2重調和部分多様体とChen予想

Biharmonic submanifolds and Chen's conjecture

前田　瞬　(秀明大学　助教)

1983 年，Eells-Lemaire により調和写像の一般化である2重調和写像の概念が導入された．2重調和論の中で最も興味深い問題の1つであるChen 予想及び一般化された Chen予想に対し，完備性を仮定した大域的な問題について得られた結果を述べる．

1. 調和写像，2重調和写像について

調和写像はその例として，定値写像，恒等写像，調和関数，測地線，極小部分多様体，ケーラー多様体間の正則写像を含み幾何の自然な概念である．調和写像の存在については1964年，Eells-Sampsonによりターゲットの断面曲率が非正であるコンパクトリーマン多様体間の場合に示された．また，調和写像はリーマン多様体への応用も知られている．(例えば，Preissmann の定理，Siu の強剛性定理など)．その一方で，例えば「T^2 から S^2 への写像度± 1の調和写像は存在しない」などの非存在定理も知られている．従って，調和写像の一般化を考えることは興味深い問題である．

1983 年，Eells-Lemaireは調和写像の一般化として2重調和写像の概念を導入した．まず，2重調和関数は弾性力学や流体力学など物理学において重要な役割を果たしている．2重調和写像の特徴及び現在の研究状況としては調和写像同様，2重調和写像の存在定理を与えたいが，これは難しい問題であり，現在は2重調和写像の例の構成及び分類が主な研究となっている．2 重調和理論の最も興味深い問題の1つに1991年に Bang Yen Chen により挙げられた Chen予想と呼ばれるものがある．Chen予想とは「ユークリッド空間内の2重調和部分多様体は極小であろう.」という予想であり，今なお未解決の問題である．

以下 (M, g), (N, h) をそれぞれm次元リーマン多様体及びn次元リーマン多様体とする．$\phi : (M, g) \to (N, h)$ を滑らかな写像とする．また，∇, ∇^N をそれぞれ M, N 上のレビ・チビタ接続，$\overline{\nabla}$ を $\phi^{-1}TN$ 上の誘導接続とする．

定義 1 ([8], [10]). $\phi : (M, g) \hookrightarrow (N, h)$ を等長はめ込みとする．このとき，M が N の2重調和部分多様体であるとは次を満たすときをいう．

$$\Delta \mathbf{H} + \sum_{i=1}^{m} R^N(\mathbf{H}, d\phi(e_i))d\phi(e_i) = 0.$$

本研究は科研費 (課題番号:25887044) の助成を受けたものである.

ここに，$\Delta := \sum_{i=1}^{m}(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i})$ であり，R^N は N 上の曲率テンソルを表す．すなわち，N 上のベクトル場 X, Y, Z に対して，$R^N(X,Y)Z := \nabla^N_X\nabla^N_Y Z - \nabla^N_Y\nabla^N_X Z - \nabla^N_{[X,Y]}Z$．また，$\mathbf{H} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} B(e_i, e_i)$ は平均曲率ベクトル場を表し，B は第二基本形式を表す．

2. Chen 予想

2 重調和論を牽引している予想に次の Chen 予想と呼ばれるものがある．

予想 2 ([5])．ユークリッド空間内の 2 重調和部分多様体は極小である．

注意 3. 部分多様体の完備性は仮定されていない．

この予想に対し，多くの研究者により様々な研究結果が与えられている．その一例を挙げる．

1. M がコンパクトのとき　(Jiang (1986)),
2. $\mathbb{E}^3$ 内の曲面 (Chen (1991)),
3. $\mathbb{E}^4$ 内の超曲面 (Hasanis-Vlachos (1995), Defever(1998)),
4. 平均曲率一定のとき (Onicicuc (2002)).

