Absolutely area-minimizing cones over some minimal submanifolds in the spheres *

酒井 高司 （首都大学東京）

$\mathbb{R}^n$ 内における一般化された Plateau 問題は，幾何学的測度論により肯定的に解決されている．しかし，Plateau 問題の解となる部分多様体は一般には特異点をもつ．ここでいう部分多様体とはカレントの範囲で考える．そこで，体積最小な部分多様体上にはどのような特異点が現れるかというのは興味深い問題である．特に，最も単純な特異点として錐形特異点について調べたい．部分多様体上の特異点を調べるために，まずその接モデルとなる接錐を調べることは自然な考え方であろう．球面内の極小部分多様体に対して，その上の錘を考えるとこれは Euclid 空間内の極小錘となる．したがって，これらが体積最小であるかを判定することが問題となる．本稿では部分多様体の体積最小性を示すための二つの方法を紹介し，これらにより面積最小錐の例を具体的に構成する．

まず，一つ目は面積非増加レトラクションを用いる手法である．対称 R 空間は球面に標準的に極小で埋め込まれる．広橋-菅野-田崎 [4] は面積非増加レトラクションを具体的に構成することによって，B 型の制限ルート系をもつ対称対の s 表現の軌道として得られる対称 R 空間上の錘のいくつかが面積最小となることを示した．また，Lawlor [10] は球面内の極小部分多様体上の錘が面積最小となるための判定法を与えている．Kerckhove [9] は Lawlor による判定法を用いて，A 型の制限ルート系をもつ対称対の s 表現の孤立軌道として得られる対称 R 空間上の錘のいくつかが面積最小となることを示した．さらに，菅野 [7] は同様の方針で，古典型の対称 R 空間上の錘のいくつかについて面積最小性を示した．しかし，Lawlor による判定法は微分不等式の数値評価を用いる．対称 R 空間の他にも s 表現の軌道として球面内の極小部分多様体が数多く得られる．例えば，全ての孤立軌道は極小である．これら s 表現の極小軌道上の錘のいくつかについては，広橋-菅野-田崎による面積非増加レトラクションの構成法を用いて，面積最小性をもつことを示すことができる．

二つ目の方法はキャリブレーションを用いる手法である．余体積量 1 の閉微分形式をキャリブレーションと呼ぶ．よく知られているように，キャリブレートされた部分多様体はホモロジー類内で体積最小になる．Calabi-Yau 多様体には複素体積形式の実部をとることによってキャリブレーションが与えられ，それによってキャリブレートされた部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ．Riemann 多様体 $\widetilde{M}$ の余接束 $T^*\widetilde{M}$ には自然にシンプレクティック構造が入り，$\widetilde{M}$ の部分多様体 M の余法束 N^*M は $T^*\widetilde{M}$ の Lagrange 部分多様体になる．Harvey-Lawson [3] は $\mathbb{R}^n$ 内の部分多様体 M の余法束 N^*M が $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は M が $\mathbb{R}^n$ の austere 部分多様体であることを示した．井川-田崎-S [6] により s 表現の軌道で球面内の austere 部分多様

*本研究は科学研究費補助金 若手研究 (B) 20740044 の助成を受けたものである．

体になるものを分類した．これらの austere 軌道上の錐は $\mathbb{R}^n$ 内の austere 錐になり，したがって，その余法束として $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 錐が得られる．また，Stenzel [11] は階数 1 のコンパクト対称空間の余接束に余等質性 1 の Calabi-Yau 計量を構成している．Karigiannis-Min-Oo [8] は Harvey-Lawson による余法束の方法の類似として，S^n 内の部分多様体 M の余法束 N^*M が T^*S^n の Stenzel 計量に関する特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は M が T^*S^n の austere 部分多様体であることを示した．したがって，s 表現の austere 軌道の余法束として T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体が得られる．

