移流項付き平均曲率流の弱解の存在について

高棹 圭介
北海道大学 大学院 理学研究院 数学部門
email:takasao@math.sci.hokudai.ac.jp

1　導入

$\mathbb{R}^n$ 内の超曲面の族 $\{\Gamma(t)\}_{0\le t<\infty}$ が平均曲率流であるとは, その超曲面の速度 V_Γ が以下で表されることである.

$$V_\Gamma = H \qquad \text{on} \qquad \Gamma(t), \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

ここで H は $\Gamma(t)$ の平均曲率ベクトルである. 本研究では, 平均曲率は主曲率を足し合わせたもので定義する.

まず平均曲率流の弱解について既存の結果について一部を紹介する. Brakke は幾何学的測度論を用いて Brakke の平均曲率流と呼ばれる弱解 (Brakke の不等式を満たすバリフォールド) の存在を示した [2]. また Evans-Spruck はレベルセット法を用いて平均曲率流の粘性解と呼ばれる弱解の存在を示した [4]. 同時期に Chen-Giga-Goto は平均曲率流を含む放物型方程式の粘性解の存在を示した [3]. Brakke の平均曲率流とレベルセット法を用いて得る粘性解には関係があり, 殆ど至る所の高さのレベルセットにおける粘性解は Brakke の平均曲率流であることが知られている [4]. 即ち, ある意味では Brakke の弱解のクラスはレベルセット法により得られる弱解を含むといえる.

本研究では以下の移流項付き平均曲率流の Brakke の意味での弱解について考える. $\mathbb{R}^n$ 内の超曲面の族 $\{\Gamma(t)\}_{0\le t<\infty}$ が移流項付き平均曲率流であるとは, その超曲面 $\Gamma(t)$ の速度 V_Γ が以下で表されることである.

$$V_\Gamma = (u\cdot\nu)\nu + H \qquad \text{on} \qquad \Gamma(t), \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

ここで $\nu = (\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^n)$ は $\Gamma(t)$ の単位法線ベクトル, $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ は与えられたベクトル値関数である. 右辺第 1 項を移流項と呼ぶ.

もしある関数 $w = w(x,t)$ が存在して曲面 $\Gamma(t)$ が $\Gamma(t) = \{(x', w(x',t)) \in \mathbb{R}^n \,:\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ とグラフ表示出来たとすれば, (2) と同値な条件として次の準線形放物型偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial_t w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right) + u(x,w,t)\cdot\frac{(-\nabla w, 1)}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}} \tag{3}$$

実際, $\Gamma(t)$ がグラフであることから,

$$\nu = \frac{(-\nabla w, 1)}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}},\ H\cdot\nu = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right),\ V\cdot\nu = \frac{\partial_t w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}$$

が得られる.

本研究の目的は, 任意の空間次元 $n \geq 2$ での弱解の存在と, その正則性の証明である. 先行結果として, Liu-Sato-Tonegawa [9] が空間次元 $n = 2, 3$, $u \in L^p_{loc}([0,\infty);(W^{1,p}(\Omega))^n)$ かつ $p > \frac{n+1}{2}$ での移流項付き平均曲率流の弱解の存在を幾何学的測度論とフェイズフィールド法によって示したことが挙げられる. ここで $\Omega = \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ とした.

2　Brakke の平均曲率流の定義

平均曲率流の弱解の定義にはいくつか方法があるが, 本研究では Brakke による平均曲率流の弱解の定義を採用する. 定義には幾何学的測度論の知識が必要なため, ここであわせて紹介する.

2.1　バリフォールド (varifold, [2, 5, 11] 参照)

$A, B \in \mathbb{R}^{n^2}$ に対し,

$$A : B = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij} \qquad \text{and} \qquad |A| = \sqrt{A:A}$$

とする. $G_k(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元グラスマン多様体と定義する (原点を通る k 次元平面全体の集合と思って差し支えない).

$\mathbb{R}^n$ 上の測度 μ と ν について, 任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\nu(A) = 0$ ならば $\mu(A) = 0$ が成り立つとき $\mu \ll \nu$ (μ は ν に対して絶対連続) と定義する.

定義 2.1 (バリフォールド)**.** *V が $\mathbb{R}^n \times G_k(\mathbb{R}^n)$ 上の Radon 測度であるとき, $V \in \mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n)$ と定義する. このときバリフォールド V の mass measure $\|V\|$ を $\|V\|(A) := V(A \times G_k(\mathbb{R}^n))$ ($A \in \mathbb{R}^n$, A は Borel 集合) で定義する.*

$S \in G_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき S を $\mathbb{R}^n$ から S への正射影と同一視する. この場合 $S = I - (\nu_i\nu_j)$ と表現できる. ただし, I は $n \times n$ 行列の単位行列, ν は S の単位法線ベクトルである.

$V \in \mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n)$ に対して, V の第 1 変分 δV を以下で定義する.

$$\delta V(g) := \int_{\mathbb{R}^n \times G_k(\mathbb{R}^n)} \nabla g(x) : S \, dV(x,S). \tag{4}$$

ここで, $g = (g_1, \ldots, g_n) \in (C^1_c(\mathbb{R}^n))^n$ である (各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $g_i \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$). 任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し $\|\delta V\|(A) := \sup\{\delta V(g) \mid g \in (C^1_c(\mathbb{R}^n))^n, |g| \leq 1, \mathrm{supp}\ g \subset A\}$ として $\|\delta V\|$ を定義する. $\|\delta V\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上の Radon 測度とみなせ, かつ $\|\delta V\| \ll \|V\|$ であると

き, generalized mean curvature vector H (一般化された平均曲率ベクトル) が存在して任意の $g \in (C_c(\mathbb{R}^n))^n$ に対して以下が成り立つ.

$$\delta V(g) = -\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot H(x)\, d\|V\|(x). \tag{5}$$

注意 2.2. $\|\delta V\|$ は一般には測度になるとは限らない. しかし *[11]* の定理 *4.1* より, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\|\delta V\|(K) < \infty$ を満たすならば, $\|\delta V\|$ は測度に拡張でき, その測度に対し殆ど至る所長さ 1 のベクトル値関数 $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が存在して

$$\delta V(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \nu\, d\|\delta V\|$$

が任意の $g \in (C_c(\mathbb{R}^n))^n$ について成り立つ. さらに $\|\delta V\| \ll \|V\|$ である場合は *Radon-Nikodym* の定理から *Radon-Nikodym* 導関数 $\|\delta V\|/\|V\|$ が存在して

$$\delta V(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot \nu \|\delta V\|/\|V\|\, d\|V\|(x)$$

が成り立つ. よって *generalized mean curvature vector* H が存在し, $H = -\nu\|\delta V\|/\|V\|$ となる.

