式 (5.4.2) が成り立つならば，(M,g) が一定の断面曲率 c をもつことは

証明　式 (5.4.2) が成り立つならば，(M,g) が一定の断面曲率 c をもつことは明らかである．逆を示す．(M,g) が一定の断面曲率 c をもつとする．このとき，M 上の4次共変テンソル場 $\mathcal{R}$，Q を各々，

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_p(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4) := g_p(R_p(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4),\\ &Q_p(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4) := c\,(g_p(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)g_p(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_4) - g_p(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3)g_p(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4)),\\ &\qquad\qquad\qquad (p\in M,\ \ \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_4\in T_pM)\end{aligned}$$

によって定義する．任意に $p\in M$，および，(T_pM,g_p) の正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ をとる．このとき仮定により，任意の $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ に対し，

$$\mathcal{R}_p(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i) = Q_p(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)$$

が成り立つ．一方，命題 5.4.1 における関係式が Q に対しても成り立つことが容易に確かめられる．これらの関係式を用いて，任意の $i,j,k,l\in\{1,\ldots,n\}$ に対し，

$$\mathcal{R}_p(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = Q_p(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l)$$

が成り立つことが導かれる．それゆえ，$\mathcal{R}_p = Q_p$ が示される．　□

ここで，定曲率空間の例を紹介することにする．

例 5.4.1.　$n\,(\geq 2)$ 次元擬ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n_\nu := (\mathbb{A}^n, g^o_\nu)$ は完備かつ単連結で，平坦な空間である．擬ユークリッド計量 g^o_ν は $\mathbb{A}^n$ の座標系 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (x_1,\ldots,x_n)$ を用いて

$$g^o_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \cancel{\delta_{ij}}\ \cancel{(1\leq i,j\leq n)}\ \begin{cases}-\delta_{ij} & (1\leq i\leq \nu)\\ \delta_{ij} & (\nu+1\leq i\leq n)\end{cases}$$

によって与えられることを注意しておく．

例 5.4.2.　$\mathbb{E}^{n+1}_\nu$ 内の半径 r の $n\,(\geq 2)$ 次元擬球面

$$S^n_\nu[r] := \left\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{E}^{n+1}_\nu \;\middle|\; -\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1}x_i^2 = r^2\right\}$$

は C^∞ 級擬リーマン超曲面であり，その第1基本形式を g として，組