1　面積非増加レトラクション

$\mathbb{R}^n$ 内の単位球面 S^{n-1} の部分多様体 M に対して，M 上の錘 C_M を次で定義する．

$$C_M = \{tx \mid x \in M,\ 0 \le t\} \subset \mathbb{R}^n$$

M 上の錘 C_M を単位球面 S^{n-1} で切り取った内部を C_M^1 で表す．つまり，

$$C_M^1 = \{tx \mid x \in M,\ 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

である．C_M^1 が M を境界とする全てのカレントの中で体積が最小であるとき，錘 C_M は面積最小であると言う．

V と W を計量ベクトル空間とし，$n := \dim W \le \dim V$ であるとする．線形写像 $F : V \to W$ について

$$JF = \sup\{\|F(u_1) \wedge \cdots \wedge F(u_n)\|\}$$

と定義する．ここで $u_1, \ldots, u_n$ が V の正規直交系全てを動いたときの上限を取っている．F が全射でない場合 $JF = 0$ となり，F が全射の場合 $(\ker F)^\perp$ の任意の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ について

$$JF = \|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)\|$$

となる．

$\widetilde{M}$ を Riemann 多様体とし，M をその部分多様体（特異点を許す）とする．$\widetilde{M}$ から M への可微分写像 Φ で，Φ の M への制限が恒等写像になるものを可微分レトラクションと呼ぶ．可微分レトラクション $\Phi : \widetilde{M} \to M$ が各点 $x \in \widetilde{M}$ において

$$J(d\Phi_x) \le 1$$

を満たすとき，Φ は面積非増加であると言う．

命題 1.1 M を $\mathbb{R}^n$ 内の単位球面 S^{n-1} のコンパクト部分多様体とする．このとき，面積非増加レトラクション $\Phi : \mathbb{R}^n \to C_M$ が存在すれば，M 上の錘 C_M は面積最小である．

証明： N を M を境界とする $\mathbb{R}^n$ 内の任意のカレントとする．$C_M^1 \subset \Phi(N)$ となるので

$$\mathrm{Vol}(C_M^1) \le \mathrm{Vol}(\Phi(N))$$

となる．N の正規直交枠 $e_1, \ldots, e_n$ をとると

$$\mathrm{Vol}(\Phi(N)) = \int_N \|d\Phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\| d\mu_N \leq \int_N J(d\Phi_x) d\mu_N \leq \int_N d\mu_N = \mathrm{Vol}(N).$$

よって

$$\mathrm{Vol}(C_M^1) \leq \mathrm{Vol}(\Phi(N)) \leq \mathrm{Vol}(N)$$

となり，C_M は面積最小であることが示された．

2　s 表現の軌道

(G, K) をコンパクト対称対とする．G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表すと，$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

と標準分解される．このとき，コンパクト対称空間 G/K の原点 o における接空間は自然に $\mathfrak{m}$ と同一視され，G/K の線形イソトロピー表現は G の随伴表現による $\mathfrak{m}$ 上への K の作用と同値になる．したがって，$H \in \mathfrak{m}$, $\|H\| = 1$ に対して，H を通る K 軌道を $\mathrm{Ad}(K)H$ と表す．K の $\mathfrak{m}$ への作用は直交表現であるから，$\mathrm{Ad}(K)H$ は $\mathfrak{m}$ 内の単位超球面 S の部分多様体になる．

$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり固定する．$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{m}$ の部分空間 $\mathfrak{m}_\lambda$ を

$$\mathfrak{m}_\lambda = \{X \in \mathfrak{m} \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定める．$R = \{\lambda \in \mathfrak{a} \mid \mathfrak{m}_\lambda \neq \{0\}\}$ によって $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の制限ルート系 R を定める．R の基本系 F をとり，F に関する正の制限ルート全体の集合を R_+ と表す．

$$\mathcal{C} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in F)\}$$

によって定まる $\mathfrak{a}$ の凸領域 $\mathcal{C}$ は一つの Weyl 領域となり，その閉包は次で与えられる．

$$\bar{\mathcal{C}} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle \geq 0 \ (\alpha \in F)\}.$$

