

## 燃焼振動の時空間ダイナミクス -複雑ネットワークと同期-

*Spatiotemporal dynamics of combustion oscillations  
-Complex network and synchronization-*

後藤田 浩 (東京理科大学)

村山 聖悟 (東京理科大学)

Hiroshi GOTODA (Tokyo University of Science),

Shogo MURAYAMA (Tokyo University of Science)

e-mail: gotoda@rs.tus.ac.jp

### 1. はじめに

燃焼振動は音響的な圧力変動と火炎面の発熱率変動の相互干渉によって保持され、その現象の性質から、熱音響自励振動として、燃焼・伝熱分野のみならず、応用物理分野でも知られている。乱れによる火炎面の発熱変動が燃焼器内の気体に固有な振動を励起し、燃焼器内で音響振動を誘起する。音響振動の強い圧力変動が燃焼器の上流に伝わり、燃料/酸化剤の流量変動が生じる。この流量変動が火炎面の発熱変動に作用し、圧力場に影響を与える。このようなフィードバック機構[1]によって形成される燃焼振動は、乱流運動や燃焼反応による発熱変動と音響場が相互に作用し合う複雑な非線形現象であり、反応性熱流体の非線形問題の基礎学理で重要となる物理要素を多く含んでいる。燃焼振動による強い圧力変動が生じると、燃焼器の致命的な破損やライフサイクルの低下を引き起こす。そのため、燃焼振動の機構の基礎的な解明や予兆検知技術は発電用ガスタービンエンジンや航空エンジンのみならず、ロケットエンジン燃焼器開発においても重要な研究課題である。

近年、複雑な非線形散逸現象を取り扱うための新しい複雑系科学の基礎理論や数値技術が様々な分野で展開されている。複雑ネットワークは、オイラーらによって創始されたグラフ理論をもとにしたものであり、インターネット、交通網や人間関係など、現代社会の身近なところで存在する。よって、複雑ネットワークは、応用数学分野のみならず、社会学や通信などの分野でも興味を引くものの一つである。他方、非線形物理学では、情報通信だけでなく、ホテルの集団発光や概日リズムで見られる同期現象が注目され、振動子間の同期と複雑ネットワークの関わりも議論されている[2]。

本稿では、複雑ネットワークと同期をキーワードに、乱流予混合燃焼器内に形成される燃焼振動の時空間ダイナミクスの一端を解明したもの[3], [4]を紹介する。

### 2. 実験装置および方法

本研究で用いる実験装置は、従来の研究[5]とほぼ同一であり、予混合室、ノズル、燃焼室、冷却部から構成されている。燃焼室入口には軸流スワロー（ハブ径 19 mm, スワロー外径 30 mm）が組み込まれており、予混合気に旋回流が与えられる。燃料にはメタン、酸化剤には空気を用いる。本研究では、燃焼振動の流体力学的構造を明らかにするために、時系列 PIV を用いる。燃焼室内へ DPSS レーザー（Laser QUANTUM 社製 Finesse 波長 532 nm, 出力 8 W, レーザーシート厚 1 mm）を照射し、予混合気に混入させた固体粒子（ $\text{SiO}_2$ , 平均粒子径 4  $\mu\text{m}$ ）からの散乱光をバンドパスフィルタ（LaVision 社製 VZ-Image Filter, 透過中心波長 532 nm, 半値幅 10 nm）と UV レンズ（Nikon 社製 UV-105 mm F4.5）を取り付けた高速度カメラ（Photron 社製 FASTCAM SA-Z）により撮影する。高速度カメラの撮影速度を 60000 frame/s、二次元断面の散乱光画像の解像度を  $384 \times 728$  pixels とし、燃焼室左半面の  $48 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$  を計測領域とする。ただし、1 pixel = 0.124 mm とする。瞬時速度場の算出には LaVision Davis 8.0.6 の Multi-pass iteration mode を使用し、検査領域を 64 pixel  $\times$  64 pixel, overlap を 75 % とする。燃焼室内の圧力変動と散乱光画像はパルスジェネレータ（Quantum COMPOSERS 社製 MODEL9212）を用いて 60 kHz で同時に計測される。圧力トランスデューサ（JTEKT PD104K-10 kPa）は、燃焼室入口より軸流方向へ 20 mm の壁面に取り付けられている。本研究

では、空気の断面平均流速  $U = 6.0$  m/s, 当量比  $\phi = 0.78$  において形成される十分発達した燃焼振動を対象とする。図 1 に時系列 PIV によって得られた燃焼器内部の平均速度場を示す。渦崩壊による再循環流領域 (Inner recirculation zone: IRZ), ダンプ領域の循環流領域 (Outer recirculation zone: ORZ), スワロー後流の循環流領域 (Recirculation zone: RZ) が形成される。これらの循環流を伴いながら、燃焼振動が保持される。

