

階数 1 の非コンパクト型対称空間内の逆平均曲率流

酒井 勇輔 (東京理科大学大学院理学研究科 D3)

部分多様体幾何とリー群作用 2013 8 月 20 日

1 序

本講演の内容は、小池直之先生 (東京理科大学) との共同研究に基づく。 M を n 次元の (C^∞) 閉多様体、 $(N, \bar{g})$ を $(n+1)$ 次元の (C^∞) 完備リーマン多様体とする。また、

$$F_t : M \hookrightarrow (N, \bar{g}) \quad (t \in [0, T))$$

を N への (C^∞) 閉超曲面はめ込みの C^∞ 級の 1 パラメータ族とする。写像 $F : M \times [0, T) \rightarrow (N, \bar{g})$ を $F(p, t) := F_t(p)$ ($(p, t) \in M \times [0, T)$) により定義し、また、 $M_t := F_t(M)$ ($t \in [0, T)$) とおく。はめ込みの族 F_t ($t \in [0, T)$) が次の発展方程式を満足しているとき、その族を逆平均曲率流と呼ぶ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{H} \nu \quad (\text{IMCF})$$

ここで、 ν は超曲面 M_t 達の外向き単位法ベクトル場を表し、 H は M_t 達の $-\nu$ に関する平均曲率を表す。また、 (IMCF) を逆平均曲率流方程式と呼ぶ。さらに、各超曲面 M_t は平均凸、すなわち $M \times [0, T)$ 上で $H > 0$ を満たすと仮定する。いかなる平均凸である閉超曲面に対しても、それを発する逆平均曲率流が短時間において存在することが Huisken-Polden [10] によって示されている。

N がユークリッド空間の場合は、Gerhardt [3] により、平均凸である閉超曲面を発する逆平均曲率流が全時間で存在し、相似的に発展する球面解に漸近することが示されている。また、Huisken-Ilmanen [9] により、平均凸かつ星状型の閉超曲面に対し、それを発する逆平均曲率流に沿う平均曲率の次のような下からの評価式が得られている。

定理 ([9]). $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の平均凸かつ星状型の閉超曲面を発する逆平均曲率流で、 F_0 の支持関数 w_0 が、ある正定数 R_1, R_2 に対して $0 < R_1 \leq w_0 \leq R_2$ を満たすようなものとする。このとき、 $M \times [0, \infty)$ 上で

$$\frac{1}{Hw} \leq C(n) \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}}, 1 \right\} \frac{1}{R_1} \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}},$$

および

$$H \geq \frac{\min \{\sqrt{t}, 1\}}{C(n)} \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{n}} \text{vol}(M_0)^{-\frac{1}{n}}$$

が成立し、それゆえ、 $[0, \infty)$ 上で全平均曲率 $\int_M H_t d\mu_t$ に関する次のような下からの評価式

$$\int_M H_t d\mu_t \geq \frac{\min \{\sqrt{t}, 1\}}{C(n)} \frac{R_1}{R_2} e^{(1-\frac{1}{n})t} \text{vol}(M_0)^{1-\frac{1}{n}}$$

が成立する。ここで、 $C(n)$ は n のみに依存する正定数である。

一方、 N が双曲空間の場合、Gerhardt [5] により、平均凸かつ星状型の超曲面を発する逆平均曲率流が全時間で存在することが示されている。

講演の目的は、 N が階数 1 の非コンパクト型対称空間の場合に、上述の結果に類似して、平均凸かつ星状型の閉超曲面を発する逆平均曲率流に沿う平均曲率の下からの評価式を得ることである (定理 5 を参照)。本稿は、研究集会『部分多様体幾何とリー群作用 2013』の予稿に加筆を行ったものである。

2 基本的な幾何学量の発展方程式

本節では、逆平均曲率流に沿う様々な幾何学量に関する発展方程式について述べる。記法は [12] の流儀に従う。 M を n 次元の開多様体、 $(N, \bar{g})$ を $(n+1)$ 次元の完備なリーマン多様体とし、 $F_t : M \hookrightarrow N$ ($t \in [0, T)$) を逆平均曲率流とする。 $\bar{\nabla}$ をリーマン計量 $\bar{g}$ の Levi-Civita 接続とし、 $\bar{\nabla}^{F_t}, \bar{\nabla}^F$ をそれぞれ写像 F_t, F に沿う $\bar{\nabla}$ の引き戻し接続とする。はめ込み F_t により誘導される M の幾何学量には、添字 t を付す。つまり、 g_t を F_t による誘導計量、 ∇^t を g_t の誘導接続、 $d\mu_t$ を g_t の体積要素、 ν_t を M_t の外向きの単位法ベクトル場、 h_t を M_t の $-\nu_t$ に関する第 2 基本形式、 A_t を M_t の $-\nu_t$ に関する形作用素とする。