注意 2.3. なめらかな超曲面 $M \subset \mathbb{R}^n$ に対して自然なバリフォールド $V \in V_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ を以下で定めることができる.

$$\int_{\mathbb{R}^n \times G_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \phi(x,S)\, dV(x,S) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, T_x M)\, d\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M(x) \qquad \text{for } \phi \in C_c(\mathbb{R}^n \times G_{n-1}(\mathbb{R}^n)).$$

ここで, $T_x M$ は x における M の接平面, $\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M$ は M に制限された $(n-1)$ 次元ハウスドルフ測度である.

また, M が閉超曲面であるならば, このバリフォールド V に対して (5) を満たす H と M の平均曲率ベクトルは一致する. 即ち H は平均曲率ベクトルの一般化となっている.

2.2 修正可能集合と概接平面

滑らかな曲面を含む広いクラスの集合を平均曲率流の解として捉えるために, 以下の修正可能集合と概接平面を導入する. 大雑把に説明すると, 概接平面とは測度論を用いて定義される接平面の一般化であり, 修正可能集合とは, C^1 級の曲面で近似でき, ほとんど至る所概接平面が存在する集合である.

定義 2.4 (修正可能集合 ([11] 参照))**.** $\mathbb{R}^n$ 内に埋め込まれたある C^1 級 k 次元部分多様体の列 $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在して $\mathcal{H}^k(M \setminus \cup_{i=1}^{\infty} M_i) = 0$ となるとき, $M \subset \mathbb{R}^n$ は k 次元修正可能集合であるとよぶ.

例 2.5. $A_n := \{x : -1/n \le x \le 1/n\} \times \{-1/n, 1/n\} \cup \{-1/n, 1/n\} \times \{x : -1/n \le x \le 1/n\} \in \mathbb{R}^2$ *(*辺の長さが $2/n$ の正方形*)* は 1 次元修正可能集合である. また $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ もまた 1 次元修正可能集合である.

定義 2.6 (概接平面 ([11] 参照)). $M \subset \mathbb{R}^n$ が k 次元修正可能集合であると仮定する. $P \in G_k(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\eta_{x_0,\lambda}(M)} f(y)\,d\mathcal{H}^k(y) = \int_P f(y)\,d\mathcal{H}^k(y)$$

がすべての $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ について成り立つとき, P を M に対し x_0 における概接平面とよぶ. ここで $\eta_{x_0,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}(x-x_0)$ とした. 特に M に x_0 における接平面が存在する場合, それは概接平面と一致する. さらに, $\mathbb{R}^n$ 上の *Radon* 測度 μ に対しても以下のように概接平面を定義する. $\mu_{x_0,\lambda}(A) = \lambda^{-k}\mu(x+\lambda A)$ $(A \subset \mathbb{R}^n)$ とする. $P \in G_k(\mathbb{R}^n)$ が x_0 における μ の概接平面であるとは, ある定数 $\theta(x_0)$ が存在して

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,d\mu_{x_0,\lambda}(y) = \theta(x_0)\int_P f(y)\,d\mathcal{H}^k(y)$$

が任意の $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ について成り立つときである.

注意 2.7. $M \subset \mathbb{R}^n$ が k 次元修正可能集合かつ $\mathcal{H}^k(M) < \infty$ であるとき, $\mathcal{H}^k$-*a.e.* で概接平面が存在する. この事実により, 注意 2.3 の議論を, M を修正可能集合に置き換えることができる. つまり, 修正可能集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ と *Radon* 測度 $\mu = \theta\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M$ $(\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M))$ に対して自然なバリフォールド $V \in V_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ を以下で定めることができる.

$$\int_{\mathbb{R}^n\times G_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \phi(x,S)\,dV(x,S) = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x,T_x\mu)\,d\mu(x) \qquad for\ \phi \in C_c(\mathbb{R}^n\times G_{n-1}(\mathbb{R}^n)). \tag{6}$$

ここで, $T_x\mu$ は x における μ の概接平面であり, この場合 $T_x\mu$ は x における M の概接平面と一致している. また, $\mu = \|V\|$ である. 一方, バリフォールド $V \in \mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n)$ に対し修正可能集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ と *Radon* 測度 $\mu = \theta\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M$ $(\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M))$ が存在して (6) が成り立つとき V を *rectifiable varifold,* 特に θ の値域が $\mathbb{N}$ に含まれるとき *integral varifold* とよぶ. *Radon* 測度 μ に対しても修正可能集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $\mu = \theta\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M$ $(\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M))$ となるとき, *rectifiable* とよぶ *(integral* も同様*).*

2.3 移流項付き平均曲率流の弱解の定義 ([2, 9] 参照)

ここでは平均曲率流の弱解の定義とそのモチベーションについて説明する. $\{\Gamma(t)\}_{t\ge 0}$ は滑らかであり速度 V で動く曲面であると仮定する. このとき任意の $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対し以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)} \phi\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Gamma(t)} (-H\phi + \nabla\phi)\cdot V\,d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{7}$$

この事実を, 簡単のため $\Gamma(t)$ がグラフであると仮定して示す. ある関数 $w = w(x,t)$ が存在して曲面 $\Gamma(t)$ が $\Gamma(t) = \{(x', w(x',t)) \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ とグラフ表示出来たと仮定する. この証明では便宜上 $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, $\nabla = (\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_{n-1}})$, $D = (\nabla, \partial_{x_n})$, $v = V\cdot\nu$,

$h = H\cdot\nu$ とおく. 部分積分より

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)}\phi(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\phi(x',w(x',t))\sqrt{1+|\nabla w(x',t)|^2}\,dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_{x_n}\phi\partial_t w\sqrt{1+|\nabla w|^2} + \phi\frac{\nabla w\cdot\nabla\partial_t w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\,dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\partial_{x_n}\phi\sqrt{1+|\nabla w|^2} - \phi\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\Big) - \nabla(\phi(x',w))\cdot\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\Big)\partial_t w\,dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\partial_{x_n}\phi\sqrt{1+|\nabla w|^2} - \phi h - (\nabla\phi+\partial_{x_n}\phi\nabla w)\cdot\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\Big)v\sqrt{1+|\nabla w|^2}\,dx' \\
&= \int_{\Gamma(t)}\Big(-\phi h + D\phi\cdot\frac{(-\nabla w,1)}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\Big)v\,d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_{\Gamma(t)}(-H\phi + D\phi)\cdot V\,d\mathcal{H}^{n-1}
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで $d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \sqrt{1+|\nabla w(x',t)|^2}\,dx'$, $\nu = \frac{(-\nabla w,1)}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}$, $h = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right)$, $v = \frac{\partial_t w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}$ を使った.