本研究では、圧力変動と発熱率変動の非線形相互作用を調べるために、圧力変動と OH\* 自発光強度変動の同時計測も行う。OH\* 自発光強度はバンドパスフィルタ (朝日分光 MZ0310, 透過中心波長 310 nm, 半値幅 10 nm) と UV レンズ (Nikon UV-105 mm F4.5), Image intensifier (浜松ホトニクス C9548-03) を取り付けた高速度カメラ (Photron FASTCAM SA-Z) を用いて撮影される。ただし、OH\* 自発光強度画像の撮影範囲を 100 mm × 100 mm とする。OH\* 自発光強度画像と燃焼室内の圧力変動はパルスジェネレータ (Quantum COMPOSERS MODEL9212) を用いて 6 kHz で同時に計測される。燃焼振動の速度場の計測と同様に、 $U = 6.0$  m/s とする。ただし、圧力変動と OH\* 自発光強度変動の同時計測のみ、 $\phi = 0.65 - 0.84$  まで変化させ、燃焼騒音から燃焼振動への遷移過程も着目する。

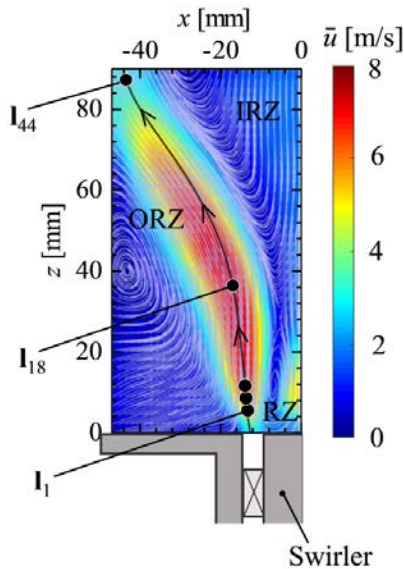


図 1 燃焼振動の平均速度場[3].  $I_1 = [-13$  mm, 4 mm],  $I_{18} = [-17$  mm, 38 mm],  $I_{44} = [-43$  mm, 88 mm], ただし、当量比  $\phi = 0.78$  とする。

### 3. 複雑系数理の基礎理論に基づく解析手法

#### 3.1 統計力学的複雑さ

情報理論は、統計力学や確率論への重要な寄与とともに発展してきた。情報理論の中心的概念であるシャノンエントロピーは乱雑さ、もしくは予測不能性の目安であり、統計熱力学における状態の不確定さを測ったエントロピーに対応する。シャノンエントロピーは事象の生起確率の関数として定義されるが、確率分布の形状も考慮し、ダイナミクスの複雑さを定義する考え方がある[6]。本研究では、確率分布の形状を不均衡さと関連づけ、燃焼振動の速度変動の複雑さを乱雑さと不均衡さの積として定量化する。乱雑さには順列エントロピー[7]を用い、不均衡さには Jensen-Shannon divergence を用いる。この複雑さは Jensen-Shannon statistical complexity [8]と呼ばれ、次式で表される。

$$C_{JS}[\mathbf{P}] = Q_{JS}[\mathbf{P}, \mathbf{P}_e] H_p[\mathbf{P}]$$

$$H_p[\mathbf{P}] = \frac{-\sum_{i=1}^{D!} P(\pi_i) \log_2 P(\pi_i)}{\log_2 D!}$$

$$Q_{JS}[\mathbf{P}, \mathbf{P}_e] = \frac{\log_2 D!}{Q_{JS, \max}} \{ H_p[(\mathbf{P} + \mathbf{P}_e)/2] - H_p[\mathbf{P}]/2 - H_p[\mathbf{P}_e]/2 \}$$

$$Q_{JS, \max} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{D!+1}{D!} \log_2 (D!+1) - 2 \log_2 (2D!) + \log_2 D! \right\}$$

燃焼振動の速度場の時間変動  $u' (= (u'_x + u'_z)^{1/2})$  を  $D$  次元位相空間[9]に埋め込み、 $\mathbf{u} (= (u'(t_i), u'(t_i + \tau), \dots, u'(t_i + (D-1)\tau)))$  の成分のランクオーダーパターンを順列  $\pi_i$ ,  $P(\pi_i)$  を  $\pi_i$  の存在確率、 $\tau$  を位相空間の遅れ時間とする。また、 $Q_{JS, \max}$  を  $Q_{JS}$  の最大値とし、 $Q_{JS}$  を順列パターンの確率分布  $\mathbf{P}$  とランダム過程に対応する等確率分布  $\mathbf{P}_e$  との差として見積もる。 $H_p$  と  $C_{JS}$  から成る二次元平面は complexity-entropy causality plane (CECP) と呼ばれる[8]。位相空間内の  $\tau$  を変化させることで、CECP 内に軌道が描かれる[10]。このような時間軸のマルチスケール性を考慮に入れた手法は、様々な時間スケールでの複雑さを捉えることが可能であり、近年の非線形科学分野で着目されている。CECP で放物型の軌道が描かれた場合、ダイナミクスは決定論的カオスである。放物型の軌道が描かれず、軌道が  $(H_p, C_{JS}) = (1, 0)$  に向かって右下がりになると、ダイナミクスは確率過程に支配されている。