このとき

$$\mathrm{Ad}(K)\bar{\mathcal{C}} = \mathfrak{m}.$$

となり，任意の $H \in \mathfrak{m}$ に対して，軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ は $\bar{\mathcal{C}}$ と一点で直交する．ゆえに，超球面 S への K 作用の軌道空間は $S \cap \bar{\mathcal{C}}$ と同一視することができる．つまり，軌道の起点として H は $S \cap \bar{\mathcal{C}}$ からとっているとしてよい．また，$S \cap \bar{\mathcal{C}}$ の元を指定することで軌道を指定することができる．

任意の部分集合 $\Delta \subset F$ に対して

$$\mathcal{C}^\Delta = \{H \in \bar{\mathcal{C}} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in \Delta), \ \langle \beta, H \rangle = 0 \ (\beta \in F - \Delta)\}$$

とおく．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 2.1 (1) $\Delta_1 \subset F$ に対して，

$$\overline{\mathcal{C}^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} \mathcal{C}^{\Delta}$$

は直和になる．特に，$\bar{\mathcal{C}} = \bigcup_{\Delta \subset F} \mathcal{C}^{\Delta}$ は直和になる．

(2) $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$ について，$\Delta_1 \subset \Delta_2$ であることと $\mathcal{C}^{\Delta_1} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta_2}}$ となることは同値である．

$H \in \mathfrak{m}$ に対して

$$Z_K^H = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H\}$$

とおく．Z_K^H は K の閉部分群になり，H を通る軌道は $\mathrm{Ad}(K)H \cong K/Z_K^H$ と等質空間表示される．また，$\Delta \subset F$ に対して

$$Z_K^{\Delta} = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)|_{\mathcal{C}^{\Delta}} = 1\}$$

とおくと，Z_K^{Δ} は K の閉部分群になる．このとき，$\Delta \subset F$ と $H \in C^{\Delta}$ に対して

$$Z_K^{\Delta} = Z_K^H \tag{2.1}$$

が成り立つ．

各 $\alpha \in F$ に対して次の条件を満たす $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ をとる．

$$\begin{aligned} \langle \alpha, H_\alpha \rangle &= 1, \\ \langle \beta, H_\alpha \rangle &= 0 \quad (\forall \beta \in F - \{\alpha\}). \end{aligned}$$

このとき，任意の $\Delta \subset F$ について

$$\mathcal{C}^{\Delta} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Delta} t_\alpha H_\alpha \;\middle|\; t_\alpha > 0 \right\}$$

となる．

$$R_+^{\Delta} = R_+ \cap (F - \Delta)_{\mathbf{Z}}$$

とおくと，任意の $H \in \mathcal{C}^{\Delta}$ について

$$R_+^{\Delta} = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, H \rangle = 0\}$$

が成り立つ．

補題 2.1 より，超球面 S への K 作用の軌道空間は

$$S \cap \bar{\mathcal{C}} = \bigcup_{\Delta \subset F} (S \cap \mathcal{C}^{\Delta})$$

と層分解される．また，(2.1) より，$\Delta \subset F$ として $H_1, H_2 \in \Delta$ とすると $Z_K^{H_1} = Z_K^{\Delta} = Z_K^{H_2}$ となり，$\mathrm{Ad}(K)H_1$ と $\mathrm{Ad}(K)H_2$ は同じ軌道型になる．つまり，各層においてすべての軌道は微分同型なる．さらに，$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset F$ として $H_1 \in \Delta_1, H_2 \in \Delta_2$ とすると，$\mathcal{C}^{\Delta_1} \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta_2}}$ であるから，$Z_K^{H_1} = Z_K^{\Delta_1} \supset Z_K^{\Delta_2} = Z_K^{H_2}$ となる．したがって，軌道空間の内点 $S \cap \mathcal{C}$ に位