□

次に V は (2) を満たすと仮定する. これより, 任意の $t>0$ と任意の $\phi\in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対し

$$
\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)}\phi\,d\mathcal{H}^{n-1} \le \int_{\Gamma(t)}(-H\phi+\nabla\phi)\cdot\{H+(u\cdot\nu)\nu\}\,d\mathcal{H}^{n-1} \tag{8}
$$

が成り立つ. また, この式を少し弱めた形

$$
\limsup_{s\to t}\frac{\int_{\Gamma(t)}\phi\,d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Gamma(s)}\phi\,d\mathcal{H}^{n-1}}{t-s} \le \int_{\Gamma(t)}(-H\phi+\nabla\phi)\cdot\{H+(u\cdot\nu)\nu\}\,d\mathcal{H}^{n-1} \tag{9}
$$

も成り立つ. (8), (9) は Brakke の不等式とよばれ, この不等式を一般化した形で弱解を定義する. (8) は等号で成り立つが, 次の事実から不等号としてある.

命題 2.8. $\{\Gamma(t)\}_{t\ge 0}$ が滑らかであると仮定する. このとき (2) と (8) は同値である.

証明. (2) から (8) は明らか. 逆を証明しよう. 曲面 $\Gamma(t)$ の速度を V とする. $V = H + (u\cdot\nu)\nu$ であることを示せばよい. (7) と (8) より,

$$
0 \le \int_{\Gamma(t)}(-H\phi+\nabla\phi)\cdot\{H+(u\cdot\nu)\nu - V\}\,d\mathcal{H}^{n-1} \tag{10}
$$

が得られる. $\phi\ge 0$ を満たす $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を一つ固定する. さらに $\phi_r(x) = r^{-n+2}\phi(x/r)$ と定義する. 任意の $x_0\in\Gamma(t)$ を一つ固定する. (10) の $\phi(x)$ に $\phi_r(x-x_0)$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_{\Gamma(t)}(-H\phi_r(x-x_0) + \nabla\phi_r(x-x_0))\cdot\{H+(u\cdot\nu)\nu - V\}\,d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\to \int_{T_{x_0}}\nabla\phi\,d\mathcal{H}^{n-1}\cdot\{H+(u\cdot\nu)\nu - V\}\Big|_{x=x_0} \qquad \text{as } r\downarrow 0
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで T_{x_0} は x_0 における $\Gamma(t)$ の接平面とした．ϕ は任意であったため, $\int_{T_{x_0}} \nabla\phi\, d\mathcal{H}^{n-1} = -\{H+(u\cdot\nu)\nu - V\}\Big|_{x=x_0}$ となるものを選べば任意の $x\in\Gamma(t)$ に対し

$$0 \le -|H+(u\cdot\nu)\nu - V|^2$$

となり $V = H+(u\cdot\nu)\nu$ を得る．よって (2) と (8) は同値である． □

μ を $\mathbb{R}^n$ 上の Radon 測度, $u\in (W^{1,2}(\Omega))^n$, $\phi\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^+)$ とする．ある $(n-1)$ 次元修正可能集合 M とある関数 $\theta : M\to\mathbb{N}$ に対して $\mu = \theta\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_M$ を満たし, μ から自然に定義されるバリフォールドに対する generalized mean curvature vector H が存在して $H\in (L^2(\mu))^n$ を満たし, $\sup_{r\in(0,\frac{1}{2}),x\in\Omega}\frac{\mu(B_r(x))}{\omega_{n-1}r^{n-1}} < \infty$ であるとき

$$\mathcal{B}(\mu,u,\phi) := \int_\Omega (-\phi H + \nabla\phi)\cdot\{H+(u\cdot\nu)\nu\}\, d\mu$$

と定義する．それ以外は $\mathcal{B}(\mu,u,\phi) := -\infty$ と定義する．ここで $L^2(\mu) = \{f : \int |f|^2\, d\mu < \infty\}$, $B_r(x) := \{y\in\mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, ω_{n-1} は $(n-1)$ 次元単位球の体積とした．

本研究では, Brakke の弱解を以下で定義する (論文によって定義が異なることが多い事に注意).

定義 2.9 (弱解の定義)**.** *$T>0$, Γ_0 を $(n-1)$ 次元修正可能集合とする．バリフォールドの族 $\{V_t\}_{0\le t\le T}\in \mathbf{V}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ に対し以下が成り立つとき $\{V_t\}_{0\le t\le T}$ を, Γ_0 を初期値とする Brakke の移流項付き平均曲率流という:*

1. *$\|V_0\| = \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma_0}$ かつ任意の $t\in[0,T]$ に対し $\|V_t\|$ は Radon 測度である．さらに a.e. t に対し以下が成り立つ．V_t は integral, 即ちある関数 $\theta_t : \mathbb{R}^n\to\mathbb{N}$ と $(n-1)$ 次元修正可能集合 $\Gamma(t)$ が存在して $\|V_t\| = \theta_t\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma(t)}$ が成り立つ．さらに V_t は generalized mean curvature vector H を持つ.*

2. *(Brakke の不等式)*

$$\int_{\Gamma(t)}\phi\, d\|V_t\|\Big|_{t=t_1}^{t_2} \le \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{B}(\|V_t\|, u(\cdot,t),\phi)\, dt \tag{11}$$

が任意の t_1,t_2 $(0\le t_1 < t_2\le T)$ と任意の $\phi\in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対して成り立つ.

注意 2.10. *θ_t は多重度 (multiplicity) と呼ばれ, 曲面の多重度を表す関数である.*

注意 2.11. *次の平均曲率流の古典解について Brakke の弱解を考察する.*

$R>0$, $r(t) = \sqrt{R^2-2(n-1)t}$ $(t\in[0,\frac{R^2}{2(n-1)}])$, $\Gamma(t) = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| = r(t)\}$ $(t\in[0,\frac{R^2}{2(n-1)}])$ とおく．このとき $\{\Gamma(t)\}_{t\in[0,\frac{R^2}{2(n-1)})}$ は平均曲率流 $(u=0)$ の古典解になっている ($t=\frac{R^2}{2(n-1)}$ では $\Gamma(t)$ は 1 点となるため V が定義できないことに注意)．さらに時刻 $t > \frac{R^2}{2(n-1)}$ における $\Gamma(t)$ を $\Gamma(t) = \emptyset$ で定義する．このとき $\{\Gamma(t)\}_{t\ge0}$ から自然に定義されるバリフォールド $\{V_t\}_{t\ge0}$ が Brakke の弱解になっていることを確かめる．まず, $t\in(0,\frac{R^2}{2(n-1)})$ では古典解であるから

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)}\phi\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Gamma(t)}(-H\phi + \nabla\phi)\cdot H\, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{12}$$