### 3.2 乱流ネットワーク

燃焼振動の渦度場のダイナミクスを複雑ネットワークの視点から明らかにするために、Taira et al. [11] によって提案された乱流ネットワークを導入する。本研究では、重み有りネットワークを考慮し、乱流ネットワークの頂点を計算領域内の各計算格子とする。つまり、構築されるネットワークは、任意の流体要素が他のすべての流体要素と枝を持つ。頂点間の結合強度  $E_{ij}$  は頂点  $i$  と頂点  $j$  の間に及ぼされる誘起速度  $u_{i \rightarrow j}$  と  $u_{j \rightarrow i}$  の平均とする。このとき、重み有り完全グラフの隣接行列  $\mathbf{A}$  は次式となる。

$$A_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i \rightarrow j} + u_{j \rightarrow i})$$

$$u_{i \rightarrow j} = \frac{|\Gamma_i|}{2\pi|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{|\Omega(\mathbf{x}_i)\Delta x \Delta z|}{2\pi|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

ただし、 $\Omega(\mathbf{x}_i)$  を渦度、 $\Gamma_i$  を循環、 $\mathbf{x}_i$  を頂点  $i$  の位置ベクトル、 $\Delta x, \Delta z$  を  $x, z$  方向の計算格子のサイズとする。頂点  $i, j$  間の距離  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  が大きいほど、 $E_{ij}$  の値は小さくなり、 $\Omega(\mathbf{x}_i)$  が大きいほど、 $E_{ij}$  の値は大きくなる。ネットワーク構造の繋がり の程度を定量化するために、次式で定義される強度  $s_i$  を算出する。

$$s_i = \sum_j A_{ij}$$

本研究では、ネットワークのコミュニティにも着目する。コミュニティの抽出手法には、Blondel ら [12] により提案された Louvain 法を用いる。Louvain 法は、コミュニティの分割精度の指標となる Modularity  $Q$  を用いて、近隣の頂点間のコミュニティ形成と同一コミュニティ内の集約を複数回繰り返し、高い  $Q$  のコミュニティを抽出する手法である。コミュニティの形成では、任意に選定した頂点とその頂点の全隣接頂点に対して同一コミュニティに属したときの  $Q$  の増分  $\Delta Q$  を次式より算出する。 $\Delta Q$  が最大値をとるときの隣接した頂点を同一コミュニティとする。

$$Q = \frac{1}{2W} \sum_i \sum_j \left( A_{ij} - \frac{s_i s_j}{2W} \right) \delta(c_i, c_j)$$

$$\Delta Q = \left[ \frac{\sum_{in} s_{i,in}}{2W} - \left( \frac{\sum_{tot} s_i}{2W} \right)^2 \right] - \left[ \frac{\sum_{in}}{2W} - \left( \frac{\sum_{tot}}{2W} \right)^2 - \left( \frac{s_i}{2W} \right)^2 \right]$$

ただし、 $W$  を全ての結合強度の総和、 $\sum_{in}$  をコミュニティ内の結合強度の総和、 $\sum_{tot}$  をコミュニティ内の全頂点に隣接する結合強度の総和、 $s_{i,in}$  をコミュニティ内にある頂点  $i$  を端点とする結合強度の総和とする。

### 3.3 同期パラメータ

同期パラメータは、複雑ネットワーク内の局所的な頂点間の同期程度を定量化したものである [13]。本研究では、同期パラメータ  $r_l$  を用いて、OH\* 自発光強度変動の時空間ダイナミクスの同期状態を明らかにする。図 2 で示されるように、OH\* 自発光強度画像  $I'_{OH^*}(x, z)$  の空間二次モーメント  $W'_{OH^*} (= \langle |I'_{OH^*}(x, z) - \langle I'_{OH^*}(x, z) \rangle|^2 \rangle)$  に着目する。ただし、 $\langle \cdot \rangle$  を  $x$  軸方向に対する平均とする。枝の重み有りネットワークの頂点を  $z$  軸方向の各グリッド  $z_i$  とし、頂点間を結ぶ枝を結合強度  $w_{ij}$  とする。次式で示される隣接行列  $\mathbf{A}$  を用いることで、 $r_l$  が算出される。

$$r_l = \frac{1}{2N_l} \sum_i \sum_j w_{ij} r_{ij}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij} r_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

ただし、 $N_l$  を枝の総本数、 $r_{ij}$  を位相同期パラメータとする。 $0 \leq r_l \leq 1$  をとり、 $r_l = 1$  はネットワーク上のすべての振動子が位相同期状態であることに対応する。また、重みを考慮したネットワークの強度分布  $\mathbf{s}$  は  $s_i = \sum_j w_{ij} r_{ij}$  として与えられる。

本研究では、同一の位相空間内に埋め込まれた 2 つの時系列の動的挙動の類似性を定量化する Cross recurrence plots (CRPs) に着目し、 $w_{ij}$  に CRPs の決定論性  $D_r$  [14] を適用する。グリッド  $i$  における  $W'_{OH^*,i}(t)$  とグリッド  $j$  における  $W'_{OH^*,j}(t)$  を同一の  $D$  次元位相空間内に埋め込み、位相空間内の  $\mathbf{W}_{OH^*,i}(t)$  と  $\mathbf{W}_{OH^*,j}(t)$  の距離を計算することで、CRPs の回帰行列  $\mathbf{C}$  が次式により得られる。

$$C_{m,n} = \Theta \left( \varepsilon - \left\| \mathbf{W}_{OH^*,i}(t_m) - \mathbf{W}_{OH^*,j}(t_n) \right\| \right)$$