置する軌道は主軌道になる．$\Delta \subset F$ が小さい集合になり退化した層になるほどイソトロピー群が大きくなる，つまり，軌道は退化し特異軌道になる．このようにして，s 表現の軌道については軌道型の階層化が得られる．

s 表現の軌道で超球面内の極小部分多様体になるものについては次の結果が知られている．

定理 2.2 (広橋-Song-高木-田崎 [5]) 部分集合 $\Delta \subset F$ に対して，$H \in \mathcal{C}^{\Delta}$ が唯一つ存在して $\mathrm{Ad}(K)H$ は S の極小部分多様体となる．特に，Δ が一つの元だけからなる部分集合であるとき，$\mathrm{Ad}(K)H$ は孤立した軌道型であるから極小部分多様体となる．

定義 2.3 (Harvey-Lawson [3]) $\widetilde{M}$ を Riemann 多様体，M を $\widetilde{M}$ の部分多様体とする．M の各点の各法ベクトル ξ に対して M の形作用素 A_ξ の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，M を austere 部分多様体という．

定義から明らかに austere 部分多様体は極小部分多様体になる．また，2 次元場合，つまり曲面の場合は極小であることと austere であることは同値である．

Austere 部分多様体の定義は形作用素の対称性に着目しているので部分多様体の無限小対称性を表していると言うことができる．論文 [6] では austere 部分多様体のもつ対称性を大域化し，弱鏡映部分多様体の概念を定義した．

定義 2.4 $\widetilde{M}$ を Riemann 多様体，M を $\widetilde{M}$ の部分多様体とする．各点 $x \in M$ における各法ベクトル $\xi \in N_xM$ に対して次の条件を満たす $\widetilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在するとき，M を弱鏡映部分多様体という．

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M. \tag{2.2}$$

σ_ξ を法ベクトル ξ に関する M の鏡映と呼ぶ．

Riemann 多様体 $\widetilde{M}$ の対合的等長変換 σ の固定点集合の連結成分 M を鏡映部分多様体という．このとき，σ は任意の点 $x \in M$ における任意の法ベクトル $\xi \in N_xM$ に対して条件 (2.2) をみたす．したがって，鏡映部分多様体は弱鏡映部分多様体である．

これらの部分多様体のクラスについて次の包含関係が成り立つ．

命題 2.5 　鏡映 $\subset$ 弱鏡映 $\subset$ austere $\subset$ 極小

論文 [6] において，既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって球面内の弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体になるものを分類した．定理にあるルートの表記は [2] に従う．

定理 2.6 ([6]) 既約コンパクト対称対の s 表現の軌道であって，超球面内の austere 部分多様体になるものは次のものに限られる．

(1) 制限ルートに対応するベクトルを通る軌道

(2) 制限ルート系が A_2 型の場合の $2e_1 - e_2 - e_3$，$e_1 + e_2 - 2e_3$ を通る軌道

(3) 制限ルート系が A_3 型の場合の $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ を通る軌道

(4) 制限ルート系が D_l 型の場合の e_1 を通る軌道

(5) 制限ルート系が D_4 型の場合の $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$ を通る軌道

(6) 制限ルート系が B_2 型であり重複度が一定値である場合の $e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ を通る軌道 (主軌道)

(7) 制限ルート系が G_2 型の場合の $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ を通る軌道 (主軌道)

さらに，(1)∼(5) は超球面内の弱鏡映部分多様体になる．(6), (7) は弱鏡映にならない austere 軌道である．

3　s 表現の孤立軌道上の錐の面積最小性

ここでは，前節の準備のもとで s 表現の軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ 上の錐 $C_{\mathrm{Ad}(K)H}$ への面積非増加レトラクションの構成について議論する．これにより，s 表現の孤立軌道上の錐のいくつかについて面積最小性を示すことができる．

