \quad \forall f \in \bigoplus_{\mu \in T} H_\mu.$$

4 複素グラスマン空間上の大対蹠集合とデザイン

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底とする. $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, $\mathbf{a}_I := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_i \mid i \in I\}$ とする. このとき $S := \{\mathbf{a}_I \mid I \subset \{1, 2, \dots, n\}, |I| = m\}$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の大対蹠集合であることは確かめられる. また $|S| = \binom{n}{m}$ であることが容易に分かる.

1 節の終わりに述べたように, 複素グラスマン空間 $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ は対称 R 空間なので, $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の任意の大対蹠集合は S と $U(n)$ 作用で合同になる.

複素グラスマン空間上の大対蹠集合とデザインの関係について得られた結果を紹介する.

$$\mathcal{E} := \{(1^i, 0^{m-i}) \mid i = 0, 1, \dots, m\} \subset P_m$$

とする. 尚, $\bigoplus_{\mu \in \mathcal{E}} H_\mu$ は $U(n)$ の表現としてみると $\text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^m \mathbb{C}^n)$ と同型な空間である. $\bigwedge^m \mathbb{C}^n$ は $U(n)$ の基本的な表現であるので, $\text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^m \mathbb{C}^n)$ も $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ に現れる基本的な $U(n)$ 表現といえるだろう.

命題 4.1 (K.-Okuda [5]). X を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合とする. このとき次が成り立つ.

- (1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{E}$ デザイン.
- (2) X が $\mathcal{E}$ デザインならば, $|X| \geq \binom{n}{m}$ が成り立つ.

この命題より大対蹠集合 S は $\mathcal{E}$ デザインの中で最もサイズの小さいものであることが分かる. 従ってより大対蹠集合 S は ‘堅い’ $\mathcal{E}$ デザインであるといえる. しかし, サイズが $|X| = \binom{n}{m}$ である $\mathcal{E}$ デザインの構造は一意に決まらない. 実際以下の様な $\mathcal{G}_{2,4}^{\mathbb{C}}$ の $\binom{4}{2} = 6$ 点からなる部分集合 X で大対蹠集合ではないが, $\mathcal{E}$ デザインとなる例が存在する: $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_6\} \subset \mathcal{G}_{2,4}^{\mathbb{C}}$, where

$$\mathbf{x}_1 := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2\}, \quad \mathbf{x}_2 := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_3, e_4\}, \quad \mathbf{x}_3 := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_4\},$$

$$\mathbf{x}_4 := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_2, e_4\}, \quad \mathbf{x}_5 := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_3\}, \quad \mathbf{x}_6 := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_3\}.$$

命題 4.1 から、大対蹠集合は最小サイズをもつ $\mathcal{E}$ デザインであるが、逆は言えないことがわかった。しかし、デザインにもう少し条件を加えれば、大対蹠集合を最小サイズのデザインとして特徴づけることが出来る。今 P_m の部分集合として

$$\mathcal{F} := \{(2, 1^{i-1}, 0^{m-i}) \mid i = 2, 3, \dots, m\} \subset P_m$$

とする。

定理 4.2 (K.-Okuda [5]). X を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合とする。このとき次が成り立つ。

- (1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン。
- (2) X が $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインならば、 $|X| \geq \binom{n}{m}$ が成り立つ。
- (3) 以下は同値：
 - (1) X は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインかつ、 $|X| = \binom{n}{m}$ 。
 - (2) X は大対蹠集合。

つまり大対蹠集合は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインのなかでも最もサイズが小さいものであり、最後の主張は最小サイズの $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインが必ず大対蹠集合になるいうデザインからの大対蹠集合の特徴付けを与える。元々、対蹠集合は幾何的に定義されたものであり、大対蹠集合は対蹠集合の中でも最もサイズが大ききものとして定義されていたものであった。つまり、大対蹠集合は幾何的な立場からは最大性を持ち、他方でデザインの立場からは最小性を持ち、お互いの立場の丁度境界同士の交わりとして一意に定まるものであると言える。

5 定理 4.2 の証明の概略

まず定理 4.2 の証明の概略を述べるために幾らかの準備を行う。 $\mu \in P_m$ を一つ固定する。 H_μ は内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつヒルベルト空間であるので、リースの表現定理より任意の $\mathbf{a} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ と任意の $f \in H_\mu$ に対して、

$$(f, Z_{\mu, \mathbf{a}}) = f(\mathbf{a})$$

なる再生核 $Z_{\mu, \mathbf{a}} \in H_\mu$ が唯一つ存在する。ここで $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$ 関数 Z_μ を

$$Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := Z_{\mu, \mathbf{a}}(\mathbf{b})$$

によって定義する。このとき Z_μ は以下の性質を持つことが知られている：

- 補題 5.1.** (1) 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ に関して、 $Z_{(0^m)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ 。
(2) 任意の $\mathbf{a} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ に関して、 $Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \dim H_\mu$ 。
(3) $\mu \neq (0^m)$ とする。 $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の任意の有限部分集合 X に対して

$$\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0.$$

またこの不等式の等号が成り立つことと X が $\{\mu\}$ デザインであることは同値である。

各 $\mu \in P_m$ に対して具体的な Z_μ の表記は知られている。詳しくは James–Constantine [4] を参考にしたい。また、この補題より以下が成り立つ：

補題 5.2 ($\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ における linear programming bound). $c : P_m \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の性質を満たすものとする：

- (a) $c_{(0^m)} > 0$,

(b) c の台 $\{\mu \in P_m \mid c_\mu \neq 0\}$ は有限集合である,

(c) $F := \sum_{\mu \in P_m} c_\mu Z_\mu$ とおくと, 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ に対して, $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ である.