ただし、 $\Theta$  をヘビサイド関数、 $\varepsilon$  を閾値、 $\|\cdot\|$  をユークリッド距離、 $\mathbf{W}_{OH^*,i}(t) = (W'_{OH^*,i}(t), W'_{OH^*,i}(t+\tau), \dots, W'_{OH^*,i}(t+(D-1)\tau))$  を位相空間内の点とする。

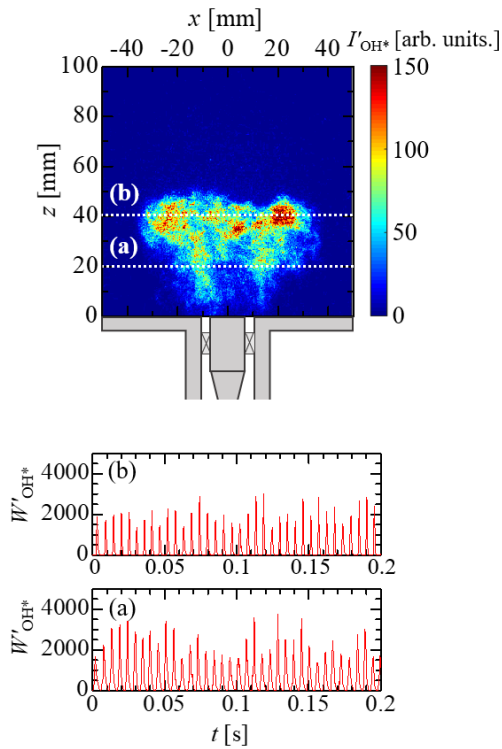


図2 OH\*自発光強度画像と2次モーメント  $W_{OH^*}$  の時間変化((a)  $z = 20$  mm, (b)  $z = 40$  mm)[4]. ただし、当量比  $\phi = 0.81$  とする.

CRPs に長い斜線構造が形成されるとき、2つの時系列は類似性を持つ. CRPs の  $D_r$  は、主体角線( $n = m$ )から平行な斜線までの時間  $\tau$  を考慮し、次式で定義される.

$$D_r = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^{N_p - \tau'} IP_{\tau'}(l)}{\sum_{l=1}^{N_p - \tau'} IP_{\tau'}(l)}$$

ただし、 $N_p$  を位相空間内の軌道上の総点数、 $l$  を斜線長さ、 $IP_{\tau'}(l)$  を主対角線から  $\tau'$  だけ離れた対角線長さの度数分布、 $l_{\min}$  ( $= 5$ ) を最小斜線長さとする.

$0 \leq D_r \leq 1$  をとり、 $D_r$  が大きいほど2つの時系列が類似していることを意味する. 本研究では、 $\varepsilon$  をリカレンス率  $R_r = 0.05$  を満たす値、 $\tau$  を  $D_r$  が最大となるときの値とする.  $r_{ij}$  には、次式で示される2つの時系列間の位相同期パラメータを用いる.

$$r_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int e^{i[\theta_i(t) - \theta_j(t)]} dt$$

ただし、 $\Delta t$  を時間幅、 $\theta_i(t)$  を Hilbert 変換により得られる  $W_{OH^*,i}$  の位相の時系列、 $0 \leq r_{ij} \leq 1$  とする.

### 3.4 同期インデックス

本研究では、圧力変動と発熱率変動の非線形相互作用を取り扱うための新しい特性量として、同期インデックス[3]を提案する. 異なる位相空間内に埋め込まれた物理量の動的挙動の類似性を定量化する Joint probability of recurrence (JRP)  $J_r$  [14] と、圧力変動および OH\* 自発光強度変動の位相同期パラメータ  $r_{pq}$  の積として、同期インデックス  $S_I$  を定義する. 本研究では、 $p'$  および  $I_{OH^*}$  の空間二次モーメント  $W_{OH^*}$  を用いて  $S_I$  を算出する.

$$S_I = J_r r_{pq}$$

$0 \leq S_I \leq 1$  をとり、 $S_I$  が増加すると圧力変動と発熱率変動の非線形相互作用が強まる. 本研究では、 $p'$  と  $W_{OH^*}$  を用いて JRP を構築する. JRP の回帰行列  $\mathbf{J}$  は、 $p'$  と  $W_{OH^*}$  をそれぞれ異なる  $D$  次元位相空間内に埋め込むことで次式より得られる.

$$J_{m,n} = \Theta(\varepsilon - \|\mathbf{p}(t_m) - \mathbf{p}(t_n)\|) \Theta(\varepsilon - \|\mathbf{W}_{OH^*}(t_m) - \mathbf{W}_{OH^*}(t_n)\|)$$

ただし、 $\mathbf{p}(t) = (p'(t), p'(t+\tau), \dots, p'(t+(D-1)\tau))$ ,  $\mathbf{W}_{OH^*}(t) = (W_{OH^*}(t), W_{OH^*}(t+\tau), \dots, W_{OH^*}(t+(D-1)\tau))$  を  $W_{OH^*}$  とする.  $J_r$  は2つの回帰行列の共通部分の割合として次式より算出する.