M 上のベクトルバンドル E に対し、 E の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と表し、自然な射影 $\pi_M : M \times [0, T) \rightarrow M$ による E の引き戻しバンドルを $\pi_M^* E$ と表す。 $S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ に対し、 $\frac{\partial S}{\partial t} \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ を

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{(p,t)} := \frac{dS_{(p,t)}}{dt} \quad ((p,t) \in M \times [0, T))$$

により定義する。ここで、 $T^{(0,2)}M$ は M の $(0,2)$ 次テンソルバンドル、 $\frac{dS_{(p,t)}}{dt}$ はベクトル値関数 $t \mapsto S_{(p,t)} \in T_p^{(0,2)}M$ の微分を表す。また、 $g, h \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M)), A \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(1,1)}M))$ をそれぞれ

$$g_{(p,t)} := (g_t)_p, \quad h_{(p,t)} := (h_t)_p, \quad A_{(p,t)} := (A_t)_p \quad ((p,t) \in M \times [0, T))$$

により定義する。 $\pi_M^*(TM)$ の接続 ∇ を

$$\begin{aligned} \nabla_V W &:= \nabla_V^t W_{(\cdot,t)} \quad (V \in (\pi_M^*(TM))_{(p,t)} ((p,t) \in M \times [0, T)), \quad W \in \Gamma(\pi_M^*(TM))), \\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} W \right)_{(p,t)} &:= \frac{dW_{(p,t)}}{dt} \quad ((p,t) \in M \times [0, T)) \end{aligned}$$

により定義する。ここで、 $\frac{dW_{(p,t)}}{dt}$ はベクトル値関数 $t \mapsto W_{(p,t)} \in T_p M$ の微分を表す。

$(U, (x^1, \dots, x^n))$ を M の局所座標とし、 $e_0 := \nu_t$, $e_i := dF_t(\frac{\partial}{\partial x^i})$ ($i = 1, \dots, n$) とおく。 $S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ に対し、 $S, \frac{\partial S}{\partial t}$ の $(U, (x^1, \dots, x^n))$ に関する成分をそれぞれ $S_{ij}, \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{ij}$ と表す。また、 $\bar{S} \in F^*(T^{(0,s)}N)$ に対し、 $\bar{S}$ の $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ に関する成分を $\bar{S}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ ($0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_s \leq n$) と表す。

以上の準備のもと、 $g, d\mu, \nu, h, H$ に関する発展方程式は、次のように記述される。

補題 1. (1) $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2}{H} h$

(2) $\frac{d}{dt}[d\mu] = d\mu$

(3) $\bar{\nabla}_{\partial_t}^F \nu = \frac{1}{H^2} dF(\text{grad } H)$

(4)
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} [h_{ij}] = -\frac{2}{H^3} \nabla_i H \cdot \nabla_j H + \frac{1}{H^2} \left((\nabla \nabla H)_{ij} + H \sum_{k,l=1}^n h_{jk} g^{kl} h_{il} - H \bar{R}_{0ij0} \right) \\ &= \frac{1}{H^2} (\Delta h)_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \cdot \nabla_j H - \frac{2}{H} \bar{R}_{0ij0} + \frac{1}{H^2} (\|A\|^2 + \bar{\text{Ric}}_{00}) h_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{H^2} \sum_{k,l,\alpha,b=1}^n (\bar{R}_{kial} h_{bj} + \bar{R}_{kjal} h_{ib} - 2\bar{R}_{kija} h_{lb}) g^{kl} g^{ab} - \frac{1}{H^2} \sum_{k,l=1}^n ((\bar{\nabla} \bar{R})_{k0jil} + (\bar{\nabla} \bar{R})_{i0lkj}) g^{kl} \end{aligned}$$

(5)
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{H^2} \Delta H - \frac{2}{H^3} \|\text{grad } H\|^2 - \frac{1}{H} (\|A\|^2 + \bar{\text{Ric}}_{00})$$

ここで、 Δ は ∇ に関するラプラス作用素を表し、 $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} := \sum_{\epsilon=0}^n \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon g_{\epsilon\delta}$ ($\bar{R} = \{\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon\}$ は $\bar{g}$ のリーマン曲率テンソル)、 $\bar{\text{Ric}}_{00} := \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{0ij0} g^{ij}$ である。

