対称空間の全測地的曲面について

法政大学・理工学部 間下克哉

2009 年 09 月 08 日

研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」

既約対称空間の，曲率が 0 でない全測地的曲面の分類を考える．

A 型の対称空間

型	空間	θ
AI	$SU(n)/SO(n)$	$\theta(g) = \tau \circ g \circ \tau$
AII	$SU(2n)/Sp(n)$	$\theta(g) = J \circ \tau \circ g \circ (J \circ \tau)^{-1}$
$AIII$	$SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$	$\theta(g) = I_{p,q} \circ g \circ I_{p,q}$

ただし，τ は $\mathbf{C}^N$ の $\mathbf{R}^N$ に関する共役線形写像，$\tau(x_1, \cdots, x_n) = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)$ で，

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \qquad I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

のうちの AI 型および $AIII$ 型についての結果を述べる．

1 $SU(2)$ の複素既約表現

準備として $SU(2)$ の複素既約表現について復習しておく．

$SU(2)$ のリー環の複素化の基底 H, X, Y を

$$[H, X] = X, \quad [H, Y] = -Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たすようにとる．

命題 1 V を $SU(2)$ の $d+1$-次元複素既約表現とし，$\langle , \rangle$ を V 上の $SU(2)$-不変エルミット内積とする．$e_0 \in V$ を H の最大固有値 λ に対する固有ベクトルとする．このとき $\lambda = d$ であり，$Y^i \cdot e_0$ は H の $\lambda - 2i$ に対する固有ベクトルである．e_i を，$\frac{1}{\|Y^i \cdot e_0\|} Y^i \cdot e_0$ に絶対値が 1 の適当な複素数をかけたベクトルとするとき H, X, Y の e_0，$\cdots$，e_d に関する表現行列は以下のようになる．

$$H = \begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & c'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c'_d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{ただし} \quad c'_i = \overline{c_i}, \quad \|c_i\| = \sqrt{i(d-i+1)}.$$

2　全測地的曲面の分類

G をコンパクトリー群，θ を G の対合的自己同型とする．$\mathfrak{l}$ を L のリー環とし，

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\} \\ \mathfrak{p} &= \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\}\end{aligned}$$

とおく．

$\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{g}$ の 3 次元リー部分環で

$$X_1 \in \mathfrak{k}, \quad X_2,\ X_3 \in \mathfrak{p}, \quad [X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2} \tag{1}$$

を満たす基底を持つものとする．

古典型の対称対の対合的自己同型は，体 K 上のベクトル空間 K^N の線形変換 F により $\theta(X) = F \circ X \circ F^{-1}$ と表される．U を $\mathfrak{u}$ が生成するリー部分群とし，K^N を U 不変既約部分空間の直和に分解する．このとき，直和成分 V をとると $F(V)$ も U-不変だから

$$V \cap F(V) = V \quad \text{or} \quad \{0\}$$

となる．

古典型既約対称空間について，次が成り立つことが，個別の議論で示せる．

命題 2 U を G の 3 次元リー部分群で，リー環 $\mathfrak{u}$ が (1) を満たす基底を持つものとする．U の K^N への作用の不変既約部分空間による直交直和分解

$$K^N = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

で，各成分 V_i が F ー不変であるものが存在する．

3　AI 型

定理 3 $M = U/(U \cap SO(N))$ を $SU(N)/SO(N)$ の正の定曲率を持つ *2* 次元全測地的部分多様体とする．U による $\mathbf{C}^N$ の既約分解

$$\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{N_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}^{N_k} \oplus \mathbf{C} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C} \quad (N_1 \geq \cdots \geq N_k > 1)$$

の各既約成分は $\mathbf{R}^N$ に関する共役線形写像で不変である．U のリー環の元 $X_1,\ X_2,\ X_3$ を

$$\begin{aligned}&[X_1,\ X_2] = 2X_3,\ [X_2,\ X_3] = 2X_1,\ [X_3,\ X_1] = 2X_2 \\ &\tau \circ X_1 = X_1 \circ \tau,\ \tau \circ X_2 = -X_2 \circ \tau,\ \tau \circ X_3 = -X_3 \circ \tau\end{aligned}$$

