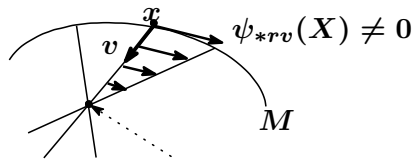


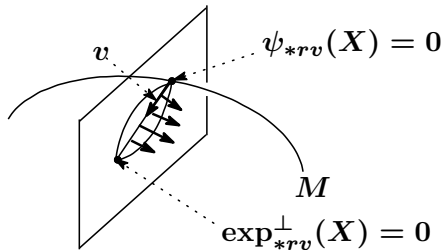
目次

- ① 焦半径・複素焦半径
- ② 等焦部分多様体と複素等焦部分多様体
- ③ 等径部分多様体
- ④ Hermann 作用
- ⑤ 今回得た結果
- ⑥ 等質性定理の証明における改善した部分
- ⑦ 分類

$\mathcal{H} : T^\perp M$ 上の (法接続に関する) 水平分布

$\psi_*(\text{Ker exp}_{*rv}^\perp) \neq \{0\}$ のとき、
 $\exp^\perp(rv)$ は、 M の γ_v に沿う **焦点** とよばれ、
 r は、 M の γ_v に沿う **焦半径** とよばれる。
 また、 $\psi_*(\text{Ker exp}_{*rv}^\perp)$ は、焦半径 r に対する **零化空間**
 とよばれ、その次元は、焦半径 r の **重複度** とよばれる。



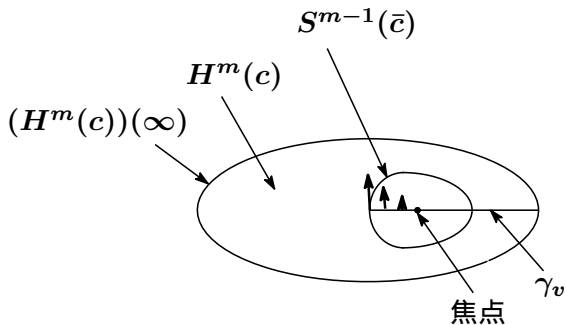


$$\left(\mathcal{F}_{M,x}^R = \bigcup_{v \in T_x^\perp M \text{ s.t. } \|v\|=1} \{rv \mid r \in \mathcal{FR}_{M,v}^R\} \right) \quad (\subset T_x^\perp M)$$

を張る。

焦半径・複素焦半径

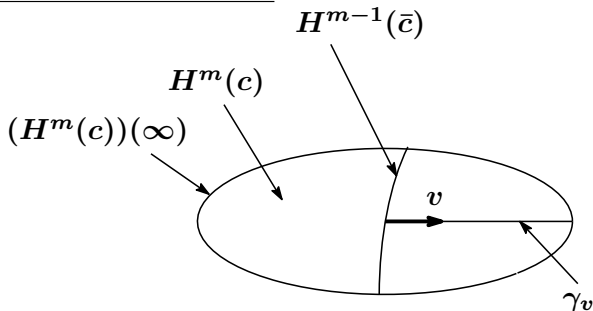
$$\underline{M = S^{m-1}(\bar{c}) \subset H^m(c)}$$