(注) (4) を導出する際に、Simons の恒等式 ([15]) を用いることを注意しておく。

3 支持関数の発展方程式

本節以降, $N = G/K$ を最大の断面曲率が $c (< 0)$ であるような階数 1 の非コンパクト型対称空間 (つまり, $N = \mathbb{F}H^m(c)$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}, m \geq 2$), または, $\mathbb{O}H^2(c)$) とし, $(\mathfrak{g}, \theta)$ を G/K に随伴する直交対称リー代数とし, $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$ とおく. ここで, N の最小の断面曲率は $4c$ であること, および, $\mathfrak{p}$ は接空間 $T_{eK}(G/K)$ (e は G の単位元) と同一視されることを注意しておく. eK は初期データ M_0 の内部領域に属していると仮定しても一般性を失わない. 簡単のため, $p_0 := eK$ とおく. M_t の支持関数 w_t を

$$w_t(p) := \bar{g}_{F(p,t)} \left(c'_{v(p,t)}(1), \nu(p,t) \right) \quad (p \in M)$$

により定義する. ここで, $v(p,t) := \exp_{p_0}^{-1}(F(p,t))$ であり, $c_{v(p,t)}$ は $v(p,t) \in T_{p_0}(G/K)$ 方向の極大測地線を表す. $M \times [0, T)$ 上の関数 w を $w(p,t) := w_t(p) \quad ((p,t) \in M \times [0, T))$ により定義する. $M \times [0, T)$ 上で $w > 0$ であるとき, F を星状型解と呼ぶ.

$N = G/K$ は階数 1 の非コンパクト型対称空間であるので, N 内の ξ 方向の測地線 c_ξ に沿うヤコビ場 J は

$$J(s) = P_{c_\xi}|_{[0,s]} \left(D_{s\xi}^{co}(J(0)) + s D_{s\xi}^{si} \left(\frac{DJ}{ds}(0) \right) \right) \quad (1)$$

と記述される ([16] 参照). ここで, $P_{c_\xi}|_{[0,s]}$ は $\bar{\nabla}$ に関する $c_\xi|_{[0,s]}$ に沿う平行移動を表し, $\frac{D}{ds}$ は引き戻し接続 $\bar{\nabla}^{c_\xi}$ を表し, $D_{s\xi}^{co}, D_{s\xi}^{si}$ は次式によって定義される $\mathfrak{p}$ の線型変換を表す:

$$D_{s\xi}^{co} := \cosh(s \cdot \text{ad}(\xi)), \quad D_{s\xi}^{si} := \frac{\sinh(s \cdot \text{ad}(\xi))}{s \cdot \text{ad}(\xi)} \quad (\text{ad} : \mathfrak{g} \text{ の随伴表現を表す})$$

また, $\mathfrak{p}$ の線型変換 $Q_{\xi,\bullet}^{co}, Q_{\xi,\bullet}^{si}$ を次式により定義する:

$$Q_{\xi,\bullet}^{co} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{l=1}^{2k} (\text{ad}(\xi)^{l-1} \circ \text{ad}(\bullet) \circ \text{ad}(\xi)^{2k-l}), \quad Q_{\xi,\bullet}^{si} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{l=1}^{2k} (\text{ad}(\xi)^{l-1} \circ \text{ad}(\bullet) \circ \text{ad}(\xi)^{2k-l})$$

簡単のため, $X := d(\exp_{p_0}^{-1})(\nu)$ とおく. 補題 1 の発展方程式, および, ヤコビ場の記述 (1) を用いて, 次の w に関する発展方程式を得る.

補題 2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & \frac{1}{H^2} \Delta w + \frac{2}{H} \bar{g} (D_v^{co}(X), D_v^{si}(X)) + \frac{\|A\|^2}{H^2} w - \frac{1}{H^2} \bar{g} \left(\text{Tr}_g^* \left(\left(Q_{v, (D_v^{co} \circ (D_v^{si})^{-1})}(\bullet) \circ (D_v^{si})^{-1} \right) (\bullet) \right), D_v^{si}(X) \right) \\ & + \frac{1}{H^2} \bar{g} \left(\text{Tr}_g^* \left(\left(D_v^{co} \circ (D_v^{si})^{-1} \circ Q_{v, (D_v^{co} \circ (D_v^{si})^{-1})}(\bullet) \circ (D_v^{si})^{-1} \right) (\bullet) \right), D_v^{si}(X) \right) \\ & - \frac{2}{H^2} \text{Tr} \left((dF_t)^{-1} \circ \text{pr}_{dF_t(TM)} \circ D_{c'_v(1)}^{co} \circ (D_{c'_v(1)}^{si})^{-1} \circ dF_t \circ A \right) \end{aligned}$$

が成立する. ここで, $\text{Tr}_g^*(\bullet)$ は $\bullet$ の位置で g に関するトレースを取ることを表し, $\text{pr}_{dF_t(TM)}$ は $F_t^*(TN)$ から $dF_t(TM)$ への直交射影を表す.

補題 1, 2 の発展方程式を用い, 最大値原理の証明における議論を行うことにより, 逆平均曲率流に沿う支持関数 w_t に関する次の評価式を得る.