命題 3.1 (広橋-菅野-田崎 [4]) $f : \bar{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

(1) $f(tH) = t \quad (t \geq 0)$,

(2) $\Delta' \not\supset \Delta$ なる任意の $\Delta' \subset F$ について $f|_{\mathcal{C}^{\Delta'}} \equiv 0$

を満たす $\bar{\mathcal{C}}$ 上の非負値可微分関数とし，

$$\phi(x) = f(x)H$$

によって写像 $\phi : \bar{\mathcal{C}} \to \{tH \mid t \geq 0\}$ を定める．このとき，ϕ の拡張として，

$$\Phi(X) = \mathrm{Ad}(k)\phi(x) \qquad (\forall X \in \mathfrak{m})$$

によって可微分レトラクション $\Phi : \mathfrak{m} \to C_{\mathrm{Ad}(K)H}$ が定まる．ここで，k, x は $X = \mathrm{Ad}(k)x$ となる任意の $k \in K$ と $x \in \bar{\mathcal{C}}$ である．

このとき，$x \in \mathcal{C}$ について

$$J(d\Phi_x) = \|(\mathrm{grad} f)_x\| \prod_{\lambda \in R_+ - R_+^{\Delta}} \left(\frac{\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, x \rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}$$

となり，任意の $x \in \mathcal{C}$ について $J(d\Phi_x) \leq 1$ となるならば Φ は面積非増加レトラクションである．ここで，$m(\lambda)$ は制限ルート λ の重複度を表す．

系 3.2 特に，$\Delta = \{\alpha_i\}$ の場合，つまり $\mathrm{Ad}(K)H$ が孤立軌道である場合，$f : \bar{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が

(1) $f(tH) = t \quad (t \geq 0)$,

(2) $f|_{\{\alpha_i\}^\perp} \equiv 0$

を満たす $\bar{C}$ 上の非負値可微分関数とし,

$$\phi(x) = f(x)H$$

によって写像 $\phi : \bar{C} \to \{tH \mid t \geq 0\}$ を定めると, ϕ の拡張として,

$$\Phi(X) = \mathrm{Ad}(k)\phi(x) \qquad (\forall X \in \mathfrak{m})$$

によって可微分レトラクション $\Phi : \mathfrak{m} \to C_{\mathrm{Ad}(K)H}$ が定まる.

例として (G, K) の制限ルート系 R が C_l 型の場合を考えてみる. 制限ルート系 R とその基本系 F は

$$R = \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

$$F = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots, \alpha_{l-1} = e_{l-1} - e_l, \alpha_l = 2e_l\}$$

と表される. このとき, $H = e_1$ を通る軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ は孤立軌道であり, 対称 R 空間ではない. $\bar{C}$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{\langle \alpha_1, x\rangle \langle e_1 + e_2, x\rangle}$$

は系 3.2 の条件 (1), (2) を満たし, これによりレトラクション $\Phi : \mathfrak{m} \to C_{\mathrm{Ad}(K)H}$ が定まる. 後は $J(d\Phi_x)$ を計算し, $J(d\Phi_x) \leq 1$ となること示すことによって, $\mathrm{Ad}(K)H$ 上の錐の面積最小性が示される. この様にして次の孤立軌道上の錐について面積最小性を示すことができる.

定理 3.3

- $(G, K) = (SO(2l+1)^2, SO(2l+1))$ の場合の $H = e_1$ を通る軌道

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(K)H &\cong \frac{SO(2l+1)}{SO(2) \times SO(2l-1)} \subset S^{l(2l+1)-1} \subset \mathbb{R}^{l(2l+1)} \\ &\cong \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{2l+1}) \qquad \text{(対称 } R \text{ 空間)} \end{aligned}$$

  上の錐は面積最小である.