$$\lambda = \sqrt{\bar{c} - c} (> \sqrt{-c})$$

焦半径・複素焦半径

$$M = H^{m-1}(\bar{c}) \subset H^m(c)$$

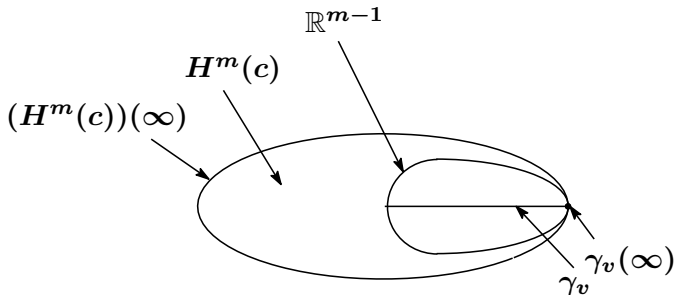


$$\lambda = \sqrt{\bar{c} - c} (< \sqrt{-c})$$

γ_v に沿う焦点は存在しない

焦半径・複素焦半径

$$M = \mathbb{R}^{m-1} \subset H^m(c)$$



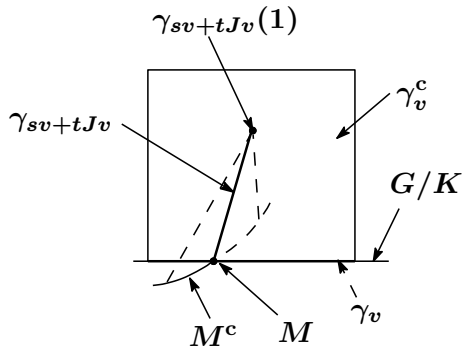
$$\lambda = \sqrt{-c}(=\sqrt{-c})$$

γ_v に沿う焦点は存在しない

この事実に基づいて、[Koi1]において、 M の各法測地線に沿う焦半径を、実数の範囲だけで定義するのは不十分であると判断し、複素数の範囲に広げて定義し、それを複素焦半径と名づけた。その定義は、次の通りである。

(J はアンチケーラー対称空間 G^c/K^c の複素構造を表す。)

焦半径・複素焦半径



焦半径・複素焦半径

$\mathcal{FR}_{M,v}^C$: M の法測地線 γ_v に沿う複素焦半径の全体

$T_x^\perp(M^c)$ の部分集合 $\mathcal{F}_{M,x}^C$ を次式によって定義する：

$$\mathcal{F}_{M,x}^C := \bigcup_{v \in T_x^\perp M \text{ s.t. } ||v||=1} \{av + bJv \mid a + bi \in \mathcal{FR}_{M,v}^C\}$$

これは、 M^c の x にける接焦点集合に等しい。

これを、 M^c の x にける**複素接焦点集合**とよぶ。

焦半径・複素焦半径

 $G/K = H^m(c)$ の場合

$\mathcal{FR}_{M,v}^C$ は、次の集合に等しい：

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\lambda} + j\pi i \right) \mid \lambda \in (\operatorname{Spec} A_v)_+ \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\lambda}{\sqrt{-c}} + (j + \frac{1}{2})\pi i \right) \mid \lambda \in (\operatorname{Spec} A_v)_- \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} (\operatorname{Spec} A_v)_+ := \{ \lambda \in \operatorname{Spec} A_v \mid |\lambda| > \sqrt{-c} \} \\ (\operatorname{Spec} A_v)_- := \{ \lambda \in \operatorname{Spec} A_v \mid |\lambda| < \sqrt{-c} \} \end{array} \right)$$

焦半径・複素焦半径

M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達は、

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } A_v \text{ s.t. } |\lambda| \neq \sqrt{-c}} \text{Ker} (A_v^c - \lambda \text{id})$$