補題 3. $0 < R_1 \leq w_0 \leq R_2$ (R_1, R_2 は正定数) とする. このとき, $M \times [0, T)$ 上で次の評価式が成立する;

$$\frac{1}{2\sqrt{-c}} \text{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right) \leq w \leq \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(\sqrt{-c}R_2) \right)$$

4 平均曲率の下からの評価

速度調節関数 u を $u := \frac{1}{Hw}$ により定義する. 補題 1, 2 を用いることにより, u に関する発展方程式は次のように記述される:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{H^2} \Delta u = -\frac{u}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{H^2} \Delta w \right) + \frac{u}{H^2} (\|A\|^2 + \overline{\text{Ric}}_{00}) - \frac{2}{H^3} \langle \text{grad } u, \text{grad } H \rangle - \frac{2}{H^2 u} \|\text{grad } u\|^2$$

初期データ F_0 の支持関数 w_0 が $(0 <) R_1 \leq w_0$ を満たし, かつ, 平均曲率に関する下からの一様有界性 $(0 <) R_3 \leq H_t$ ($0 \leq t < T$) が成立しているとき, 前節で示した補題 2, 3 を組み合わせることにより, u に関する次のような L^p 評価を導くことができる.

定理 4. 速度調節関数 u_t の g_t に関する L^p ノルムは, n, p のみに依存する定数 $C(n, p)$ と, A_0, R_3 のみに依存する定数 $C_{A_0, R_3} := \frac{\max_M \|A_0\|^2}{R_3^2}$ を用いて, 以下のように評価される:

$$\|u_t\|_{L^p(M)} \leq C(n, p) [\text{vol}(M_0)]^{\frac{n+p}{np}} e^{\left(\frac{2}{p} + C_{A_0, R_3}\right)t} \frac{1}{\sqrt{\Psi_p(t)}}$$

ただし, $\Psi_p(t) := \int_0^t \left(\frac{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{\tau}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 e^{(2C_{A_0, R_3} + \frac{2(n-p)}{np})\tau} d\tau$ とおいた.

定理 4 を導く過程で, Hoffman-Spruck [7] によるリーマン部分多様体に対する Sobolev の不等式を用いる. その際に, $N = G/K$ が階数 1 という仮定が必要とされる.

補題 2, 3, および, 定理 4 を用いて, 平均曲率 H , および, 全平均曲率 $\int_M H_t d\mu_t$ に関する次のような下からの評価式を得ることができる.

定理 5. $F : M \times [0, T) \rightarrow N$ を階数 1 の非コンパクト型対称空間 $N = G/K$ 内の平均凸かつ星状型の n 次元閉超曲面を発する逆平均曲率流で, F_0 の支持関数 w_0 , および, 平均曲率 H が, ある正定数 R_1, R_2, R_3 に対して

$$0 < R_1 \leq w_0 \leq R_2 \quad \text{かつ} \quad 0 < R_3 < H_t \quad (0 \leq t < T)$$

を満たすようなものとする. このとき, $M \times [0, T)$ 上で, 平均曲率に関する次のような下からの評価式

$$H \geq \frac{\sqrt{-c}}{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(\sqrt{-c}R_2)\right)} \left(\frac{2\sqrt{-c} \check{C}(n, r) \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{t}{n}}}{\text{arcsinh}\left(e^{\max\{\frac{2t}{n}, \frac{t-1}{n}\}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)} \right. \\ \left. + \max\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, 1\right\} \sqrt{\hat{C}(n, r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}}\right)} \frac{\text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} e^{\left(\frac{1}{2r} + C_{A_0, R_3}\right)t}}{\sqrt{\Psi_{2r}(\max\{\frac{t}{2}, t-1\})}} \right)^{-1}$$

が成立し, それゆえ, $[0, T)$ 上で, 平均曲率 $\int_M H_t d\mu_t$ に関する次のような下からの評価式

$$\int_M H_t d\mu_t \geq \frac{\sqrt{-c} \text{vol}(M_0) e^t}{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(\sqrt{-c}R_2)\right)} \left(\frac{2\sqrt{-c} \check{C}(n, r) \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{t}{n}}}{\text{arcsinh}\left(e^{\max\{\frac{2t}{n}, \frac{t-1}{n}\}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)} \right. \\ \left. + \max\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, 1\right\} \sqrt{\hat{C}(n, r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}}\right)} \frac{\text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} e^{\left(\frac{1}{2r} + C_{A_0, R_3}\right)t}}{\sqrt{\Psi_{2r}(\max\{\frac{t}{2}, t-1\})}} \right)^{-1}$$

が成立する. ここで, r は

$$r > \frac{2q-1}{q-1} \quad (n=2, \text{ただし } q \text{ は } 1 \text{ より大きい任意の定数}), \quad \frac{n+2}{2} \quad (n \geq 3)$$

を満たしている任意の定数であり, $\check{C}(n, r)$, および, $\hat{C}(n, r)$ はそれぞれ n, r のみに依存する正定数であり, また, $C_{A_0, R_3} := \frac{\max_M \|A_0\|^2}{R_3^2}$ である.