が任意の $t \in (0, \frac{R^2}{2(n-1)})$ と任意の $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対して成り立つ．よって, 任意の t_1, t_2 $(0 \le t_1 < t_2 < \frac{R^2}{2(n-1)})$ と $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対して, $\|V_t\| = \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma(t)}, u = 0$ として (11) が成り立つ．また, $s \ge \frac{R^2}{2(n-1)}$ のときは, $V_s = 0$ として

$$\int_{\Gamma(t)} \phi \, d\|V_t\| \Big|_{t=s} = 0, \ \int_{\frac{R^2}{2(n-1)}}^{s} \mathcal{B}(\|V_t\|, 0, \phi)\, dt = 0 \tag{13}$$

が任意の $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対して成り立つ．(12),(13) より任意の $0 \le t_1 < t_2 < \infty$ と $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対して (11) が成り立つ．

3 主結果

ここでは, 移流項付き平均曲率流の弱解の存在と正則性について得られた結果を述べる ([12] 参照). 次の結果は [9] の拡張である．

定理 3.1. *$n \ge 2$, $q > 2$, $p > \frac{n}{2} \cdot \frac{q}{q-1}$, $\Omega = \mathbb{T}^n$ とする．$n = 2$ のときはさらに $p \ge \frac{4}{3}$ を仮定する．*

$$u \in L^q_{loc}([0,\infty);(W^{1,p}(\Omega))^n)$$

とし, $\Omega^+(0) \subset \Omega$ は C^1 級の境界 Γ_0 を持つと仮定する．このときバリフォールドの族 $\{V_t\}_{t\in[0,\infty)}$ と $\varphi \in BV_{loc}(\Omega \times [0,\infty)) \cap L^\infty_{loc}([0,\infty);BV(\Omega)) \cap C^{\frac{1}{2}}_{loc}([0,\infty);L^1(\Omega))$ が存在して以下が成り立つ:

(a) Γ_0 を初期値とする *Brakke* の移流項付き平均曲率流の大域解 $\{V_t\}_{0\le t<\infty}$ が存在する．さらに $\mathcal{B}(\|V_t\|, u(\cdot,t), \phi) \in L^1_{loc}([0,\infty))$ が成り立つ．

(b) 関数 φ は以下を満たす．

   (1) $\varphi(\cdot,t) = \pm 1$ *a.e. on* Ω がすべての $t \in [0,\infty)$ に対して成り立ち,

   (2) $\varphi(\cdot,0) = \chi_{\Omega^+(0)} - \chi_{\Omega\setminus\Omega^+(0)}$ *a.e. on* Ω,

   (3) $\mathrm{spt}\,|\nabla \chi_{\{\varphi(\cdot,t)=1\}}| \subset \mathrm{spt}\,\|V_t\|$ がすべての $t \in [0,\infty)$ に対して成り立つ．

(c) ある時刻 $T_1 = T_1(\|u\|_{L^q([0,1];(W^{1,p}(\Omega))^n)}, \Omega^+(0), n, p, q) \le 1$ が存在して $\|V_t\|$ は *a.e.* $t \in [0,T_1]$ で *unit density* を持つ．即ち $\theta_t \equiv 1$ *a.e.* $t \in [0,T_1]$．さらに, $|\nabla\chi_{\{\varphi(\cdot,t)=1\}}| = \|V_t\|$ が *a.e.* $t \in [0,T_1]$ について成り立つ．

注意 3.2. 解の構成方法には *Allen-Cahn* 方程式の解の特異極限を用いる (フェイズフィールド法)．定理 3.1 の φ がその極限に対応する．*(c)* は, ラフにいうと “初期時刻から少しの間は曲面同士が重ならない” ということを表している．

定理 3.3. 定理 3.1 の $\{V_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は以下を満たす*:*

1. 任意の t_1, t_2 $(0 \le t_1 < t_2 < \infty)$ と任意の $\phi \in C^3(\Omega \times [0,\infty);\mathbb{R}^+)$ に対して

$$\|V_{t_2}\|(\phi) - \|V_{t_1}\|(\phi) \le \int_{t_1}^{t_2} \Big(\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}(\cdot,t)\, d\|V_t\| \Big) + \mathcal{B}(\|V_t\|, u(\cdot,t), \phi(\cdot,t))\, dt \tag{14}$$

が成り立つ．

2. すべての $T>0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\Omega,0<r<\frac{1}{2}} \frac{\|V_t\|(B_r(x))}{\omega_{n-1}r^{n-1}} < \infty$$

が成り立つ.

注意 3.4. 定理 3.1 の初期値の $\Gamma_0 = \partial\Omega^+(0)$ の正則性は C^1 よりも弱くすることができる. 定理 3.1 と定理 3.3 の結論は以下の Γ_0 についても同様に成り立つ:

$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_0) < \infty$ とし, C^3 級の境界 Γ_0^i を持つ領域の列 $\Omega^+(0)^i$ が存在して

$$\begin{gathered}\sup_{i\in\mathbb{N},0<r<\frac{1}{2},x\in\Omega} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B_r(x)\cap\Gamma_0^i)}{\omega_{n-1}r^{n-1}},\\ \lim_{i\to\infty}\mathcal{L}^n(\Omega^+(0)\triangle\Omega^+(0)^i) = 0,\\ \lim_{i\to\infty}|\nabla\chi_{\Omega^+(0)^i}| = |\nabla\chi_{\Omega^+(0)}| \qquad \textit{as measures}\end{gathered} \tag{15}$$

を満たす. さらに, 定理 3.1 の *(c)* を示すには

$$\sup_{0<r<R,x\in\Omega} \frac{|\nabla\chi_{\Omega^+(0)}|(B_r(x))}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \leq 1 + o(R) \tag{16}$$

の仮定をすれば十分である.

注意 3.5. 弱解の正則性については, *Kasai-Tonegawa* の結果を用いることによって示すことができる *[8]*. これは, ラフに言うと "殆ど至る所の点 $x\in\Gamma(t)$ についてその近傍で $\Gamma(t)$ が $C^{1,\alpha}$ 級曲面" となる結果である.

定理 3.6. $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ は定理 3.1 のものとする.

(1) ある開集合 $U\in\Omega$ と区間 (t_1,t_2) が存在して, *a.e.* $t\in(t_1,t_2)$ について $\|V_t\|$ が U 上で *unit density* が成り立つと仮定する. このとき *a.e.* $t\in(t_1,t_2)$ に対し $\mathcal{H}^{n-1}(G_t)=0$ を満たすある閉集合 $G_t\subset U$ が存在して $(U\cap \mathrm{spt}\,\|V_t\|)\setminus G_t$ は $C^{1,\zeta}$ 級である. ここで ζ は $p<n$ のとき $\zeta = 2-\frac{n}{p}-\frac{2}{q}$, $p\geq n$ のときは任意の $\zeta\in(0,1-\frac{2}{q})$ とした.

(2) ある定数 $T_2>0$ が存在してすべての $t\in(0,T_2)$ に対して $\mathrm{spt}\,\|V_t\|$ は $C^{1,\zeta}$ 級である.