また $\mathcal{T} := \{\mu \in P_m \mid c_\mu > 0\}$ とおく. このとき次のことが成り立つ.

(1) X を $\mathcal{T}$ デザインとする. このとき $|X| \geq (\sum_{\mu \in P_m} c_\mu \dim Z_\mu) / c_{(0^m)}$.

(2) X は $|X| = (\sum_{\mu \in P_m} c_\mu \dim Z_\mu) / c_{(0^m)}$ を満たす $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の部分集合とする. このとき以下は同値:

(i) X は $\mathcal{T}$ デザイン

(ii) 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ に対して $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Proof. (1) $\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の二通りの計算を行う:

F は非負かつ補題 5.1 (2) より $\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{a} \in X} F(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + \sum_{\mathbf{a} \neq \mathbf{b}} F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq \sum_{\mathbf{a} \in X} F(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |X| \sum_{\mu \in P_m} c_\mu \dim Z_\mu$.

一方で補題 5.1 (1), (3) より $\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\mu \in P_m} c_\mu \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} c_{(0^m)} Z_{(0^m)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \sum_{\mu \in \mathcal{T} \setminus \{(0^m)\}} c_\mu \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |X|^2 c_{(0^m)}$.

従って $|X|^2 c_{(0^m)} \geq |X| \sum_{\mu \in P_m} c_\mu \dim Z_\mu$ が得られることから (1) の証明が完了する.

(2) (i) $\Rightarrow$ (ii) (i) を仮定する. (1) の証明において全ての等号が成り立つためには $\sum_{\mathbf{a} \neq \mathbf{b}} F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ が成り立つ必要がある. F の非負性から (ii) を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (i) (ii) を仮定する. (1) の証明のように $\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の二通りの計算を行うと

$$\sum_{\mu \in \mathcal{T} \setminus \{(0^m)\}} c_\mu \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$$

を得る. $c_\mu > 0$ と $\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の非負性から $\sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X} Z_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, つまり X が $\mathcal{T}$ デザインであることが得られる. $\square$

この補題より, うまく F を作れば (i) より $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインのサイズの bound が得られる. また (ii) から, X が堅い $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインであるとき, X の構造が分かる. 実際に $F: \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}} \times \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ として

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \binom{n-2}{m-1} \cdot \text{tr } P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \cdot \det P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} + \text{tr } P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} - \text{tr } P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^2.$$

とする. ここで $P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ は $\mathbf{b}$ から $\mathbf{a}$ への直交射影から得られる線形写像 $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b} \cap \mathbf{a} \subset \mathbf{b}$ の表現行列である.

F に関して次の 2 つのことが成り立つ:

補題 5.3. F は次のように書ける:

$$F = c_{(0^m)} + \sum_{j=1}^m c_{(1^j)} Z_{(1^j)} + \sum_{j=2}^m c_{(2, 1^{j-1})} Z_{(2, 1^{j-1})}$$

かつ

(1) $c_{(0^m)} = m \binom{n-2}{m-1} / \binom{n}{m}$. 特に $(\sum_{\mu \in P_m} c_\mu \dim Z_\mu) / c_{(0^m)} = \binom{n}{m}$ である.

(2) $c_{(1^j)} > 0$ for any $j = 1, \dots, m$.

(3) $c_{(2, 1^{j-1})} > 0$ for any $j = 2, \dots, m$.

補題 5.4. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ とする. 以下は同値:

(1) $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

(2) $\mathbf{b}$ は点 $\mathbf{a}$ における点対称 $s_{\mathbf{a}}$ の固定点, つまり $s_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$.

Proof of Theorem 4.2. (1) S を大対蹠集合とする. 各 $\mu \in \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ に対して $\sum_{a,b \in S} Z_\mu(a,b) = 0$ が成り立つことを直接計算すればよい.

(2) 上で決めた F に対して補題 5.2 (1) を適用する. 補題 5.3 (2), (3) より $\mathcal{T} = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ であり, 補題 5.3 (1) より $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン X のサイズは $|X| \geq \binom{n}{m}$ である.