証明 $t_0 \in (0, T)$ を固定する. $M \times [t_0, T)$ 上の関数 z を

$$z(p, t) := (t - t_0)^\beta \cdot u(p, t) \quad ((p, t) \in M \times [t_0, T))$$

により定義する. ここで $\beta \in (0, 1)$ は後ほど決定するものとする. $k \in [0, \infty)$ を固定し, $z_k := \max\{z - k, 0\}$, $A_t(k) := \{p \in M; z(p, t) > k\}$, $A(k) := \bigcup_{0 < t < T} A_t(k)$ とおく. z に関する発展方程式, Green の定理, および補題 3 を用いることにより, 次の微分不等式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + 2k^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 (t - t_0)^{-2\beta} \int_M (\|\operatorname{grad} z_k\|^2 + H_t^2(z_k)_t^2) d\mu_t \\ \leq \left(\frac{2\beta}{t - t_0} + 2C_{A_0, R_3} \right) \int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t + 3 \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t \end{aligned} \quad (2)$$

を得る. ここで, $n = 2, n \geq 3$ の場合に分けて積分の吸収を行う. まず, $n = 2$ の場合, $q \in (1, \infty)$ を固定し, $(z_k)_t$ に対する Sobolev の不等式, および, 式 (2) を用いることにより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + \frac{2k^2}{C(2)q^2(t - t_0)^{2\beta} \operatorname{vol}(M_t)^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{\operatorname{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{2}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 \left(\int_M (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\frac{2\beta}{t - t_0} + 2C_{A_0, R_3} \right) \int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t + 3 \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t \end{aligned}$$

を得る. $t_1 \in (t_0, T)$ を固定し,

$$k_0 := \sqrt{3C(2)}(t_1 - t_0)^\beta q e^{\frac{t_1}{2}} \operatorname{vol}(M_0)^{\frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{-c}}{\operatorname{arcsinh} \left(e^{\frac{t_0}{2}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)} \quad (3)$$

とおくことにより, 各 $t \in [t_0, t_1]$, および, $k \in [k_0, \infty)$ に対して

$$\operatorname{vol}(M_t) \leq \frac{1}{3} C(2)^{-1} k^2 q^{-2} \left(\frac{\operatorname{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{2}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 (t - t_0)^{-2\beta}$$

が成立する. この不等式と, $(z_k)_t$ に対する Hölder の不等式を用いることにより,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + \frac{k^2}{C(2)q^2(t - t_0)^{2\beta} \operatorname{vol}(M_t)^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{\operatorname{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{2}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 \left(\int_M (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\frac{2\beta}{t - t_0} + 2C_{A_0, R_3} \right) \int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t \end{aligned} \quad (4)$$

を得る. 次に, $n \geq 3$ の場合, $q := \frac{n}{n-2}$ とおき, 先の場合と同様にして,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + \frac{2k^2}{C(n)} \left(\frac{\operatorname{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 (t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_M (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\frac{2\beta}{t - t_0} + 2C_{A_0, R_3} \right) \int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t + 3 \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t \end{aligned}$$

を得る. $t_1 \in (t_0, T)$ を固定し,

$$k_0 := \sqrt{3C(n)}(t_1 - t_0)^\beta e^{\frac{t_1}{n}} \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} \frac{2\sqrt{-c}}{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t_0}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)} \quad (5)$$

とおくことにより, 各 $t \in [t_0, t_1]$, および, $k \in [k_0, \infty)$ に対して

$$\text{vol}(M_t)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{3} \frac{k^2}{C(n)} \left(\frac{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 (t - t_0)^{-2\beta}$$

が成立する. この不等式と, $(z_k)_t$ に対する Hölder の不等式を用いることにより,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + \frac{k^2}{C(n)} \left(\frac{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 (t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_M (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\frac{2\beta}{t - t_0} + 2C_{A_0, R_3} \right) \int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t \end{aligned} \quad (6)$$

を得る. ここで, n と k に依存する定数 $B(n, k)$ を

$$B(n, k) := \begin{cases} \frac{k^2}{C(2)q^2} \left(\frac{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t_0}{2}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 \text{vol}(M_{t_1})^{-\frac{1}{q}} & (n = 2), \\ \frac{k^2}{C(n)} \left(\frac{\text{arcsinh}\left(e^{\frac{t_0}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1)\right)}{2\sqrt{-c}} \right)^2 & (n \geq 3). \end{cases}$$