$$J_r = \frac{M - R_r}{1 - R_r}$$

$$M = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n} J_{m,n}$$

$$R_r = \sum_{m,n} J_{m,n}$$

$0 \leq J_r \leq 1$  をとり、 $J_r$  が大きくなるにつれて、2つの時系列は一般化同期に近づく. また、 $p'$  と  $W_{OH^*}$  の位相を用いて、 $r_{pq}$  を推定する.

$$r_{pq} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int e^{i[\theta_p(t) - \theta_q(t)]} dt$$

## 4. 結果および考察

### 4.1 燃焼振動の流体力学的構造の複雑さ

図3に位相空間の遅れ時間  $\tau$  を変化させたときの燃焼振動の速度変動  $u'$  の順列エントロピー  $H_p$  と Jensen-Shannon statistical complexity  $C_{JS}$  の変化を示す. ただし、ノズル出口付近からせん断層内の代表的な流線(図1)に沿った位置  $\mathbf{l}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 44$ ) の  $H_p$  と  $C_{JS}$  とする. ノズル出口付近の  $\mathbf{l}_1$  に着目すると、 $\tau =$



$6.67 \times 10^{-3} \text{ s}$ ,  $1.33 \times 10^{-3} \text{ s}$  のとき,  $H_p$  と  $C_{JS}$  は, それぞれ, 1 と 0 となる. この二つの遅れ時間差は, 燃焼振動の卓越した周波数成分の周期に対応する. 卓越した周波数成分は, 燃焼室入口を固定端, 出口を開放端としたときの燃焼室縦方向の  $1/4$  波長音響共鳴モードに対応しており, 圧力変動と速度変動の卓越周波数は一致している. ファンデルポール振動子に外部ノイズが印加させたときに生成される雑音周期振動では, 順列エントロピーと Jensen-Shannon statistical complexity が遅れ時間の変化に対して周期的に変化することが報告されている[10]. CECF に着目すると,  $\tau$  の変化に対して周期的に  $(H_p, C_{JS}) = (1, 0)$  に至るような軌道が描かれ, 外部ノイズが印加されたファンデルポール振動子の軌道と同様な振る舞いをする[10]. Noiray と Denisov [15] は, 燃焼振動の圧力変動は外部ノイズ項を有するファンデルポール振動子によって表されることを報告している. これらに基づくと, 燃焼振動のノズル出口付近の速度変動は雑音周期振動であり, ノイズが印加されたファンデルポール振動子のダイナミクスと等価であると考えられる.  $\tau$  の変化に対する  $H_p$  と  $C_{JS}$  の分布は, せん断層を移流する剥離渦による火炎面の巻き込み領域 ( $j = 17$ ) まで保持されている. そして, 火炎面の巻き込みが消滅し始める  $I_{18}$  で,  $H_p$  と  $C_{JS}$  の分布は大きく変化し, CECF に反時計回りの軌道が描かれ始める.  $I_{35}$  で  $H_p$  の極大値と  $C_{JS}$  の極小値が,  $\tau = 5.00 \times 10^{-4} \text{ s}$  で顕著に観察される. Zunino ら[10]の結果に基づくと,  $j \geq 18$  での燃焼振動の速度変動は雑音カオスであると言える. 雑音周期振動から雑音カオスへの遷移は, せん断層の代表的な流線のみならず, 速度変動の空間二次モーメントでも観察されている[16]. 図 4 に速度変動の動的モード分解のパワースペクトル分布と支配的なモードの空間分布を示す. 約 150 Hz の卓越した周波数ピークが観察され,  $1/4$  波長音響共鳴モードによって誘起される. また, 約 300 Hz の調和モードも観察される. これらのモードは, 雑音周期振動を形成しているノズル出口付近からせん断層の火炎巻き込み領域に対応する  $x = -20 \text{ mm}$ ,  $z = 1 \sim 40 \text{ mm}$  で顕著に現れる.  $j \geq 18$  での雑音カオスの形成には, これらのモードの寄与が小さくなると思われる.