を満たすものとする．このとき X_i の $\mathbf{C}^{N_i}$ への制限は，$d = N_i - 1$ とおくとき

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{d}\,G_{12} + \sqrt{2(d-1)}\,G_{23} + \cdots + \sqrt{d-2}\,G_{d-1,d} \pm \sqrt{d}\,G_{d,d+1} \\ X_2 &= i\,(d\,E_{11} + (d-2)\,E_{22} + \cdots + (-d+2)\,E_{d,d} + (-d)\,E_{d+1,d+1}) \\ X_3 &= i\left(\sqrt{d}\,T_{12} + \sqrt{2(d-1)}\,T_{23} + \cdots + \sqrt{d-2}\,T_{d-1,d} \pm \sqrt{d}\,T_{d,d+1}\right)\end{aligned}\right.$$

ただし E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他は 0 である行列とし，$G_{ij} = E_{ij} - Eji,\ T_{ij} = E_{ij} + Eji$ とする．

証明の概略

前半（すなわち命題 2) の証明は省略する．

G の $\mathbf{C}^n$ への作用は既約である，X_1, X_2, X_3 が (1) を満たすものとする．

$\mathfrak{k} = \mathrm{Skew}(n;\mathbf{R})$，$\mathfrak{p} = i\mathrm{Sym}(n;\mathbf{R})$ に注意する．

$H = -iX_2 \in \mathrm{Sym}(n;\mathbf{R})$ の固有値を $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ とすれば，$Ad(SO(n))$ の作用により $H = \mathrm{Diag}(a_1, a_2,\ \cdots, a_n)$ としてよい．

a_i はウェイト，e_i はウェイトベクトルであり

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \cdots = a_{n-1} - a_n = 2$$

である．

$$X = \frac{1}{2}(X_1 + iX_3), \quad Y = \frac{1}{2}(-X_1 + iX_3),$$

は

$$[H, X] = X, \quad [H, Y] = -Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たす．命題 1 により，X, Y の成分は符号を除いて定まる．

$h = \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \quad (\varepsilon_1 = \pm 1)$ の随伴作用により，X，Y の成分をできる限り非負化する． ■

4 $AIII$ 型

U を，$G = SU(p+q)$ の対合的自己同型

$$\theta(g) = I_{p,q} \circ g \circ I_{p,q}$$

で不変な 3 次元単純リー部分群とする．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p+q), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{su}(p) + \mathfrak{su}(q) + \mathbf{R}$$

とし，U のリー環の基底 X_1, X_2, X_3 を (1) を満たす，すなわち

$$\begin{aligned} &I_{p,q} \circ X_1 = X_1 \circ I_{p,q}, \quad I_{p,q} \circ X_i = -X_i \circ I_{p,q}\ (i = 2, 3) \\ &[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2} \end{aligned}$$

を満たすものとする．

命題 2 の証明の概略を，$AIII$ 型の場合について示す．

$\mathbf{C}^{p+q}$ を U-既約複素部分空間の直交直和に分解する

$$\mathbf{C}^{p+q} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

このとき $V_i \cap I_{p,q}(V_i) = \{0\}$ or V_i である．

$V_i \cap I_{p,q}(V_i) = \{0\}$ となる i に対して $V_i = V$ とおく．

$H = -iX_1$ の随伴作用により V をウェイト空間に分解する．

$H|_V = -i\ X_1|_V$ のウェイト $n-1, n-3, \cdots, -n+1$ に属する，長さが 1 のウェイトベクトル $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ をとって

$$\begin{aligned} V' &= \mathbf{C}u_0 \oplus \mathbf{C}v_1 \oplus \cdots \\ V'' &= \mathbf{C}v_0 \oplus \mathbf{C}u_1 \oplus \cdots \end{aligned}$$

ただし

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + (-1)^i I_{p,q} e_i), \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + (-1)^i I_{p,q} e_i)$$

とおけば，V' および V'' は U 既約で $V' = I_{p,q}V'$，$V'' = I_{p,q}V''$ を満たす． ■

G の3次元単純リー部分群 U は $\mathbf{C}^{p+q}$ に既約に働くとし，

$$H = -iX_1,\ X = \frac{1}{2}(X_3 + iX_2),\ Y = \frac{1}{2}(-X_3 + iX_2)$$

とおく．

$Ad(S(U(p) \times U(q)))$ により

$$H = \mathrm{Diag}(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_q)$$

ただし $a_1 > \cdots > a_p,\ b_1 > \cdots > b_q$ と仮定してよい．$\{a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q\}$ は H のウェイトである．ここで $a_1 > b_1$，即ち a_1 は最高ウェイトである，とする．