とおけば, 式 (4), (6) はともに $B(n, k)$ を用いて

$$\frac{d}{dt} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + B(n, k)(t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_M (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{2\beta}{t - t_0} + 2C_{A_0, R_3} \right) \int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t$$

と書ける. 以降, $k \in [k_0, \infty)$ を固定する. $t \in [t_0, t_1]$ とし, 区間 $[t_0, t]$ 上で積分することにより

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_M (z_k)_t^2 d\mu_t + B(n, k) \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_M (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} dt \\ \leq 4\beta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t - t_0} \left(\int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t \right) dt + 4C' \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t \right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

を得る. ここから不等式評価を進行させるために, 補間不等式を用いる. まず補間指数 $q_0 \in (1, q)$ を

$$\frac{1}{q_0} = \frac{a}{q} + (1 - a) \quad \left(a := \frac{1}{q_0} \right)$$

と定義すると,

$$\begin{cases} 1 < q < \infty, & q_0 = 2 - \frac{1}{q}, & (n = 2), \\ q = \frac{n}{n-2}, & q_0 = 2 - \frac{1}{q} = \frac{n+2}{n}, & (n \geq 3) \end{cases}$$

となる. 補間不等式, および, Young の不等式を用いることにより

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^{t_1} B(n, k)(t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_{A_t(k)} (z_k)_t^{2q_0} d\mu_t \right) dt \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ \leq \bar{C}(n) \left(\sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{A_t(k)} (z_k)_t^2 d\mu_t + \int_{t_0}^{t_1} B(n, k)(t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_{A_t(k)} (z_k)_t^{2q} d\mu_t \right)^{\frac{1}{q}} dt \right) \end{aligned}$$

を得る. ただし, $\bar{C}(n) := \max \{1 - a, a\}$ とおいた. これに不等式 (7) を合わせることにより,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{t_0}^{t_1} B(n, k)(t - t_0)^{-2\beta} \left(\int_{A_t(k)} (z_k)_t^{2q_0} d\mu_t \right) dt \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ & \leq 4\beta\bar{C}(n) \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t - t_0} \left(\int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t \right) dt + 4\bar{C}(n)C_{A_0, R_3} \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{A_t(k)} z_t^2 d\mu_t \right) dt \end{aligned}$$

を得る. ここで, $d\sigma_t := (t - t_0)^{-2\beta} d\mu_t dt$, および, $\|A(k)\| := \int_{t_0}^{t_1} \int_{A_t(k)} d\sigma_t$ と定義する. また, 正定数 r を

$$r > \begin{cases} \frac{2q-1}{q-1} & (n = 2), \\ \frac{n+2}{2} & (n \geq 3) \end{cases}$$

を満たすように取っておく. このとき, Hölder の不等式を用いることにより,

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{A_t(k)} (z_k)_t^2 d\sigma_t \leq 4\bar{C}(n)B(n, k)^{-\frac{1}{q_0}} \|A(k)\|^{1-\frac{1}{q_0}} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\beta}{t - t_0} + C_{A_0, R_3} \right) \text{vol}(A_t(k))^{1-\frac{1}{r}} \|z_t\|_{L^{2r}(M)}^2 dt$$

を得る. ここで, 不等式の両辺の指数を合わせるため, $\beta = \frac{1}{4}$ と取る. また, 関数 z_t に対して定理 4 を適用することにより

$$\|z_t\|_{L^{2r}(M)}^2 = (t - t_0)^{\frac{1}{2}} \|u_t\|_{L^{2r}(M)}^2 \leq (t - t_0)^{\frac{1}{2}} C(n, 2r)^2 \text{vol}(M_0)^{\frac{n+2r}{nr}} \frac{e^{2(\frac{1}{r} + C_{A_0, R_3})t}}{\Psi_{2r}(t)}$$

が得られる. これらの不等式と, Hölder の不等式より得られる

$$\int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^{-\frac{1}{2}} \text{vol}(A_t(k))^{\frac{r-1}{r}} dt \leq \|A(k)\|^{1-\frac{1}{r}} 2^{\frac{1}{r}} (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2r}},$$

および,

$$\int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^{\frac{1}{2}} \text{vol}(A_t(k))^{\frac{r-1}{r}} dt \leq \|A(k)\|^{1-\frac{1}{r}} \left(\frac{2}{2r+1} \right)^{\frac{1}{r}} (t_1 - t_0)^{1+\frac{1}{2r}}$$

を用いることにより, 不等式評価が以下のように進む:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{A_t(k)} (z_k)_t^2 d\sigma_t & \leq 4\bar{C}(n)C(n, 2r)^2 \text{vol}(M_0)^{\frac{n+2r}{nr}} B(n, k_0)^{-\frac{1}{q_0}} \frac{e^{2(\frac{1}{r} + C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)} (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2r}} \\ & \quad \times 2^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}(t_1 - t_0)}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}} \right) \|A(k)\|^{2-\frac{1}{q_0}-\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