- $(G, K) = (SO(2l+n), SO(l) \times SO(l+n)) \quad (n \geq 2)$ の場合の $H = e_1$ を通る軌道

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(K)H &\cong (SO(l) \times SO(l+n))/Z_K^H \subset S^{l(l+n)-1} \subset \mathbb{R}^{l(l+n)} \\ &\cong (S^{l-1} \times S^{l+n-1})/\mathbb{Z}_2 \qquad \text{(対称 } R \text{ 空間)} \end{aligned}$$

  上の錐は面積最小である. ここで,

$$Z_K^H = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & A & & \\ & & \varepsilon & \\ & & & B \end{pmatrix} \in SO(l) \times SO(l+n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon = \pm 1 \\ A \in O(l-1) \\ B \in O(l+n-1) \end{array} \right\}$$

  である.

- $(G,K)=(SO(5)^2, SO(5)^*)$ の場合の $H=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ を通る軌道

$$\mathrm{Ad}(K)H \cong \frac{SO(5)}{U(2)} \subset S^9 \subset \mathbb{R}^{10} \qquad (\text{対称 } R \text{ 空間でない})$$

上の錐は面積最小である．

- $(G,K)=(Sp(l)\times Sp(l), Sp(l))$ の場合の $H=e_1$ を通る軌道

$$\mathrm{Ad}(K)H \cong \frac{Sp(l)}{U(1)\times Sp(l-1)} \qquad (\text{対称 } R \text{ 空間でない})$$

上の錐は面積最小である．

- $(G,K)=(Sp(2l), Sp(l)\times Sp(l))$ の場合の $H=e_1$ を通る軌道

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(K)H &\cong \frac{Sp(l)\times Sp(l)}{Sp(1)\times Sp(l-1)\times Sp(l-1)} \\ &\cong S^{4l-1}\otimes_{\mathbb{H}} S^{4l-1} \qquad (\text{対称 } R \text{ 空間でない})\end{aligned}$$

上の錐は面積最小である．

- $(G,K)=(SU(2l+n), S(U(l)\times U(l+n)))$ の場合の $H=e_1$ を通る軌道

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(K)H &\cong S(U(l)\times U(l+n))/Z_K^H \\ &\cong S^{2l-1}\otimes_{\mathbb{C}} S^{2(l+n)-1} \qquad (\text{対称 } R \text{ 空間でない})\end{aligned}$$

上の錐は面積最小である．ここで，

$$Z_K^H = \left\{ \begin{pmatrix} g & & & \\ & A & & \\ & & g & \\ & & & B \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} g\in U(1),\ A\in U(l-1),\ B\in U(l+n-1) \\ (\det g)^2\cdot \det A\cdot \det B = 1 \end{array} \right\}$$

- $(G,K)=(SO(4l+2), U(2l+1))$ の場合の $H=e_1$ を通る軌道

$$\mathrm{Ad}(K)H \cong \frac{U(2l+1)}{SU(2)\times U(2l-1)} \qquad (\text{対称 } R \text{ 空間でない})$$

上の錐は面積最小である．

- $(G,K)=(Sp(2l+n), Sp(l)\times Sp(l+n))$ $(n\geq 1)$ の場合の $H=e_1$ を通る軌道

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(K)H &\cong \frac{Sp(l)\times Sp(l+n)}{Sp(1)\times Sp(l-1)\times Sp(l+n-1)} \\ &\cong S^{4l-1}\otimes_{\mathbb{H}} S^{4(l+n)-1} \qquad (\text{対称 } R \text{ 空間でない})\end{aligned}$$

上の錐は面積最小である．

- $(G, K) = (E_6, SO(2) \times SO(10))$ の場合の $H = e_1$ を通る軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ 上の錐は面積最小である．このとき，$\mathrm{Ad}(K)H$ は対称 R 空間でない．
- $(G, K) = (G_2 \times G_2, G_2)$ の場合の $H = 2\alpha_1 + \alpha_2$ を通る軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ 上の錐は面積最小である．このとき，$\mathrm{Ad}(K)H$ は対称 R 空間でない．
- $(G, K) = (G_2 \times G_2, G_2)$ の場合の $H = \frac{1}{\sqrt{3}}(3\alpha_1 + 2\alpha_2)$ を通る軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ 上の錐は面積最小である．このとき，$\mathrm{Ad}(K)H$ は対称 R 空間でない．