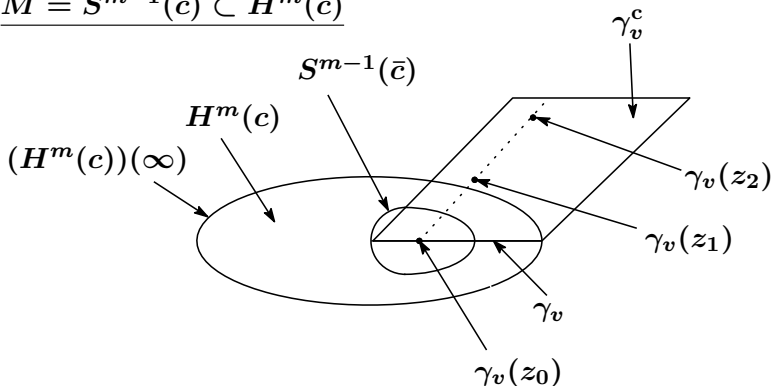
を張る。つまり、それらは、

$$(T_x M)^c \ominus (\text{Ker } A_v^c \cap \text{Ker } R(v)^c)$$

を張るとは限らない。

焦半径・複素焦半径

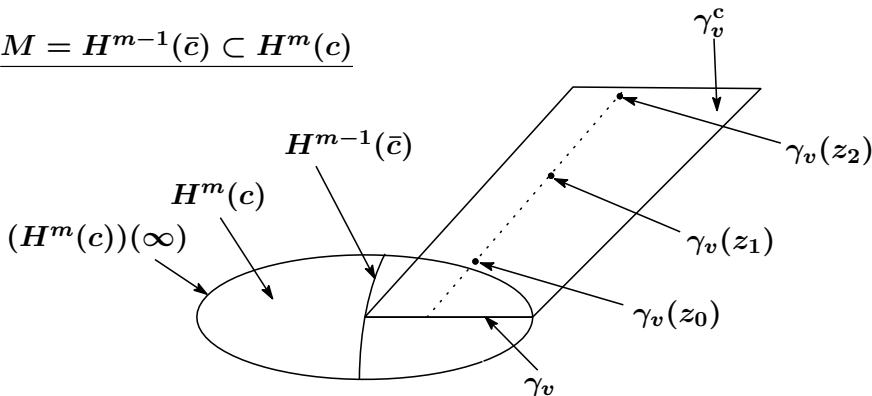
$$M = S^{m-1}(\bar{c}) \subset H^m(c)$$



$$z_j = \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{\bar{c}} - c} + j\pi\sqrt{-1} \right)$$

焦半径・複素焦半径

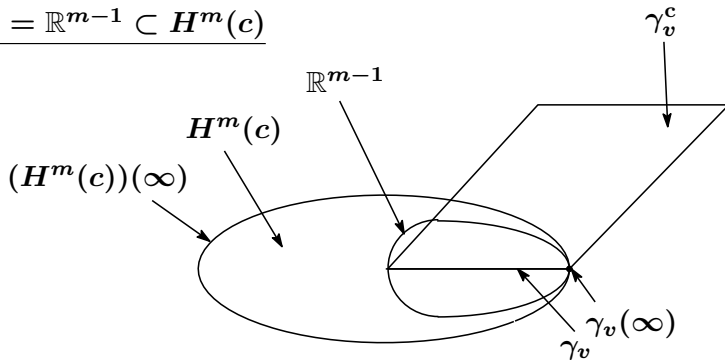
$$M = H^{m-1}(\bar{c}) \subset H^m(c)$$



$$z_j := \frac{1}{\sqrt{-c}} \left(\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\bar{c} - c}}{\sqrt{-c}} + (j + \frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} \right)$$

焦半径・複素焦半径

$$M = \mathbb{R}^{m-1} \subset H^m(c)$$



γ_n^c に沿う焦点は存在しない

$$H^m(c), H_m^m(c), H_1^m(c) : S_C^m(c) \text{ の 3 つの実形}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \subset & H^m(c) \\ \cap & & \cap \\ M^c & \subset & S_c^m(c) \\ & & \cup \\ M^* & \subset & H_{m-1}^m(c) \end{array}$$

2. 等焦部分多様体と複素等焦部分多様体

等焦部分多様体と複素等焦部分多様体

G/K : 対称空間

M : G/K 内の完備な埋め込まれた部分多様体

定義 (等焦部分多様体) (Tereng-Thorbergsson)

M が次の 4 条件を満たすとき、 M を等焦部分多様体とよぶ：

- (i) M はコンパクトである。
- (ii) M は平坦切断をもつ。
- (iii) M の法ホロノミー群は自明である。
- (iv) M は平行な焦点構造をもつ。

注意 M が平行な焦点構造をもつとは、

「 $\mathcal{F}_{M,x}^R$ ($x \in M$) 達が法接続に関する
平行移動で互いに移り合う」

等焦部分多様体と複素等焦部分多様体

定義 (複素等焦部分多様体) (K)