(3) 補題 5.2 (2) を適用する. すると $|X| = \binom{n}{m}$ であるような X が $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインであるための必要十分条件は X が $F(a,b) = 0$ for $a,b \in X, a \neq b$ である. 補題 5.4 より X は大対蹠集合であることが分かる. $\square$

6 ユニタリ群上の大対蹠集合とデザイン

前節までで複素グラスマン空間上の大対蹠集合を「最小サイズを持つあるデザイン」として特徴づけられるということを述べた. すると次にやるべきことは, 他の体上でのグラスマン空間上の大対蹠集合とデザインの関係を調べる, また他の対称空間上の大対蹠集合とデザインの関係を調べる, などが挙げられるだろう. 今後個別に同様の問題を考えるのはいい戦略とは言い難いので, 出来れば一般論ができれば一番良い.

しかし, いきなり一般論を作り上げるのも容易ではないのでいくつかの具体例を計算しておきたい. 再度, 複素グラスマン空間の場合に立ち返ってみると, 定理 4.2 の証明の多くの部分は, ユニタリ群のユニタリ表現を用いた. そこで複素グラスマン空間の次に考えやすいのは, 複素グラスマン空間の「親玉」であるユニタリ群上の大対蹠集合であろう. この節では, ユニタリ群上の大対蹠集合とデザインについて得られたことを紹介する.

まずユニタリ群 $U(n)$ 上のデザインを複素グラスマン空間のとき同様に定義する. $U(n)$ 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数空間 $C(U(n))$ は $U(n)$ 表現と見ることができ,

$$\bigoplus_{\lambda \in (\mathbb{Z}^n)_+} V_\lambda$$

と既約表現分解できることが知られている. 但し $(\mathbb{Z}^n)_+$ は n 個の整数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ で $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ を満たすものの全体からなる集合であり, V_λ は最高ウェイト λ を持つ $U(n)$ の既約表現と同型な空間である.

定義 6.1. $\mathcal{T}$ を $(\mathbb{Z}^n)_+$ の部分集合とする. このとき $U(n)$ の有限部分集合 X が以下の条件をみたすときに X を $\mathcal{T}$ デザインと呼ぶ:

$$\frac{1}{|X|} \sum_{a \in X} f(a) = \frac{1}{\xi(U(n))} \int_{U(n)} f d\xi \quad \forall f \in \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{T}} V_\lambda.$$

ただし ξ は $U(n)$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度である.

この定義から定まる「あるデザイン」で $U(n)$ 上の大対蹠集合を特徴づけるというのがこの節の目標である. 尚, $U(n)$ 上の大対蹠集合は $U(n)$ 変換を除いて

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad |S| = 2^n$$

と同型になることが知られている.

ユニタリ群上の大対蹠集合とデザインの関係はまだ完全に解明はしていないが, 部分的に $n = 2$ のとき解明したことをここで述べる.

$$\mathcal{T} := \{(k,l) \in (\mathbb{Z}^2)_+ \mid k,l \text{ の片方が奇数で他方が偶数, 若しくは } k,l \text{ の両方が奇数で } k=l\}$$

とする.

定理 6.2. X を $U(2)$ の有限部分集合とする. このとき次が成り立つ.

- (1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{T}$ デザイン.
- (2) X が $\mathcal{T}$ デザインならば, $|X| \geq 4$ ($= |S|$) が成り立つ.

この結果から大対蹠集合 S は最小サイズの $\mathcal{T}$ デザインであることが分かる. しかし, 逆に最小サイズの $\mathcal{T}$ デザインとして大対蹠集合を特徴づけることは出来ない. 実際に $U(2)$ の部分集合として

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_1 & 0 \\ 0 & -\bar{z}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & -\bar{z}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad (z_1, z_2 \text{ は絶対値 } 1 \text{ の複素数})$$

とすると X は最小サイズの $\mathcal{T}$ デザインであるが, $z_1 = \pm z_2$ でない限り X は対蹠集合にならない. ここで注意したいことは $\mathcal{T}$ は大対蹠集合がデザインになりうる添字を全て集めてきた可算濃度の部分集合である. つまり, $n = 2$ のとき, $U(2)$ 上の大対蹠集合は「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけることが出来ないことがわかった.

今後は「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけられないという現象は, $n = 2$ の場合に特別起こりうるものなのか, 一般の n に対して成り立つものなのかを調べて行きたい. また, 一般の対称空間に対しても, 大対蹠集合が「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけられるものとそうでないものの分類を行いたい.

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano. A Riemannian Geometric Invariant and its Applications to a Problem of Borel and Serre. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**(1):273–297, 1988.
- [2] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geom. Dedicata*, **6**(3):363–388, 1977.
- [3] S.G. Hoggar. t -designs in projective spaces. *European J. Combin.*, **3**(3):233–254, 1982.
- [4] A.T. James and A.G. Constantine. Generalized Jacobi polynomials as spherical functions of the Grassmann manifold. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **29**(3): 174–192, 1974.
- [5] H. Kurihara and T. Okuda. Great antipodal sets of complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities. preprint, arXiv:1303.5936.
- [6] C.U. Sánchez. The index number of an R -space: an extension of a result of M. Takeuchi's. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**(3): 893–900, 1997.
- [7] M.S. Tanaka and H. Tasaki. The intersections of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type. *J. Math. Soc. Japan*, **64**(4): 1297–1332, 2012.