これらの軌道はすべて超球面 S 内の弱鏡映部分多様体である．

4 特殊 Lagrange 錐

Riemann 多様体 $\widetilde{M}$ 上の閉 k 次微分形式 α で，$T_x\widetilde{M}$ の任意の k 次元部分空間 V について

$$\alpha|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

となるとき，α を $\widetilde{M}$ 上のキャリブレーションと呼ぶ．$\widetilde{M}$ の k 次元部分多様体 M で任意の $x \in M$ において $\alpha|_{T_xM} = \mathrm{vol}_{T_xM}$ となるとき，M は α によってキャリブレートされていると言う．Harvey-Lawson [3] はキャリブレートされた部分多様体はホモロジー類内で体積最小になることを示した．例えば，Kähler 多様体 $(\widetilde{M}, J, \omega)$ の複素 k 次元複素部分多様体は $\omega^k/k!$ によってキャリブレートされる．

$(\widetilde{M}, J, \omega, \Omega)$ を複素 n 次元 Calabi-Yau 多様体とする．つまり，$(\widetilde{M}, J, \omega)$ は Kähler 多様体であり，$\widetilde{M}$ 上の正則 $(n, 0)$ 形式 Ω が

$$\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

を満たすとする．

定義 4.1 $\theta \in \mathbb{R}$ をある定数として，Calabi-Yau 多様体 $(\widetilde{M}, J, \omega, \Omega)$ 上のキャリブレーション $\mathrm{Re}(e^{i\theta}\Omega)$ によってキャリブレートされた部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ．

M が S^n の部分多様体であるとし，$M \subset S^n$ の単位余法束を N_1^*M で表す．Harvey-Lawson [3] は写像

$$\begin{array}{rcl} \Phi : N_1^*M \times S^1 & \longrightarrow & S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \\ (v_x, e^{i\theta}) & \longmapsto & (\cos\theta x,\ \sin\theta v_x) \end{array}$$

によって S^{2n+1} 内の Legendre 部分多様体を構成し，これが極小となるための必要十分条件は M が S^n 内の austere 部分多様体であることを示した．したがって，この上の錐を考えることによって $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の特殊 Lagrange 錐を得ることができる．しかし，一般には写像 Φ よって構成される S^{2n+1} 内の Legendre 部分多様体は特異点をもつ．Borrelli-Gorodski [1] はこれを modify した写像 $\widetilde{\Phi}$ を与え，特に M の全ての形作用素が 0 固有値をもたないならば $\widetilde{\Phi}$ は Legendre はめ込みになることを示した．したがって，その上の錐は錐形特異点をもつ特殊 Lagrange 部分多様体になる．

定理 2.6 で分類した austere 軌道から $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体が得られる．特に，定理 2.6 のリストの中で 0 固有値をもたない austere 軌道は (2), (6), (7) である．したがって，これらの軌道上の錐の余法束として錐形特異点をもつ特殊 Lagrange 部分多様体が得られる．

T^*S^n 上の Calabi-Yau 計量

Stenzel [11] は階数 1 のコンパクト対称空間 G/K の余接束 $T^*(G/K)$ に余等質性 1 の作用があることを利用して，Ricci 平坦を特徴付ける Monge-Ampère 方程式を常微分方程式に帰着させることにより，$T^*(G/K)$ 上に完備な Ricci 平坦計量を構成した．ここでは，球面 $G/K = S^n$ の場合に Stenzel 計量がどのように与えられるか簡単に説明する．詳細は [11] を参照.