しかし，この予想は今なお未解決の問題である．Chen 予想は部分多様体に完備性の仮定がないため局所的な微分幾何の問題となっている．そこで，我々は部分多様体に完備性を仮定した global 版の Chen 予想を考えた．

予想 4 ([1])．ユークリッド空間内の完備 2 重調和部分多様体は極小である．

Chen [5] により 2 重調和部分多様体の必要十分条件が与えられた．

定理 5 ([5])．$\mathbf{x} : M^m \hookrightarrow \mathbb{E}^n$ が 2 重調和部分多様体である必要十分条件は

$$\begin{cases} \Delta^{\perp}\mathbf{H} - \sum_{i=1}^{m} B(A_{\mathbf{H}}e_i, e_i) = 0, & (\text{法方向}), \\ m\ \nabla|\mathbf{H}|^2 + 4\ \mathrm{trace}\ A_{\nabla^{\perp}\mathbf{H}} = 0, & (\text{接方向}). \end{cases}$$

定理 5 から次の補題を得る．

補題 6. $\phi : M^m \hookrightarrow \mathbb{E}^n$ が2重調和部分多様体であるならば次の不等式が成り立つ.

$$\Delta|\mathbf{H}|^2 \geq 2m|\mathbf{H}|^4.$$

この補題から Omori-Yau の generalized maximal principle を用いることを考えられる．しかし，generalized maximal principle を使うには M の Ricci曲率を下から押さえる仮定が必要である．そのためには，本質的に第二基本形式のノルムを上から押さえる仮定が必要である．従って，部分多様体論において Omori-Yau の generalized maximal principle を直接用いることはできない.

我々は properの仮定をつけることで Omori-Yau の generalized maximal principle を直接用いることなく，次の結果を得た.

定理 7 ([1]). ユークリッド空間内の *proper* な2重調和部分多様体は極小である.

注意 8. *proper* な2重調和部分多様体とは等長はめ込み $\phi : (M, g) \hookrightarrow \mathbb{E}^n$ が *proper map* であるときを言う．また，*proper* の仮定は完備性より強い仮定である.

3. 一般化されたChen予想

2001年Caddeo-Montaldo-Piuらにより Chen予想は次のように一般化された (cf. [4]):
” (N, h) をリーマン多様体，その断面曲率 K^N は $K^N \leq 0$ とする．このとき，N 内の2重調和部分多様体は極小である．”

この予想に対して多くの部分的解決がなされたが，最近，Y. L. Ou と L. Tang により反例が与えられた (cf. [18])．従って，部分多様体の完備性を仮定した次の予想は興味深い問題であるといえる.

予想 9. (N, h) をリーマン多様体，その断面曲率 $K^N \leq 0$ とする．このとき，N 内の完備2重調和部分多様体は極小である.

$K^N \leq 0$ でないときは2重調和部分多様体の例が知られている.

例 10. $S^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow S^n(1)$: 極小でない2重調和部分多様体.

3.1. 予想に対する結果1

まず，2重調和部分多様体の必要十分条件を求める.

定理 11 ([14])**.** $\phi : (M, g) \hookrightarrow (N, h)$ が2重調和部分多様体である必要十分条件は

$$\begin{cases} \Delta^{\perp}\mathbf{H} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} B(A_{\mathbf{H}}e_i, e_i) + \left[\sum_{i=1}^{m} R^N(\mathbf{H}, d\phi(e_i))d\phi(e_i)\right]^{\perp} = 0, \ (\text{法方向}). \\ m\ \nabla\,|\mathbf{H}|^2 + 4\ \mathrm{trace}\ A_{\nabla^{\perp}\mathbf{H}} + \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{m} R^N(\mathbf{H}, d\phi(e_i))d\phi(e_i)\right]^{T} = 0, \ (\text{接方向}). \end{cases}$$

この定理からChen予想のときと同様に次の補題を得る．

補題 12. N をリーマン多様体，その断面曲率 $K^N \leq 0$ とする．このとき，$\phi : M^m \hookrightarrow N$ が2重調和部分多様体であるならば次の不等式が成り立つ．

$$\Delta|\mathbf{H}|^2 \geq 2m|\mathbf{H}|^4.$$

Chen予想のときと同様に部分多様体論において Omori-Yau の generalized maximal principle を直接用いることはできない．そこで，2重調和でない一般のproperな部分多様体を考え，次の結果を得た．

定理 13. N を完備リーマン多様体，その断面曲率 K^N は *polynomial growth bound of order* $\alpha < 2$ *from below* を持つとする．また，正の定数 $k > 0$ が存在し，

$$\Delta|\mathbf{H}|^2 \geq k|\mathbf{H}|^4$$

を満たすとする．このとき，N 内の *proper* な部分多様体は極小である．

K^N がpolynomial growth bound of order α from belowを持つとは次を満たすときをいう: 完備リーマン多様体 N, $\alpha \geq 0$ に対し，

$$K^N \geq -L\left(1 + \mathrm{dist}_N(\cdot, q_0)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{for some } L > 0 \text{ and } q_0 \in N.$$