H のウェイト λ に属するウェイトベクトル v_λ が，$I_{p,q}v_\lambda = v_\lambda$ を満たせば λ は $a_1, \cdots, a_p$ のいずれかであり，$I_{p,q}v_\lambda = -v_\lambda$ を満たせば λ は $b_1, \cdots, b_q$ のいずれかであることに注意すると次がわかる．

- e_1 はウェイト a_1 に属するウェイトベクトルである．
- $I_{p,q} \circ Y = -Y \circ I_{p,q}$ だから，$Y \cdot e_1$ はウェイト b_1 に属するウェイトベクトルである．
- 同様に $Y^2 \cdot e_1$ は，ウェイト a_2 に属するウェイトベクトル．
- $\cdots$

定理 4 (1)　$M = U/(U \cap SO(N))$ を $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$ の正の定曲率を持つ *2* 次元全測地的部分多様体とする．U による $\mathbf{C}^N$ の既約分解

$$\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{N_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}^{N_k} \oplus \mathbf{C} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C} \quad (N_1 \geq \cdots \geq N_k > 1)$$

の各既約成分を $I_{p,q}$ 不変となるようにとることができる．

(2)　U が $\mathbf{C}^{p+q}$ に既約に働くとする．

このとき $|p-q| \leq 1$ である．以下 $p \geq q$ とする．

$X_1,\ X_2,\ X_3$ を

$$[X_1,\ X_2] = 2X_3,\ [X_2,\ X_3] = 2X_1,\ [X_3,\ X_1] = 2X_2$$
$$\tau \circ X_1 = X_1 \circ \tau,\ \tau \circ X_2 = -X_2 \circ \tau,\ \tau \circ X_3 = -X_3 \circ \tau$$

を満たすものとし

$$H = -iX_1,\ X = \frac{1}{2}(X_3 + iX_2),\ Y = \frac{1}{2}(-X_3 + iX_2)$$

とおく．$\mathbf{C}^{p+q}$ の適当な正規直交基底をとれば，H，X，Y はつぎのようになる．[1]

$$\begin{cases} H &= \mathrm{Diag}(d, \cdots, *; d-2, \cdots, *) \\ X &= \sqrt{d}\,E_{1,p+1} + \sqrt{2(d-1)}\,E_{p+1,2} + \cdots + * \\ Y &= \sqrt{d}\,E_{p+1,1} + \sqrt{2(d-1)}\,E_{2,p+1} + \cdots + * \end{cases}$$

ただし $d = p+q-1$ とおいた．

[1] $p-q$ が 0 のときと 1 のときとで H, X, Y の形が変わるが，細部を省略した．

例 5 ($SU(5)/S(U(3)\times U(2))$ **の Lie triple system**)

$$X_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & -2\,i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6}\,i & -\sqrt{6}\,i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\,i \\ \hline -2\,i & -\sqrt{6}\,i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}\,i & -2\,i & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X_3 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -2 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5　GI 型

研究集会（2009 年 9 月 8 日）終了後，古典型の既約対称空間の曲率が 0 でない全測地的曲面の分類は完成した．

例外型では，$G_2/SO(4)$ について次のことは容易にわかる．

命題 6 $G_2/SO(4)$ には正の定曲率を持つ *2* 次元全測地的部分多様体が少なくとも 4 種ある。

$$I \quad \left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & -G_{23}+G_{45} \\ X_2 & = & -G_{25}+G_{34} \\ X_3 & = & -G_{24}+G_{53} \end{array}\right.$$

$$II \quad \left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & G_{23}+G_{45}-2G_{76} \\ X_2 & = & G_{25}+G_{34}-2G_{61} \\ X_3 & = & G_{24}+G_{53}-2G_{17} \end{array}\right.$$

$$III \quad \left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & -2G_{12}+2G_{65} \\ X_2 & = & -2G_{27}+2G_{63} \\ X_3 & = & -2G_{53}+2G_{17} \end{array}\right.$$

$$IV \quad \left\{\begin{array}{lll} X_1 & = & 4_{32}+2G_{54}-6G_{76} \\ X_2 & = & \sqrt{6}(G_{37}+G_{26}-2G_{15})+\sqrt{10}(G_{42}-G_{35}) \\ X_3 & = & \sqrt{6}(G_{63}+G_{27}-2G_{41})+\sqrt{10}(G_{25}-G_{34}) \end{array}\right.$$

$G_2/SO(4)$ の曲率が 0 でない全測地的曲面は上の 4 種で尽くされていることが Klein [1] によって示されている．

参考文献

[1] Sebastian Klein, *Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2*, arXiv:0809.1319.