n 次元球面 $S^n \cong G/K = SO(n+1)/SO(n)$ の余接束を

$$T^*S^n = \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \langle x, \xi\rangle = 0\right\}$$

と表す．S^n の任意の単位余接ベクトルは $SO(n+1)$ の作用で互いに移り合うので，T^*S^n には $SO(n+1)$ が余等質性 1 で作用する．T^*S^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素二次超曲面

$$Q^n = \left\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 1\right\} \cong G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$$

と写像

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T^*S^n & \longrightarrow & Q^n \\ (x,\xi) & \longmapsto & x\cosh(\|\xi\|) + \sqrt{-1}\dfrac{\xi}{\|\xi\|}\sinh(\|\xi\|) \end{array}$$

によって微分同型になる．さらに写像 φ は $SO(n+1)$ の作用で同変である．

Q^n には $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素超曲面として複素構造 J が入るので，同一視 $T^*S^n \cong Q^n$ によって T^*S^n にも複素構造 J が誘導される．この複素構造に関して T^*S^n 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量が次で与えられる．

$$\omega_{Stz} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(r^2) = \sqrt{-1}\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} u(r^2) dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

ここで，$r^2 = \|z\|^2 = \sum_{i=0}^{n} z_i\bar{z}_i$ であり，u は常微分方程式

$$\frac{d}{d\tau}(U'(\tau))^n = cn(\sinh\tau)^{n-1} \qquad (c > 0)$$

を満たす U によって $U(\tau) = u(\cosh\tau)$ と表される実数値関数である．特に，$n \geq 2$ の場合，T^*S^n は単連結であるから Stenzel 計量は Calabi-Yau になる．実際，Q^n 上に

$$\Omega \wedge d(z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2) = dz_0 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

によって正則 $(n,0)$ 形式 Ω が定義され，ある定数 λ が存在して

$$\omega_{Stz}^n = \lambda\Omega \wedge \bar{\Omega}$$

となる．ここで，ω_{Stz} と Ω は共に $SO(n+1)$ の作用で不変であることを注意する．したがって，$(T^*S^n, J, \omega_{Stz}, \Omega)$ は余等質性 1 の Calabi-Yau 多様体である．

定理 4.2 (Karigiannis-Min-Oo [8]) S^n 内の部分多様体 M の余法束 $L = N^*M$ は T^*S^n の Stenzel 計量 ω_{Stz} に関する Lagrange 部分多様体になる．さらに，L が T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は M が S^n の austere 部分多様体になることである．

したがって，定理 2.6 で分類した austere 軌道から T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体が具体的に構成される．

参考文献

[1] V. Borrelli and C. Gorodski, *Minimal Legendrian submanifolds of S^{2n+1} and absolutely area-minimizing cones*, Differential Geom. Appl. **21** (2004), no. 3, 337–347.

[2] N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1975.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[4] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, *Area-minimizing of the cone over symmetric R-spaces*, Tsukuba J. Math. **24** no.1 (2000), 171–188.

[5] D. Hirohashi, H. Tasaki, H.J. Song and R. Takagi, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type*, Differential Geom. Appl. **13** (2000), no. 2, 167–177.

[6] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan. **61**, No. 2 (2009), 437–481.

[7] T. Kanno, *Area-minimizing cones over the canonical embedding of symmetric R-spaces*, Indiana Univ. Math. J. **51** (2002), no. 1, 89–125.

[8] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371–394.

[9] M. Kerckhove, *Isolated orbits of the adjoint action and area-minimizing cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 2, 497–503.

[10] G. R. Lawlor, *A sufficient criterion for a cone to be area-minimizing*, Mem. Amer. Math. Soc. **91** (1991), no. 446, vi+111 pp.

[11] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.

–

酒井 高司

首都大学東京大学院理工学研究科

数理情報科学専攻

E-mail address : `sakai-t@tmu.ac.jp`