補題12と定理13から次の結果を得る．

系 14. N を完備リーマン多様体，その断面曲率 $K^N \leq 0$ とする．このとき，K^N が *polynomial growth bound of order* $\alpha < 2$ *from below* を持つならば N 内の *proper* な2重調和部分多様体は極小である．

系の証明を直接述べる．

[**系の証明の概要**]
G. Y. Jiang により M がcompactのときは解決されているため (cf. [10])，M は non-compactを仮定する．$x_0 \in M$ において，$\mathbf{H}(x_0) \neq 0$ を仮定して矛盾を導く．次の関数を評価していくことを考える．

$$f(x) = \left(\rho^2 - r(\phi(x))^2\right)^2 u(x), \quad x \in \phi^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}_\rho}\right),$$

ここに，$r\left(\phi\left(x\right)\right)=\mathrm{dist}_N\left(\phi\left(x\right),q_0\right)$, $(q_0\in N)$, $u\left(x\right)=\left|\mathbf{H}\left(x\right)\right|^2$, $\overline{\mathbf{B}_\rho}=\{q\in N\mid r\left(q\right)\le\rho\}$.

仮定より ϕ は proper map であるから $\phi^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}_\rho}\right)$ は compact. また，$x\in\phi^{-1}\left(\partial\overline{\mathbf{B}_\rho}\right)$ において $f\left(x\right)=0$ であるから，f は $p\in\phi^{-1}\left(\mathbf{B}_\rho\right)$ で最大値 $(f\left(p\right)>0)$ をとる．ここで f は N 上の距離関数を含んでいるため，(i)$\phi\left(p\right)\notin C\left(q_0\right)$ ($C(q_0)$ は q_0 の cut locus) のとき，(ii)$\phi\left(p\right)\in C\left(q_0\right)$ のときに場合分けをして考える．

(i) の場合は p において，$\nabla f=0$, $\Delta f\le 0$ とできるので，補題12を用いて，p において

$$2m\left|\mathbf{H}(x)\right|^2\le\frac{\Delta\left|\mathbf{H}\left(x\right)\right|^2}{\left|\mathbf{H}\left(x\right)\right|^2}\le\frac{6\left|\nabla\left(r\left(\phi(x)\right)\right)^2\right|^2}{\left(\rho^2-r\left(\phi\left(x\right)\right)^2\right)^2}+\frac{2\,\Delta\left(r\left(\phi\left(x\right)\right)\right)^2}{\rho^2-r\left(\phi\left(x\right)\right)^2}.$$

右辺の分子を計算すると，p において，

$$\left|\nabla\left(r\left(\phi\left(x\right)\right)\right)^2\right|^2\le 4m\;r\left(\phi\left(x\right)\right)^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(r\left(\phi\left(x\right)\right)\right)^2\le{}& 2m\\ &+2\;r\left(\phi\left(x\right)\right)\sum_{i=1}^{m}D^2r\left(\phi\left(x\right)\right)\left(d\phi\left(e_i\right),d\phi\left(e_i\right)\right)\\ &+2m\;r\left(\phi\left(x\right)\right)\left|\mathbf{H}(x)\right|\\ \le{}& 2m\\ &+2m\;r\left(\phi\left(x\right)\right)\sqrt{L\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\coth\left(\sqrt{L\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}r\left(\phi\left(x\right)\right)\right)\\ &+2m\;r\left(\phi\left(x\right)\right)\left|\mathbf{H}(x)\right|.\end{aligned} \tag{2}$$

ここに，(2) 第2不等式は $\overline{\mathbf{B}}_\rho$ 上において

$$K^N\ge -L\left(1+r^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\ge -L\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

であるから，距離関数のヘッシアンに関する評価定理を用いると，p において，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}D^2r\left(\phi\left(x\right)\right)\left(d\phi\left(e_i\right),d\phi\left(e_i\right)\right)\\ &\qquad\le m\sqrt{L\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\;\coth\left(\sqrt{L\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}r\left(\phi\left(x\right)\right)\right),\end{aligned}$$