M が次の 3 条件を満たすとき、 M を複素等焦部分多様体とよぶ：

- (i) M は平坦切断をもつ。
- (ii) M の法ホロノミー群は自明である。
- (iii) M は平行な複素焦点構造をもつ。

注意 M が平行な複素焦点構造をもつとは、

「 $\mathcal{F}_{M,x}^C$ ($x \in M$) 達が M^c の法接続に関する
平行移動で互いに移り合う」

を意味する。

等径部分多様体

N : 完備リーマン多様体

M : N 内の完備な埋め込まれた部分多様体

定義 (等径部分多様体) (Heintze-Liu-Olmos)

M が次の 3 条件を満たすとき、 M を等径部分多様体とよぶ：

- (i) M は平坦切断をもつ。
- (ii) M の法ホロノミー群は自明である。
- (iii) M の十分近くの平行部分多様体達は放射方向に関して CMC である。

等径部分多様体

注意

平行部分多様体 $\eta_{\tilde{v}}(M)$ が放射方向に関して CMC であるとは、

「 $\mathrm{Tr}(A^{\tilde{v}})_{\gamma'_{\tilde{v}_m}(1)}$ が $x(\in M)$ によらず一定である」

を意味する。

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{v} : M \text{ の平行な法ベクトル場} \\ \eta_{\tilde{v}} : \tilde{v} \text{ に対する終点写像} \\ \text{(つまり、}\eta_{\tilde{v}}(x) := \gamma_{\tilde{v}_x}(1) \text{ (} x \in M \text{))} \\ A^{\tilde{v}} : \eta_{\tilde{v}}(M) \text{ の形作用素} \end{array} \right)$$

等径部分多様体

G/K : 対称空間

M : G/K 内の平坦切断をもつ完備な部分多様体

事実 [Koi2]

$$M : \text{等徑} \implies M : \text{複素等焦}$$

等径部分多様体

定義 (curvature-adapted 部分多様体) (Berndt-Vanhecke)

M が次の 2 条件を満たすとき、

M を **curvature-adapted 部分多様体** とよぶ:

- $$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & R(v)(T_x M) \subset T_x M \quad (\forall x \in M, \forall v \in T_x M) \\ \text{(ii)} \quad & [A_v, R(v)] = 0 \quad (\forall v \in TM) \end{aligned}$$

事実 [Koi2]

M が curvature-adapted であるとき、

$$M : \text{等徑} \iff M : \text{複素等焦}$$

H が G の対称部分群 (つまり、 (G, H) が対称対) であるとき、 H の G/K への自然な作用を **Hermann 作用** という。

θ, σ から誘導される $\mathfrak{g}$ の対合も同じ記号で表すことにする。

Hermann 作用の主軌道

Hermann 作用の主軌道

$$F := H(eK) \text{ (これは鏡映部分多様体になる)}$$
$$F^\perp := \exp^\perp(T_{e_K}^\perp F) \text{ (これも鏡映部分多様体になる)}$$
$$x \in M \cap F^\perp, \quad v(\neq 0) \in T_x^\perp M$$

$Z : \text{Exp } Z = x$ を満たす $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の元

$$\left(\begin{array}{l} \text{Exp} : G/K \text{ の } eK \text{ における指数写像} \\ \text{exp} : \text{リー群 } G \text{ の指数写像} \end{array} \right)$$

Hermann 作用の主軌道

Hermann 作用の主軌道

$$\Delta'_+{}^V := \{\beta \in \Delta'_+ \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q} \neq \{0\}\}$$

$$\Delta'_+{}^H := \{\beta \in \Delta'_+ \mid \mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}\}$$

次の関係式が成り立つ：

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{b} + \sum_{\beta \in \Delta'_+ \vee} (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q})$

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in \Delta'_+{}^H} (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h})$

それゆえ

$$(4.1) \quad (\exp Z)^{-1}_*(T_x M) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in \Delta'_+{}^V} (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\beta \in \Delta'_+{}^H} (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h})$$