ここで, $\gamma := 2 - \frac{1}{q_0} - \frac{1}{r} (> 1)$ とおく. このとき, $h > k \geq k_0$ を満たす h, k に対して

$$\begin{aligned} |h - k|^2 \|A(h)\| & \leq 4\bar{C}(n)C(n, 2r)^2 \text{vol}(M_0)^{\frac{n+2r}{nr}} B(n, k_0)^{-\frac{1}{q_0}} \frac{e^{2(\frac{1}{r} + C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)} (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2r}} \\ & \quad \times 2^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}(t_1 - t_0)}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}} \right) \|A(k)\|^\gamma \end{aligned}$$

という不等式が成立する. De Girogi の反復補題 ([1]) を用いることにより,

$$\|A(k_0 + d)\| = 0$$

を得る. これは,

$$z_{t_1} \leq k_0 + d \tag{8}$$

を意味している。ただし、 d は

$$d^2 := 4\bar{C}(n)C(n, 2r)^2 \text{vol}(M_0)^{\frac{n+2r}{nr}} B(n, k_0)^{-\frac{1}{q_0}} \frac{e^{2(\frac{1}{r} + C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)} (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2r}} \\ \times 2^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}(t_1 - t_0)}{(2r + 1)^{\frac{1}{r}}} \right) \|A(k_0)\|^{\gamma-1} 2^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

により定義される。

$$\|A(k_0)\| = \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^{-\frac{1}{2}} \int_{A_t(k_0)} d\mu_t dt \leq \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_M d\mu_t \right) dt \leq 2e^{t_1} \text{vol}(M_0) (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}$$

を用いることにより、

$$d^2 \leq \check{C}(n, 2r) B(n, k_0)^{-\frac{1}{q_0}} \text{vol}(M_0)^{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{q_0}} \\ \times \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}(t_1 - t_0)}{(2r + 1)^{\frac{1}{r}}} \right) (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q_0})} \frac{e^{(1-\frac{1}{q_0}+\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)}$$

が得られる。ただし、 $\check{C}(n, 2r) := 4\bar{C}(n)C(n, 2r)^2 2^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} 2^{\gamma-1} 2^{\frac{1}{r}}$ とおいた。

最後に、 t_0 の値で場合分けを行う。 $t_0 \leq 1$ の場合は、 $t_1 = 2t_0$ とおく。 q, q_0, n の関係式は

$$1 - \frac{2}{q_0} + \frac{1}{qq_0} = 0 \quad (n = 2), \quad 1 - \frac{1}{q_0} - \frac{2}{nq_0} = 0 \quad (n \geq 3).$$

である。 $n = 2$ の場合は、

$$B(2, k_0) = 3t_0^{\frac{1}{2}} e^{(1-\frac{1}{q})t_1} \text{vol}(M_0)^{1-\frac{1}{q}}$$

となるので、計算により

$$d^2 \leq 3^{-\frac{1}{q_0}} \check{C}(2, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3} t_0}{(2r + 1)^{\frac{1}{r}}} \right) \text{vol}(M_0) t_0^{-\frac{1}{2qq_0}} \frac{e^{(\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)}$$

を得る。一方、 $n \geq 3$ の場合は、

$$B(n, k_0) = 3t_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{n}t_1} \text{vol}(M_0)^{\frac{2}{n}}$$

となるので、計算により

$$d^2 \leq 3^{-\frac{1}{q_0}} \check{C}(n, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3} t_0}{(2r + 1)^{\frac{1}{r}}} \right) \text{vol}(M_0)^{\frac{2}{n}} t_0^{-\frac{1}{2qq_0}} \frac{e^{(\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)}$$

を得る。したがって

$$d^2 \leq \hat{C}(n, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r + 1)^{\frac{1}{r}}} \right) \text{vol}(M_0)^{\frac{2}{n}} t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{(\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)} \quad (9)$$

を得る。ただし、 $\hat{C}(n, 2r) := 3^{-\frac{1}{q_0}} \check{C}(n, 2r)$ とおいた。

一方、 $1 \leq t_0 < T - 1$ の場合は、 $t_1 = t_0 + 1$ とおく。 $n = 2$ の場合は、

$$B(2, k_0) = 3e^{(1-\frac{1}{q})t_1} \text{vol}(M_0)^{1-\frac{1}{q}}$$

となるので、計算により

$$d^2 \leq 3^{-\frac{1}{q_0}} \check{C}(2, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r + 1)^{\frac{1}{r}}} \right) \text{vol}(M_0) \frac{e^{(\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)}$$