図 5 に瞬時渦度場から構築された乱流ネットワークの強度分布  $P(s)$  を示す. 強度分布にはべき乗則が現われており, ネットワーク構造にスケールフ

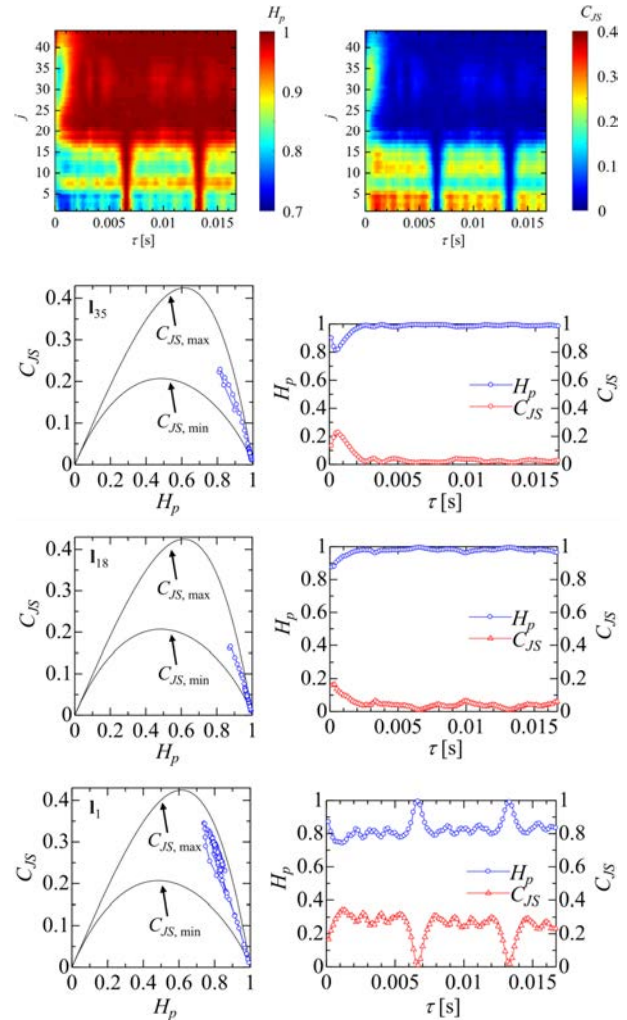


図 3 遅れ時間  $\tau$  を変化させたときの順列エントロピー  $H_p$  と Jensen-Shannon statistical complexity  $C_{JS}$  の変化ならびに CECF の軌道の変化[3]. ただし,  $I_1 = [-13 \text{ mm}, 4 \text{ mm}]$ ,  $I_{18} = [-17 \text{ mm}, 38 \text{ mm}]$ ,  $I_{35} = [-35 \text{ mm}, 72 \text{ mm}]$ , 当量比  $\phi = 0.78$  とする.

リー性が存在している. しかしながら, 図 5 は瞬時の渦度場に対する次数の強度分布であり, 乱流場の変化と対応しながら, ネットワーク構造も刻々と変化していくと考えられる. そこで, ネットワーク構造の時間的な変化にも着目し, 強度分布から得られるべき指数  $\gamma$  の決定係数  $R^2$  の時間変化を調べる. 図 6 に  $R^2$  の時間変化と確率分布  $P(R^2)$  を示す.  $R^2$  は刻々と変化しており,  $P(R^2)$  は  $R^2 \sim 0.88$  で最大となり, ガウス分布の形状となる.  $R^2 \geq 0.90$  を満たすときに, 強度分布にスケールフリー性を有するべき乗則が現れると定義すると, スケールフリー性を有するネットワーク構造は時系列全体の約 21% 存在する.

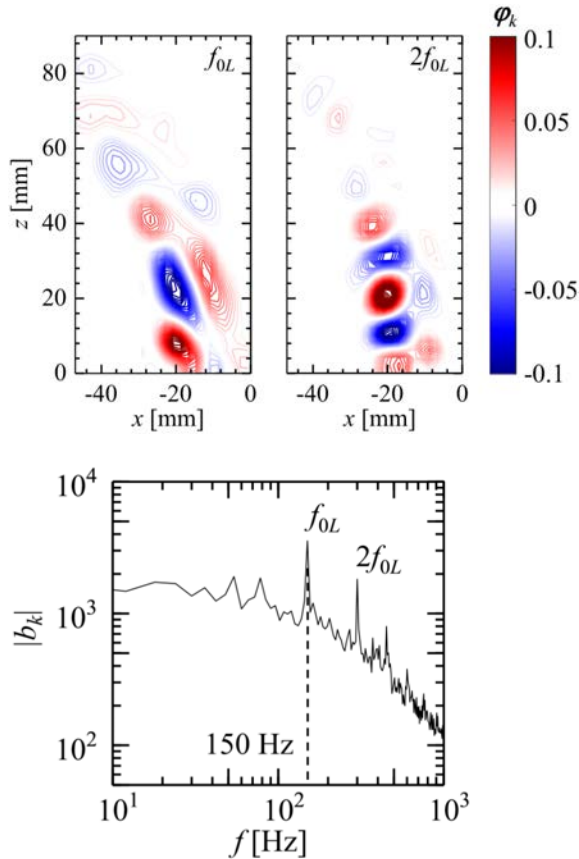


図4 速度変動の動的モード分解のパワースペクトル分布と支配的なモードの空間分布[3]. ただし、当量比 $\phi = 0.78$ とする.

このことは、常にスケールフリー性が形成されるとは限らないことを意味している. この点に着目して、本研究ではスケールフリー性が維持される時間を寿命時間  $t_d$  と定義し、寿命時間の確率分布  $P(t_d)$  を図7に示す.  $P(t_d)$  においても  $\gamma = -2.1$  の明瞭なべき乗則が存在する. 本研究グループでは、十分発達した乱流火災についても、スケールフリー性の寿命時間の確率分布にべき乗則が現れることを明らかにしている[17], [18]. 本研究で対象とする燃焼振動においても、乱流ネットワーク構造のスケールフリー性の出現、消滅と再出現を明らかにしたのは本研究が世界で初めてであり、乱流ネットワークの重要な性質であると考えている.