であることを用いた．よって，

$$\begin{aligned}f(p)\le{}&12\;r(\phi(p))^2+2\;(\rho^2-r(\phi(p))^2)\\ &+2\sqrt{L(1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\;r(\phi(p))\;\coth\left(\sqrt{L(1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}}}r(\phi(p))\right)(\rho^2-r(\phi(p))^2)\\ &+2\;r(\phi(p))\sqrt{f(p)}.\end{aligned}$$

従って，ρ に依らない正定数 $c>0$ が存在して，

$$f\left(x_0\right) \leq f\left(p\right) \leq c\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}.$$

これより，

$$\left|\mathbf{H}\left(x_0\right)\right|^2 = u\left(x_0\right) \leq \frac{c\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}}{\left(\rho^2 - r\left(\phi\left(x_0\right)\right)^2\right)^2}.$$

(ii) の場合は，上述した関数 f を修正することを考える．まず，$\overline{\mathbf{B}_\rho}$ の中心 q_0 と $\phi(p)$ を最短測地線で結び，測地線上において $q' \notin C(q_0)$ をとる．そして，q' を頂点とする $\phi(p)$ の円錐形近傍 $U(q')$ を考える．このとき，q' からの $U(q')$ 上の距離関数を

$$\overline{r}\left(\phi\left(x\right)\right) := \mathrm{dist}_{U(q')}\left(\phi\left(x\right), q'\right),$$

と定義する．これを用いて f を次のように修正する．

$$\overline{f}\left(x\right) := \left(\rho^2 - \left\{r\left(q'\right) + \overline{r}\left(\phi\left(x\right)\right)\right\}^2\right)^2 u\left(x\right), \quad x \in \phi^{-1}\left(U\left(q'\right)\right).$$

簡単な議論により，

$$\begin{cases} \overline{f}\left(p\right) = f\left(p\right) \geq f\left(x\right) \geq \overline{f}\left(x\right), \\ q' \notin C\left(q_0\right) \Rightarrow \phi\left(p\right) \notin C\left(q'\right). \end{cases}$$

あとは (i) と全く同様の手法で

$$\left|\mathbf{H}\left(x_0\right)\right|^2 = u\left(x_0\right) \leq \frac{c\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}}{\left(\rho^2 - r\left(\phi\left(x_0\right)\right)^2\right)^2}.$$

(i) と (ii) から

$$\left|\mathbf{H}\left(x_0\right)\right|^2 = u\left(x_0\right) \leq \frac{c\left(1+\rho^2\right)^{\frac{\alpha+6}{4}}}{\left(\rho^2 - r\left(\phi\left(x_0\right)\right)^2\right)^2} \xrightarrow[\rho\nearrow\infty,\ \alpha<2]{} 0.$$

これは仮定に矛盾．よって，M は極小である．

3.2. 予想に対する結果 2

予想 9 に対し，N. Nakauchi と H. Urakawa は論文 [16] において次の結果を与えた．

定理 15 ([16]). N をリーマン多様体，その断面曲率 $K^N \leq 0$ とする．このとき，

$$\int_M |\mathbf{H}|^2 dv_g < \infty,$$

であるならば N 内の完備 2 重調和部分多様体 M は極小．

この結果を改良し次の結果を得た．

定理 16. N をリーマン多様体，その断面曲率 $K^N \leq 0$ とする．また，p は $2 \leq p < \infty$ を満たすとし，そのような p に対し，

$$\int_M |\mathbf{H}|^p dv_g < \infty,$$

とする．このとき，N 内の完備 2 重調和部分多様体 M は極小．

4. 3 重調和部分多様体について

2 重調和写像と同様に Eells-Lemaire により 3 重調和部分多様体の概念が与えられている．

定義 17 ([8], [19])**.** $\phi : (M, g) \hookrightarrow (N, h)$ を等長はめ込みとする．このとき，M が N の 3 重調和部分多様体であるとは次を満たすときをいう．

$$\begin{aligned}\Delta^2 \mathbf{H} + \sum_{i=1}^{m} R^N(\Delta \mathbf{H}, d\phi(e_i))d\phi(e_i)& \\ - m \sum_{i=1}^{m} R^N(\nabla^N_{d\phi(e_i)}\mathbf{H}, \mathbf{H})d\phi(e_i) &= 0.\end{aligned}$$

3 重調和部分多様体に対して得られた結果を述べる．まず，3 重調和部分多様体の例としては次の例がある．

例 18. $S^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \hookrightarrow S^n(1)$: 極小でない，2 重調和でない, 3 重調和部分多様体.