を得る。一方、 $n \geq 3$ の場合は、

$$B(n, k_0) = 3e^{\frac{2}{n}t_1} \text{vol}(M_0)^{\frac{2}{n}}$$

となるので, 計算により

$$d^2 \leq 3^{-\frac{1}{40}} \check{C}(n, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}} \right) \text{vol}(M_0)^{\frac{2}{n}} \frac{e^{(\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)}$$

を得る. したがって,

$$d^2 \leq \hat{C}(n, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}} \right) [\text{vol}(M_0)]^{\frac{2}{n}} \frac{e^{(\frac{1}{r}+2C_{A_0, R_3})t_1}}{\Psi_{2r}(t_0)} \quad (10)$$

を得る. ただし, $\hat{C}(n, 2r) := 3^{-\frac{1}{40}} \check{C}(n, 2r)$ とおいた.

t_1 の選び方から, $t_1 = \min \{2t_0, t_0\}$ を得る. 式 (3), (5), (8), (9), (10) により,

$$\begin{aligned} z_{t_1} &\leq k_0 + d \\ &\leq C'(n) \min \left\{ \left(\frac{t_1}{2} \right)^{\frac{1}{4}}, 1 \right\} \frac{2\sqrt{-c}}{\text{arcsinh} \left(e^{\max \{ \frac{t_1}{2n}, \frac{t_1-1}{n} \}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)} e^{\frac{t_1}{n}} \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} \\ &\quad + \sqrt{\hat{C}(n, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}} \right)} \max \left\{ \left(\frac{t_1}{2} \right)^{-\frac{1}{4}}, 1 \right\} \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} \frac{e^{(\frac{1}{2r}+C_{A_0, R_3})t_1}}{\sqrt{\Psi_{2r}(\max \{ \frac{t_1}{2}, t_1-1 \})}} \end{aligned}$$

を得る. ただし $C'(n)$ は n のみに依存する正定数である. この不等式は, 任意の $t_1 \in [0, T)$ に対して成立する. したがって, z_t の定義式

$$z_t = (t - t_0)^{\frac{1}{4}} u_t$$

により,

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_t w_t} = u_t &\leq C'(n) \frac{2\sqrt{-c}}{\text{arcsinh} \left(e^{\max \{ \frac{t}{2n}, \frac{t-1}{n} \}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right)} e^{\frac{t}{n}} \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} \\ &\quad + \sqrt{\hat{C}(n, 2r) \left(\frac{1}{4} + \frac{C_{A_0, R_3}}{(2r+1)^{\frac{1}{r}}} \right)} \max \left\{ \left(\frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, 1 \right\} \text{vol}(M_0)^{\frac{1}{n}} \frac{e^{(\frac{1}{2r}+C_{A_0, R_3})t}}{\sqrt{\Psi_{2r}(\max \{ \frac{t}{2}, t-1 \})}} \end{aligned}$$

が任意の $t \in [0, T)$ に対して成立する. 補題 3 を用いることにより, 定理が証明される. ■

参考文献

- [1] M. Chipot: *Elliptic equations*, Birkhäuser (2009).
- [2] Q. Ding: *The inverse mean curvature flow in rotationally symmetric spaces*, Chin. Ann. Math., **32** (2011), 27–44.
- [3] C. Gerhardt: *Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres*, J. Differential Geom., **32** (1990), 299–314.
- [4] C. Gerhardt : *Curvature problems*, Series in Geometry and Topology, **39**, International Press (2006).
- [5] C. Gerhardt: *Inverse curvature flows in hyperbolic space*, J. Differential Geom., **89** (2011), 487–527.
- [6] R. S. Hamilton: *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom., **17** (1982), 255–306.
- [7] D. Hoffman & J. Spruck: *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 715–727.
- [8] G. Huisken: *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature*, Invent. Math., **84** (1986), 463–480.

- [9] G. Huisken & T. Ilmanen: *Higher regularity of the inverse mean curvature flow*, J. Differential Geom., **80** (2008), 433–451.
- [10] G. Huisken & A. Polden: *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996), 45–84; Lecture Notes in Math., **1713**, Springer, Berlin (1999).
- [11] N. Koike: *Tubes of non-constant radius in symmetric spaces*, Kyushu J. Math., **56** (2002), 267–291.
- [12] N. Koike: *The mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space with a free group action*, arXiv:math.DG/1210.2539v1 (2012).
- [13] N. Koike & Y. Sakai : *The inverse mean curvature flow in rank one symmetric spaces of non-compact type*, in preparation.
- [14] N. V. Krylov: *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Dordrecht: Reidel (1987).
- [15] J. Simons: *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., **88** (1968), 62–105.
- [16] C. L. Terng & G. Thorbergsson: *Submanifold geometry in symmetric spaces*, J. Differential Geom., **42** (1995), 665–718.
- [17] X. P. Zhu: *Lectures on mean curvature flows*, Studies in Advanced Mathematics, **32**, AMS/IP (2002).