図8に強度  $s$  の空間分布とコミュニティ構造の時間変化を示す. ただし、時刻  $t = 0.501$  s は位相角  $\theta = 270^\circ$ ,  $t = 0.505$  s は  $\theta = 90^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ(270^\circ)$  は圧力変動の極大値(極小値)に対応し、中空のプロットはコミュニティの代表点である. また、コミュニティ同士のつながりの強さは線の太さで表現されて

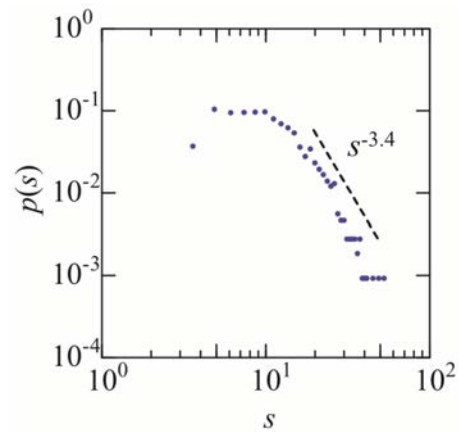


図5 瞬時渦度場から構築された乱流ネットワークの強度分布  $P(s)$ [3]. ただし、当量比 $\phi = 0.78$ とする.

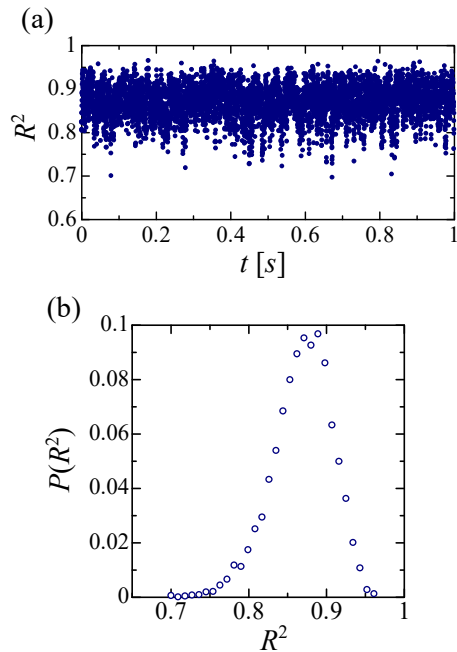


図6 (a) 決定係数  $R^2$  の時間変化, (b)  $R^2$  の確率分布  $P(R^2)$ . ただし、当量比 $\phi = 0.78$ とする.

いる.  $t = 0.501$  s のとき、 $z \sim 10$  mm で強度の強い **primary hub** が形成され、コミュニティ間の強い結合が **primary hub** 間で生じる. コミュニティー間の結合は  $t = 0.503$  s まで保持され、 $t = 0.505$  s になると、コミュニティ間の結合は弱くなる. 圧力変動が極大となると、ネットワーク構造の中核となる **primary hub** が消滅し、雑音カオスの形成領域で他のコミュニティ間の結合が不規則的に生じる. ノズル出口付近でコミュニティ間の強い結合を伴う周期的な剥離渦の形成が、燃焼振動の圧力変動の極小値に重要な役割を担っている. 図9に  $x$  軸に

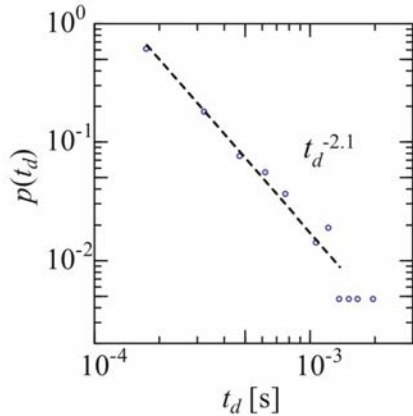


図 7 スケールフリー性の寿命時間  $t_d$  の確率分布  $P(t_d)$ [3]. ただし、当量比  $\phi = 0.78$  とする.

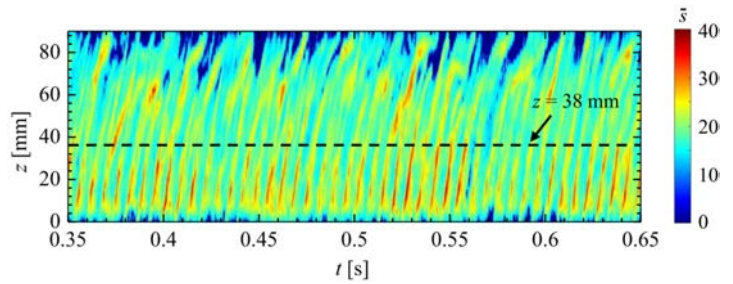


図 9  $x$  軸に関して  $s$  を空間平均した平均強度  $\bar{s}$  の時間変化[3]. ただし、当量比  $\phi = 0.78$  とする.