特に，一般に 2 重調和写像であっても 3 重調和ではない．

定理 19. 定曲率 $(K^N \neq 0)$ 空間内の 2 重調和かつ 3 重調和部分多様体は極小である.

定理 20. (N, h) を断面曲率 K^N が一定かつ $K^N \leq 0$ とする．$\phi : (M, g) \hookrightarrow (N, h)$ がコンパクト 3 重調和部分多様体ならば，M は極小である.

今後の課題

1. 定理 13 において $\alpha < 2$ の評価は最良か?
2. 定理 13 において N の完備性を仮定しないとどうか？

3. 2重調和関数及び3重調和関数における Almansi 展開 (k 重調和関数を k 個の調和関数を用いて表す展開) の類似を2重調和写像及び3重調和写像に対して示すことが出来るか？

4. Chen 予想の反例を構成することはできるか？

5. 2重調和写像の存在定理を与えることはできるか？

参考文献

[1] K. Akutagawa and S. Maeta, *Biharmonic properly immersed submanifolds in the Euclidean spaces*, Geom. Dedicata **164**, (2013), 351-355.

[2] A. Balmus, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in* 4-*dimensional space forms*, Math. Nachr. **283**, (2010), 1696–1705.

[3] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. **130**, (2002), 109–123.

[4] R. Caddeo, S. Montaldo and P. Piu, *On biharmonic maps*, Contemp. Math. **288**, (2001), 286–290.

[5] B.-Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. 17 (1991), 169–188.

[6] F. Defever, *Hypersurfaces of* $\mathbb{E}^4$ *with harmonic mean curvature vector*, Math. Nachr. **196**, (1998), 61–69.

[7] I. Dimitrić, *Submanifolds of* $\mathbb{E}^m$ *with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **20**, (1992), 53–65.

[8] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, **50**, Amer. Math. Soc, (1983).

[9] T. Hasanis and T. Vlachos, *Hypersurfaces in* $\mathbb{E}^4$ *with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr. **172**, (1995), 145–169.

[10] G. Y. Jiang, 2-*harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. **7**A, (1986), 388–402; the English translation, Note di Mathematica **28**, (2008), 209–232.

[11] S. Maeta, *k-harmonic maps into a Riemannian manifold with constant sectional curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 1835-1847.

[12] S. Maeta, *Biminimal properly immersed submanifolds in complete Riemannian manifolds of non-positive curvature*, arXiv:1208.0473 [mathDG].

[13] S. Maeta, *Biharmonic maps from a complete Riemannian manifold into a non-positively curved manifold*, arXiv:1305.7065 [math.DG].

[14] S. Maeta and H. Urakawa, *Biharmonic Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Glasg. Math. J. **55**, (2013), 465-480.

[15] N. Nakauchi and H. Urakawa, *Biharmonic hypersurfaces in a Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **40**, (2011), 125–131.

[16] N. Nakauchi and H. Urakawa, *Biharmonic submanifolds in a Riemannian manifold with non-positive curvature*, Results Math. **63**, (2013), 467–474

[17] N. Nakauchi, H. Urakawa and S. Gudmundsson, *Biharmonic maps in a Riemannian manifold of non-positive curvature*, to appear in Geom. Dedicata doi:10.1007/s10911-013-9854-1.

[18] Y.-L. Ou and L. Tang, *On the generalized Chen's conjecture on biharmonic submanifolds*, Michigan Math. J. **61**, (2012), 531–542.

[19] S. B. Wang, *The First Variation Formula For K-harmonic mapping*, Journal of Nanchang University **13**, No 1, (1989).

Shun Maeta,
Faculty of Tourism
and Business Management,
Shumei University,
Chiba 276-0003,
Japan.
e-mail: maeta@mailg.shumei-u.ac.jp *or* shun.maeta@gmail.com