(3) u が以下を満たすと仮定する.

$$\sup_{\Omega\times[0,T]}|u| + \sup_{x,y\in\Omega,0\leq t_1<t_2\leq T} \frac{|u(x,t_1)-u(y,t_2)|}{\max\{|x-y|^\alpha, |t_1-t_2|^{\alpha/2}\}} < \infty \qquad \textit{for all } 0<T<\infty.$$

このとき (1) と (2) の $C^{1,\zeta}$ を $C^{2,\alpha}$ に変えても成り立つ.

4 証明の方針

主定理についての詳しい証明は省くが, 証明の方針や, 証明に必要な手法などについて幾つか述べる. 以下, この章では簡単のため $u\equiv 0$ と仮定する.

4.1　フェイズフィールド法

まずは Allen-Cahn 方程式の解の特異極限によって平均曲率流を近似するフェイズフィールド法 [7] を紹介する．$T \in (0,\infty)$, $W = W(s) = \frac{(1-s^2)^2}{2}$ とする (double-well potential). 点列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ は $\varepsilon_i \searrow 0$ $(i \to \infty)$ を満たすと仮定する．関数 $\varphi_0^{\varepsilon_i}$ は次を満たすものとする．$\partial\Omega^+(0) = \Gamma(0)$ とする．このとき符号付き距離関数 r を次で定める．

$$r(x) := \begin{cases} \mathrm{dist}(x,\Gamma(0)) \text{ on } \Omega^+(0), \\ -\mathrm{dist}(x,\Gamma(0)) \text{ on } (\Omega^+(0))^c. \end{cases} \tag{17}$$

$\bar{r}$ を r のなめらかな近似とする．このとき $\varphi_0^{\varepsilon_i}(x) = \tanh\left(\frac{\bar{r}(x)}{\varepsilon_i}\right)$ と定義する．$\varphi_{tx_j}^{\varepsilon_i}, \varphi_{x_jx_kx_l}^{\varepsilon_i} \in C(\Omega \times (0,T))$, $1 \le j,k,l \le n$ を満たす $\{\varphi^{\varepsilon_i}\}_{i=1}^{\infty}$ を以下の Allen-Cahn 方程式の解とする:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi^{\varepsilon_i} = \Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \varepsilon_i^{-2} W'(\varphi^{\varepsilon_i}) \qquad \text{on } \Omega \times (0,T), \\ \varphi^{\varepsilon_i}(x,0) = \varphi_0^{\varepsilon_i}(x) \qquad \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{18}$$

注意 4.1. 1 次元の (18) の定常解として $\varphi^{\varepsilon_i}(x,t) = \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon_i}\right)$ が存在する．このことと *Allen-Cahn* 方程式の性質から, (18) の解 φ^{ε_i} は曲面から離れた所では $\varphi^{\varepsilon_i} \approx \pm 1$, 曲面の ε_i 近傍では $|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}| \approx \frac{C}{\varepsilon_i}$ となることが予想される．ラフに言うと, (18) の解 φ^{ε_i} は, 平均曲率流の曲面 $\Gamma(t)$ に幅 ε_i の厚みを与えて $\Gamma(t)$ を近似していることになる．また, $\Gamma(t)$ の単位法線ベクトルの近似 ν_{ε_i} と平均曲率ベクトルの近似 H_{ε_i} を

$$\nu_{\varepsilon_i} = \frac{\nabla\varphi^{\varepsilon_i}}{|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|}, \qquad H_{\varepsilon_i} = \frac{\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i^2}}{|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|}\nu_{\varepsilon_i}$$

で与えることができる *[7]*.

ここで, 平均曲率流の弱解の定義に現れる Radon 測度 $\|V_t\| =: \mu_t$ の近似を以下で与える．

$$d\mu_t^{\varepsilon_i} := \sigma^{-1}\Big(\frac{\varepsilon_i|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2}{2} + \frac{W(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i}\Big)\,dx.$$

ここで, $\sigma = \int_{-1}^{1}\sqrt{2W(s)}\,ds$ とおいた．さらに, $\mu_t^{\varepsilon_i}$ に対応したバリフォールドを

$$V_t^{\varepsilon_i}(\phi) = \int \phi(x, (\nabla\varphi^{\varepsilon_i}(x))^{\perp})\,d\mu_t^{\varepsilon_i}(x), \qquad \phi \in C_c(\mathbb{R}^n \times G_{n-1}(\mathbb{R}^n);\mathbb{R})$$

で定義する．ここで, $(\nabla\varphi^{\varepsilon_i}(x))^{\perp} \in G_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ と $\|V_t^{\varepsilon_i}\| = \mu_t^{\varepsilon_i}$ に注意．フェイズフィールド法では, この近似 $\mu_t^{\varepsilon}, V_t^{\varepsilon}$ を用いて, (18) の性質から Brakke の不等式 (11) 等を示すことになる．

次に, 実際にこの測度 μ_t^{ε} が (多重度を除けば) ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma(t)}$ の近似となっていることを簡単な場合について説明する．以下, $\Gamma(t) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ とする (仮定の $u \equiv 0$ と $\Gamma(t)$ の平均曲率は 0 であることから, $\Gamma(t)$ は (2) の定常解とみなせる)．このとき, (18) の定常解として $\varphi^{\varepsilon}(x,t) = \tanh(\frac{x_1}{\varepsilon})$ が存在する．正の数 δ, l に対して $A = [-\delta,\delta] \times [-\frac{l}{2},\frac{l}{2}]^{n-1}$ と定義する．このとき, 以下が成り立つ．

命題 4.2. 任意の $\delta, l > 0$ に対して

$$\mu_t^{\varepsilon}(A) \to \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma(t)}(A) = l^{n-1} \qquad \textit{as } \varepsilon \to 0.$$

証明. まず, φ^ε の定義より $\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} = \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}$ を得る (一般には成り立たないことに注意). よって $s = \varphi^\varepsilon(x_1)$ と変数変換を行うと

$$\begin{aligned}\mu_t^\varepsilon(A) &= \sigma^{-1}\int_A \frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\,dx = l^{n-1}\sigma^{-1}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\delta,\delta]}\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}(\varphi^\varepsilon)'\,dx_1\\ &= l^{n-1}\sigma^{-1}\int_{-1}^{1}\chi_{[-\delta,\delta]}(\varepsilon\tanh(s))\sqrt{2W(s)}\,ds\\ &\to l^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma(t)}(A) \qquad \text{as } \varepsilon\to 0\end{aligned}$$

が成り立つ. □

4.2 単調性公式

次に単調性公式と呼ばれる次の評価を紹介する. まず準備として,

$$\rho = \rho_{(y,s)}(x,t) = \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}}, \qquad t<s,\ x,y\in\mathbb{R}^n$$

と定義する. ρ は backward heat kernel と呼ばれる. まず, 次の Huisken の単調性公式を紹介する.