Hermann 作用の主軌道

$$\bar{v} := (\exp Z)_*^{-1}(v) \ (\in \mathfrak{b})$$

M の形作用素 A_n に関して、次式が成り立つ：

$$(4.2) \quad A_v|_{(\exp Z)_*(\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q})} = -\frac{\beta(\bar{v})}{\tanh \beta(Z)} \text{id} \quad (\beta \in \Delta'_+{}^V)$$

$$(4.3) \quad A_v|_{(\exp Z)_*(\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h})} = -\beta(\bar{v}) \tanh \beta(Z) \text{id} \quad (\beta \in \Delta'_+{}^H)$$

$$(4.4) \quad A_v|_{(\exp Z)_*(\mathfrak{z}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{b}))} = 0$$

ここで、 G/K の計量は適当な正の定数倍によってリスケールする必要がある。

Hermann 作用の主軌道

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_+ &:= \{(\lambda, \mu) \in \operatorname{Spec} A_v \times \operatorname{Spec} R(v) \mid |\lambda| > |\mu|\} \\ \mathcal{S}_- &:= \{(\lambda, \mu) \in \operatorname{Spec} A_v \times \operatorname{Spec} R(v) \mid |\lambda| < |\mu|\}\end{aligned}$$

(4.1) ~ (4.4) から、

v が正則元 (つまり、 $\beta(\bar{v}) \neq 0$ ($\forall \beta \in \Delta'_+$)) のとき、
次式を得る：

Hermann 作用の主軌道

(4.5)

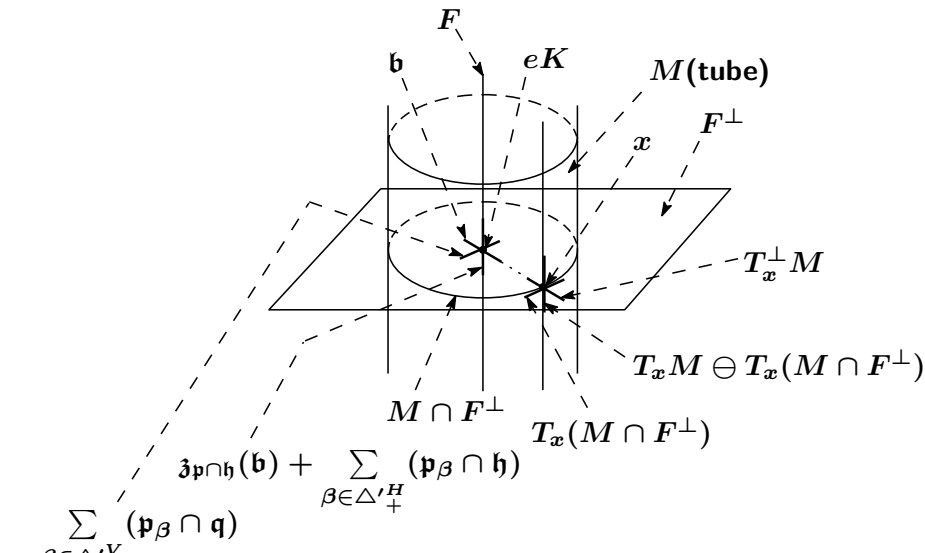
$$(\exp Z)_* \left(\sum_{\beta \in \Delta'_+ V} (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{q}) \right) \\ = \oplus_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{S}_+} (\mathbf{Ker}(A_v - \lambda \text{id}) \cap \mathbf{Ker}(R(v) - \mu \text{id}))$$

(4.6)

$$(\exp Z)_* \left(\sum_{\beta \in \Delta'_+{}^H} (\mathfrak{p}_\beta \cap \mathfrak{h}) \right) \\ = \oplus_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{S}_-} (\text{Ker}(A_v - \lambda \text{id}) \cap \text{Ker}(R(v) - \mu \text{id}))$$

(F) M の γ_v に沿う焦半径に対する零化空間達は、 $T_x(M \cap F^\perp)$ を張る。

Hermann 作用の主軌道



(*_C) M の γ_v に沿う複素焦半径に対する零化空間達は、 $(T_x M)^c \ominus (\text{Ker } A_\eta^c \cap \text{Ker } R(v)^c)$ を張る。