命題 4.3 (単調性公式 (Monotonicity formula)([6] 参照))**.** $\Gamma(t)$ は滑らかな平均曲率流, 即ち (1) を満たすと仮定する. 任意の $0<t<s<\infty$ に対して以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)}\rho\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) \le -\int_{\Gamma(t)}\rho\Big(\Big(H+\frac{x-y}{2(s-t)}\Big)\cdot\nu\Big)^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x) \le 0. \tag{19}$$

注意 4.4. t を s に近づけたとき $\rho = \rho_{(y,s)}(x,t)$ は y を含む $(n-1)$ 次元平面上の y に対する δ 関数に近づく (これは, y を含む $(n-1)$ 次元平面が $\{x_n = 0\}$ と仮定すると, $d\mathcal{H}^{n-1} = dx'$, $(x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$ であることと, $\int_{\{x_n=0\}}\rho\,dx' = 1$ であることからわかる). よって,

$$\int_{\Gamma(t)}\rho\,d\mathcal{H}^{n-1} \to 1 \qquad as\ t\to s \tag{20}$$

が得られる. 一方で, $y\notin\Gamma(s)$ であるならば,

$$\int_{\Gamma(t)}\rho\,d\mathcal{H}^{n-1} \to 0 \qquad as\ t\to s$$

が成り立つ. よって

$$\int_{\Gamma(t)}\rho\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) < 1$$

を満たす $t\in[0,s)$ が存在すれば, (19) と (20) より $y\notin\Gamma(s)$ を得る.

このことから, 単調性公式は曲面の台の評価に有用であることが分かる.

一方, $\{\mu_t^{\varepsilon_i}\}_{t\ge 0}$ に対する (19) と類似した以下の評価を得ることができる.

命題 4.5 (Monotonicity formula, ε-version)([7, 9] 参照))**.** 任意の $i \geq 1$ と $0 < t < s < \infty$ に対して以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, d\mu_t^{\varepsilon_i}(x) \leq \frac{1}{2(s-t)} \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, d\xi_t^{\varepsilon_i}. \tag{21}$$

ここで

$$d\xi_t^\varepsilon = \Big(\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \Big) \, dx$$

とおいた.

証明.

$$e_\varepsilon = \frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}, \ L = \varphi_t^\varepsilon = \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

と定義する. 部分積分により

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, d\mu_t^\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n} \{ e_\varepsilon \rho_t - \varepsilon L (\nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon + \rho L) \} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ e_\varepsilon \rho_t - \varepsilon \rho \Big(L + \frac{\nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon}{\rho} \Big)^2 + \varepsilon \Big(L \nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon + \frac{(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon)^2}{\rho} \Big) \Big\} \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ e_\varepsilon \rho_t + \varepsilon \Big(L \nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon + \frac{(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon)^2}{\rho} \Big) \Big\} \, dx \end{aligned} \tag{22}$$

が成り立つ. さらに部分積分より

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon L \nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} -\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \otimes \nabla \varphi^\varepsilon : \nabla^2 \rho + e_\varepsilon \Delta \rho \, dx \tag{23}$$

が得られる. また, 関数 ρ は以下の式を満たす:

$$\rho_t + \Delta \rho = -\frac{\rho}{2(s-t)}, \qquad \rho_t + \Delta \rho - \frac{\nabla \varphi^\varepsilon \otimes \nabla \varphi^\varepsilon}{|\nabla \varphi^\varepsilon|^2} : \nabla^2 \rho + \frac{(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi^\varepsilon)^2}{\rho |\nabla \varphi^\varepsilon|^2} = 0. \tag{24}$$

以上より, (23) と (24) を (22) に代入することにより, (21) を得る. □

注意 4.6. 測度 ξ_t^ε は *discrepancy measure* と呼ばれる. $u \equiv 0$ のとき, $\xi_t^\varepsilon \leq 0$ を示すことができる (移流項 u がある場合は ξ_t^ε の評価は困難である). このことより, (21) の右辺は非正値となり, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, d\mu_t^{\varepsilon_i}(x)$ の t に関する単調減少が得られる.

4.3 Upper density bound

単調性公式等により, 以下の評価を得ることができる.

命題 4.7. ある $N \geq 1$ が存在して次が成り立つ. すべての $T > 0$ に対してある $D > 0$ が存在して

$$\sup_{t \in [0,T], x \in \Omega, 0 < r < \frac{1}{2}, i \geq N} \frac{\mu_t^{\varepsilon_i}(B_r(x))}{\omega_{n-1} r^{n-1}} < D$$

が成り立つ.

証明は, [7] 及び [9] 等を参照されたい. 特に [9] ではこの評価が Brakke 解の存在証明の鍵となっている.

4.4 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ の構成

$\mu_t^{\varepsilon_i}$ を用いて μ_t を構成する場合, 測度のコンパクト性から各 $t>0$ に対してある測度 μ_t が存在して $\mu_t^{\varepsilon_{i_j}} \to \mu_t$ $(j\to\infty)$ を満たす部分列 $\{\varepsilon_{i_j}\}$ を取ることはできる．しかしそれだけでは任意の $t>0$ に対して $\mu_t^{\varepsilon_{i_j}} \to \mu_t$ $(j\to\infty)$ を満たす部分列 $\{\varepsilon_{i_j}\}$ を取ることは困難である．次の補題は, $\mu_t^{\varepsilon_i}$ の性質を用いてその極限となる μ_t が構成できることを示したものである．(ii) はテクニカルな証明でありやや難解なためここに詳細な証明を添えた．

補題 4.8 ([7] 参照)**.** すべての $T>0$ に対してある $D>0$ が存在して

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\Omega,0<r<\frac{1}{2},i\geq N} \frac{\mu_t^{\varepsilon_i}(B_r(x))}{\omega_{n-1}r^{n-1}} < D$$

が成り立つと仮定する．このとき以下が成り立つ．

(i) 任意の $i\geq N$ と $\phi\in C_c^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ に対して, $\mu_t^{\varepsilon_i}(\phi)-CDt$ が t に関して単調減少となる, ある定数 $C=C(\phi)>0$ が存在する．ここで $\mu_t^{\varepsilon_i}(\phi)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi\,d\mu_t^{\varepsilon_i}$ とした．

(ii) $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ のある部分列 $\{\varepsilon_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ に対してある $\mathbb{R}^n$ 上の *Radon* 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在し, すべての $t\geq 0$ に対して, $\mu_t^{\varepsilon_{i_j}} \to \mu_t$ $(j\to\infty)$, 即ち任意の $\phi\in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対して $\mu_t^{\varepsilon_{i_j}}(\phi)\to\mu_t(\phi)$ $(j\to\infty)$.

証明. まず (i) を示す．部分積分により次を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mu_t^\varepsilon(\phi) &= \int \varepsilon\phi\Big(\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\nabla\varphi_t^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\varphi_t^\varepsilon\Big)\,dx \\
&= \int \varepsilon\phi\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)\varphi_t^\varepsilon\,dx - \int \varepsilon(\nabla\phi\cdot\nabla\varphi^\varepsilon)\varphi_t^\varepsilon\,dx \\
&= -\int \varepsilon\phi\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)^2 dx - \int \varepsilon(\nabla\phi\cdot\nabla\varphi^\varepsilon)\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)\,dx \\
&\leq -\int \varepsilon\phi\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\varphi^\varepsilon}{2\phi}\Big)^2 dx + \int \varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2\frac{|\nabla\phi|^2}{4\phi}\,dx \\
&\leq -\int \varepsilon\phi\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\varphi^\varepsilon}{2\phi}\Big)^2 dx + C\mu_t^\varepsilon(\operatorname{supp}\phi) \\
&\leq CD(\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi))^{n-1}.
\end{aligned} \tag{25}$$

以上より (i) が示された．平均値の定理より $\sup|\nabla^2\phi|$ にのみ依存する定数 $C>0$ が存在して $\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}<C$ となることに注意したい．

次に (ii) を示す．$B_1\subset[0,\infty)$ を可算かつ稠密な集合とする．対角線論法と Radon 測度のコンパクト性より, 部分列 $\{\varepsilon_i\}_{i\geq 1}$ と Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\in B_1}$ が存在して $\mu_t^{\varepsilon_i}\to\mu_t$ $(i\to\infty)$ がすべての $t\in B_1$ に対して成り立つ．$\{\phi_k\}_{k\geq 1}\subset C_c(\mathbb{R}^n:\mathbb{R}^+)$ を稠密な集合とする．

仮定より, すべての $k\geq 1$ に対して集合 $E_k\subset[0,\infty)$ が存在して

$$\lim_{t\nearrow s,t\in B_1}\mu_t(\phi_k) = \lim_{t\searrow s,t\in B_1}\mu_t(\phi_k) \tag{26}$$

がすべての $s\in[0,\infty)\setminus E_k$ に対して成り立つ．$B_2=[0,\infty)\setminus\cup_k E_k$ とおく．このとき B_2 は cocountable(可算集合の補集合) かつ (26) がすべての $k\geq 1$ と $s\in B_2$ について成り立つ．

任意の $s \in B_2 \setminus B_1$ をとる．Radon 測度のコンパクト性より, 部分列 $\{\varepsilon_{i_j}\}_{j\geq 1}$ と Radon 測度 μ_s が存在して $\mu_s^{\varepsilon_{i_j}} \to \mu_s$ $(j \to \infty)$ が成り立つ．次にこの μ_s は一意に決まりかつ $\mu_s^{\varepsilon_i} \to \mu_s$ $(i \to \infty)$ であることを示す．仮定より, すべての $k \geq 1$, $i \geq N$, t_1, t_2 $(t_1 < s < t_2)$ に対し

$$\mu_{t_1}^{\varepsilon_i}(\phi_k) - C(t_1 - s) \geq \mu_s^{\varepsilon_i}(\phi_k) \geq \mu_{t_2}^{\varepsilon_i}(\phi_k) - C(t_2 - s)$$

が成り立つ．よってすべての $t_1, t_2 \in B_1$ $(t_1 < s < t_2)$ に対し

$$\mu_{t_1}(\phi_k) - C(t_1 - s) \geq \mu_s(\phi_k) \geq \mu_{t_2}(\phi_k) - C(t_2 - s)$$

が得られる．よって (26) により $\mu_s(\phi_k) = \lim_{t \nearrow s, t \in B_1} \mu_t(\phi_k) = \lim_{t \searrow s, t \in B_1} \mu_t(\phi_k)$ が任意の $k \geq 1$ について成り立つ．よって μ_s は一意に定まる．さらに, $\mu_s^{\varepsilon_{i_j}}$ が収束先を持つ任意の部分列 $\{\varepsilon_{i_j}\}_{j\geq 1}$ の極限は一意である．よって $\mu_s^{\varepsilon_i} \to \mu_s$ $(i \to \infty)$ が成り立つ．

以上から $\mu_t^{\varepsilon_i} \to \mu_t$ $(i \to \infty)$ が任意の $t \in B_1 \cup B_2$ について成り立つ．$[0, \infty) \setminus (B_1 \cup B_2)$ は可算集合であることに注意すると, Radon 測度のコンパクト性と対角線論法からある部分列 $\{\varepsilon_{i_j}\}_{j\geq 1}$ が存在して $\mu_t^{\varepsilon_{i_j}} \to \mu_t$ $(i \to \infty)$ が任意の $t \in [0, \infty)$ について成り立つことが示せる． □

注意 4.9. $\|V_t\| = \mu_t$ かつ $V_t^{\varepsilon_i} \to V_t$ を満たす, $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ に対応するバリフォールド $\{V_t\}_{t\geq 0}$ の存在も示すことができる *[7, 12]*.

4.5 Vanishing of $\xi_t^{\varepsilon_i}$

ここでは discrepancy measure$\xi_t^{\varepsilon_i}$ に関する結果を述べる．

定理 4.10 ([7, 9, 12])**.**

$$\xi_t^{\varepsilon_i} \to 0 \qquad \text{as } i \to \infty \qquad a.e.\ t \geq 0.$$

この結果はラフにいうと, $\frac{\varepsilon_i |\nabla \varphi^{\varepsilon_i}|^2}{2} \approx \frac{W(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i}$ を表している．

4.6 Rectifiability of μ_t

Brakke の弱解の構成のためには, Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ が rectifiable であること, 即ち $(n-1)$ 次元修正可能集合の族 $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ と関数 $\theta_t : \Gamma(t) \to [0, \infty)$ $(t \geq 0)$ が存在して $\mu_t = \theta_t \mathcal{H}^{n-1} \lfloor_{\Gamma(t)}$ であることを示す必要がある．証明には以下の定理を使う．

定理 4.11 (The rectifiability theorem [1])**.** V を $\mathbb{R}^n \times G_k(\mathbb{R}^n)$ 上のバリフォールドとし, $\|\delta V\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上の測度とする．そのとき

$$V \lfloor \Big(\{x \mid \theta^{*k}(\|V\|, x) > 0\} \times G_k(\mathbb{R}^n) \Big) \in \mathbf{RV}_k(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．ここで

$$\theta^{*k}(\|V\|, a) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\|V\|(B_r(a))}{\omega_k r^k}$$

とした．

4.7 Brakke の不等式

この章の最後に, Brakke の不等式の証明について述べる．ここでは以下の定理を用いる．$n \geq 4$ の場合にも直接 (18) の性質を用いて同様の結果を導くことができる．