Hermann 作用の主軌道

結局、次の事実を得る：

事实

Hermann 作用の主軌道は、curvature-adapted 等径部分多様体であり、条件 $(*_C)$ を満たす。

Hermann 作用の主軌道

$H = K$ (つまり、イソトロピー作用) のとき、 (F) から、次の事実を得る:

(*_R) M の γ_v に沿う焦半径に対する零化空間達は、 $T_x M \ominus (\text{Ker } A_v \cap \text{Ker } R(v))$ を張る。

今回得た結果

今回、逆に、次の事実が成り立つことを示した。

定理 A([Koi10])

$M : G/K$ 内の既約な余次元 2 以上の curvature-adpated C^ω 等径部分多様体で、条件 $(*_C)$ を満たす

$\Rightarrow M : G/K$ 上のある Hermann 作用の主軌道である。

(注 1) この定理において、**curvature-adpated** 性と $(*_C)$ いずれの条件も必要不可欠であることを示す例を G の岩澤分解 $G = KAN$ における可解部分 AN の部分群作用の軌道として与えることができる ([Koi7])。

(注 2) 定理 A を用いて、各既約な非コンパクト型対称空間 G/K に対し、定理 A におけるような G/K 内の等径部分多様体を分類することができる (アブストラクト P7 ~ 10 参照)

今回得た結果

定理 A の証明の流れ

$\phi : H^0([0, 1], \mathfrak{g}^c) \rightarrow G^c/K^c$: 平行移送写像

$\pi : G^c \rightarrow G^c/K^c$: 自然な射影

$$\widetilde{M}^c := (\pi \circ \phi)^{-1}(M^c)$$

(Step I) M が条件 $(*_C)$ を満たすことから、 $\widetilde{M}^c$ がプロパーアンチケーラー等径部分多様体であることを示す。

(
 プロパーアンチケーラー等径部分多様体
 の定義については、[Koi2] を参照。
)

この事実は、[Koi9]において証明されたが、最近その証明において、改善しなければならない箇所をいくつか見つけ、[Koi10]において改善した。詳細に関しては、次節で述べることにする。

(Step IV) (Step III) の結果を用いて、 M が (複素)hyperpolar 作用の主軌道であることが示され、さらに、全測地的特異軌道の存在性を示すことにより、その作用が Hermann 作用であることを示す。

$M : G/K$ 内の既約な余次元 2 以上の **curvature-adpated**
 C^ω 等径部分多様体で、条件 $(*_R)$ を満たす
 $\Rightarrow M : G/K$ 上のある点におけるイソトロピー作用の
 主軌道である。

分類

G/K : 既約な非コンパクト型対称空間

M : G/K 内の定理 A におけるような等径部分多様体

定理 C.

M は、表 1 ~ 4 におけるような G の対称部分群 H の G/K への作用のある主軌道に合同である。

分類

- $G/K = SU(p, q)/S(U(p) \times U(q))$ ($3 \leq p < q$) のとき、 H は次のいずれかである:

$$\begin{aligned} & S(U(p) \times U(q)), \quad SO_0(p, q), \\ & S(U(i, j) \times U(p-i, q-j)) \\ & (1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1) \\ & Sp(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}) \quad (p, q : \text{偶数のとき}) \end{aligned}$$

- $G/K = SU(2, q)/S(U(2) \times U(q))$ ($q \geq 3$) のとき、 H は次のいずれかである:

$$S(U(2) \times U(q)), \quad SO_0(2, q), \\ S(U(1, j) \times U(1, q - j)) \quad (1 \leq j \leq q - 1)$$

分類

- $G/K = SU(p, p)/S(U(p) \times U(p))$ ($p \geq 4$) のとき、 H は次のいずれかである:

$$\begin{aligned}
& S(U(p) \times U(p)), \quad SO_0(p, p), \\
& SO^*(2p), \quad Sp(p, \mathbb{R}), \quad SL(p, \mathbb{C}) \cdot U(1) \\
& \quad S(U(i, j) \times U(p-i, p-j)) \\
& \quad (1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq p-1) \\
& \quad Sp\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right), \quad (p: \text{偶数のとき})
\end{aligned}$$