定理 4.12 ([10] 参照)**.** $n = 2, 3$ とする．任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$$\liminf_{i\to\infty}\Big(\mu^{\varepsilon_i}(U) + \varepsilon_i \int_U \Big(\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i^2}\Big)^2 dx\Big) < \infty$$

と $\lim_{i\to\infty}\mu_t^{\varepsilon_i} = \mu_t$ が満たされていると仮定する．このときある関数 $\theta_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}$ と $(n-1)$ 次元修正可能集合 $\Gamma(t)$ が存在して $\mu_t = \theta_t \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma(t)}$ *(*即ち μ_t は *integral)* と

$$\int_U |H|^2\,d\mu_t \leq \liminf_{i\to\infty}\varepsilon_i \int_U \Big(\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i^2}\Big)^2 dx$$

が成り立つ．ここで H は $\Gamma(t)$ の *generalized mean curvature vector* である．

注意 4.13. この定理の仮定は *upper density bound* と (25) の計算 *(*$\phi = 1$ とする*)* より

$$\mu_t^{\varepsilon_i}(U) \leq D\omega_{n-1}(diam\,(U))^{n-1}, \ \int_0^T \varepsilon_i \int_U \Big(\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i^2}\Big)^2 dxdt \leq \mu_0^{\varepsilon_i}(\Omega) < \infty$$

であることからわかる．また, H_{ε_i} の定義と $\varepsilon_i|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2\,dx \approx (\frac{\varepsilon_i|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2}{2} + \frac{W(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i})\,dx = d\mu_t^{\varepsilon_i}$ から

$$\varepsilon_i \int_U \Big(\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i^2}\Big)^2 dx = \int_U |H_{\varepsilon_i}|^2 \varepsilon_i |\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2\,dx \approx \int_U |H|^2\,d\mu_t$$

となることがわかる．

命題 4.14. 任意の $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ と $t_1, t_2 \geq 0$ $(t_1 < t_2)$ に対して *Brakke* の不等式

$$\int_\Omega \phi\,d\mu_t\Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (-\phi H + \nabla\phi)\cdot H\,d\mu_t dt \tag{27}$$

が成り立つ．

証明. 定理 4.12 より, (25) と同様の計算から

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi\,d\mu_t^{\varepsilon_i}\Big|_{t=t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \varepsilon\phi^{\varepsilon_i}\Big(\nabla\varphi^{\varepsilon_i}\cdot\nabla\varphi_t^{\varepsilon_i} + \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon^2}\varphi_t^{\varepsilon_i}\Big)\,dxdt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \varepsilon\phi\Big(-\Delta\varphi^{\varepsilon_i} + \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon^2}\Big)\varphi_t^{\varepsilon_i}\,dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \varepsilon(\nabla\phi\cdot\nabla\varphi^{\varepsilon_i})\varphi_t^{\varepsilon_i}\,dxdt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \varepsilon\phi\Big(\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon^2}\Big)^2 dxdt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \varepsilon(\nabla\phi\cdot\nabla\varphi^{\varepsilon_i})\Big(\Delta\varphi^{\varepsilon_i} - \frac{W'(\varphi^{\varepsilon_i})}{\varepsilon^2}\Big)\,dxdt \\
&\leq -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \phi|H|^2\,d\mu_t dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla\phi\cdot H_{\varepsilon_i}\varepsilon|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2\,dxdt
\end{aligned} \tag{28}$$

が得られる. ここで

$$\int_\Omega \nabla\phi\cdot H_{\varepsilon_i}\varepsilon|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2\,dx \to \int_\Omega \nabla\phi\cdot H\,d\mu_t \qquad \text{as } i\to\infty \tag{29}$$

の事実を用いると

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi\,d\mu_t\Big|_{t=t_1}^{t_2} &\le -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \phi|H|^2\,d\mu_t dt + \lim_{i\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla\phi\cdot H_{\varepsilon_i}\varepsilon|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2\,dxdt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \phi|H|^2\,d\mu_t dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla\phi\cdot H\,d\mu_t dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (-\phi H+\nabla\phi)\cdot H\,d\mu_t dt\end{aligned} \tag{30}$$

が得られる. よって (27) が示せた. (29) の証明は, フォーマルには

$$\int_\Omega \nabla\phi\cdot H_{\varepsilon_i}\varepsilon|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}|^2\,dx \approx \int_\Omega \nabla\phi\cdot H_{\varepsilon_i}\,d\mu_t^{\varepsilon_i} \to \int_\Omega \nabla\phi\cdot H\,d\mu_t \qquad \text{as } i\to\infty$$

と示せるが, 厳密な証明はここでは省略する. □

4.8 補足

$\theta_t\in\mathbb{N}$ a.e. t の証明について, Liu-Sato-Tonegawa [9] では [10] の結果 (定理 4.12) を用いている. しかし, 移流項がある場合についても [13] を参考にして任意の $n\ge 2$ に対して示すことができる. これが本研究の目標である [9] の結果の拡張について最も重要なポイントである. 重要な事実として, $\theta_t\in\mathbb{N}$ を仮定すると, $\mathcal{H}^{n-1}$-a.e. $x\in\Gamma(t)$ における generalized mean curvature vector H が概接平面 $T_x\mu_t$ に直交することが知られている [2]. これは Brakke の不等式を示すために必要なバリフォールドの性質の一つである.

また, 平均曲率流の数値シミュレーションソフトとして Brakke の作成した "The Surface Evolver" がある (参照 URL:http://www.susqu.edu/brakke/). 詳細については Brakke の個人ホームページを参照されたい. また, このソフトで計算された Grain growth の数値シミュレーションの動画を手に入れることができる.

参考文献

[1] Allard, W., *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 417–491.

[2] Brakke, K. A., *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1978).

[3] Chen, Y.-G., Giga, Y. and Goto, S., *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geom. **33** (1991), no.3, 749–786.

[4] Evans, L. C. and Spruck, J., *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 3, 635–681.

[5] Federer, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, (1969).

[6] Huisken, G., *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom., **31** (1990), no.1, 285–299.

[7] Ilmanen, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), no.2, 417–461.

[8] Kasai, K. and Tonegawa, Y., *A general regularity theory for weak mean curvature flow*, Preprint, arXiv:1111.0824.

[9] Liu, C., Sato, N. and Tonegawa, Y., *On the existence of mean curvature flow with transport term*, Interfaces Free Bound., **12** (2010), no.2, 251–277.

[10] Röger, M. and Schätzle, R., *On a modified conjecture of De Giorgi*, Math. Z. **254** (2006), no. 4, 675–714.

[11] Simon, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3** (1983).

[12] Takasao, K. and Tonegawa, Y., *Existence and regularity of mean curvature flow with transport term in higher dimensions*, arXiv:1307.6629.

[13] Tonegawa, Y., *Integrality of varifolds in the singular limit of reaction-diffusion equations*, Hiroshima Math. J. **33** (2003), no.3, 323–341.