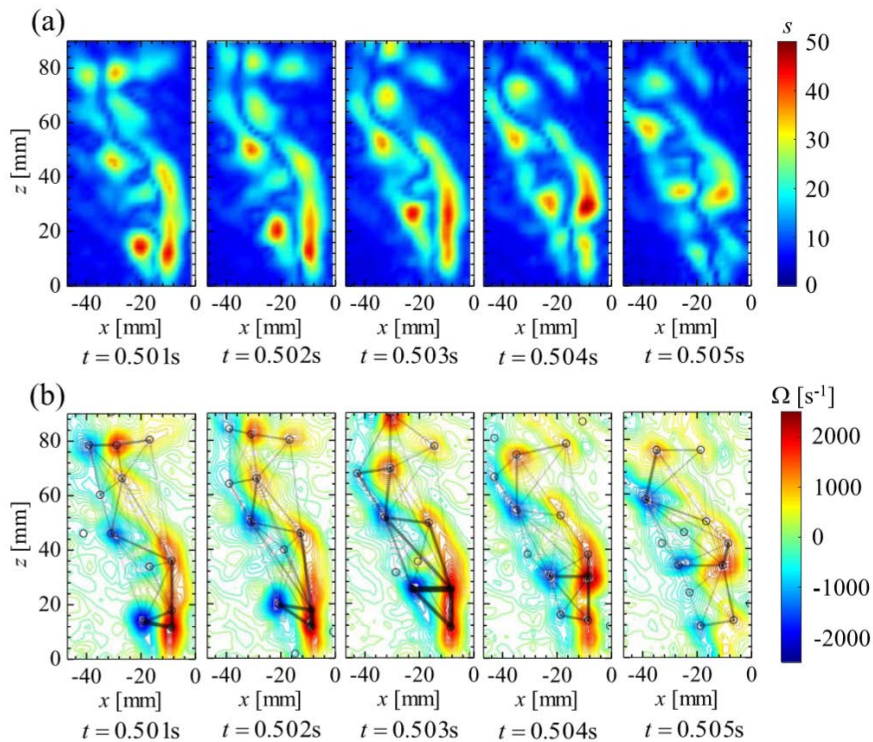


図 8 (a) 乱流ネットワークの強度  $s$  の空間分布と (b) 渦度場のコミュニティ構造の時間変化[3]. ただし、当量比  $\phi = 0.78$  とする.

対して  $s$  を空間平均した平均強度  $\bar{s}$  の時間変化を示す.  $0 < z < 38 \text{ mm}$  において  $\bar{s}$  が周期的に高くなり,  $z > 38 \text{ mm}$  に対しては  $\bar{s}$  が不規則的になる. つまり、雑音カオスの形成には、下流領域の不規則な primary hub の出現が重要な役割を演じている.

#### 4.2 圧力変動と発熱率変動の相互作用

図 10 にネットワークの強度  $s$  の空間分布、同期パラメータ  $r_l$  と当量比  $\phi$  の関係を示す.  $\phi$  の増加に伴い  $s$  の高い領域が緩やかにノズル出口付近に近づくこ

とがわかる. さらに  $\phi$  を増加させ、間欠的な燃焼振動が発生する  $\phi = 0.76$  になると  $s$  の高い領域が広範囲に及ぶ. そして、 $\phi > 0.76$  においてノズル出口付近から  $z = 50 \text{ mm}$  までの領域で  $s$  が高い値をとる. 他方、 $r_l$  は当量比の増加に伴って緩やかに増加し、発達した燃焼振動が形成される  $\phi > 0.76$  で  $r_l$  は約 0.4 に収束する. このことは、燃焼振動の発生により、渦崩壊による再循環流とダンプ領域の循環流とのせん断層において、強い相関をもつ頂点  $z_i$  が形成されることを意味している. Gomez-Gardenes ら[13]は、 $r_l$



$\geq 0$  のとき、ネットワーク上に局所的な位相同期状態が存在し、 $r_l$  の増加は位相同期の発達を示すことを報告している。Gomez-Gardenes ら[13]の研究に基づくと、燃焼振動の発生に伴うせん断層での  $\text{OH}^*$  自発光強度変動の周期性の増加により、複雑ネットワーク上の頂点群に時空間位相同期が形成されていると考えられる。図 11 に同期インデックス  $S_l$ 、レイリーインデックス  $R_l$  の空間分布と  $\phi$  の関係を示す。燃焼振動が生じる  $\phi \geq 0.77$  において、 $z = 10 \sim 40$  mm で  $S_l$  は高くなる。この領域は、 $R_l$  の空間分布で示される燃焼振動の駆動領域とほぼ対応する。このことから、 $S_l$  は燃焼振動の駆動領域を特定することが可能である。 $R_l$  の値は  $W'_{\text{OH}^*}$  や  $p'$  の大きさに依存するのに対して、 $S_l$  は 0 から 1 の範囲をとる。これらの結果から、本研究で提案する同期インデックスは圧力変動と発熱率変動の非線形相互作用が強く現れる燃焼振動の駆動領域の抽出に有用である。

最近、著者らの研究グループは、宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 数値解析技術ユニットとの共同研究[19]として、液体ロケットエンジンモデル燃焼器を対象に、高分解能 large-eddy simulation によって得られた燃焼振動の圧力変動と発熱率変動の相互作用に位相同期が存在することを明らかにしている。位相同期の存在は、集団同期を記述する秩序変数や位相場の同相存在率によって示され、燃焼振動の形成には位相場のコヒーレント構造とインコヒーレント構造の切り替わりが重要であることを明らかにしている。さらに、移動エントロピーを用いて、発熱率変動から圧力変動へ、圧力変動から発熱率変動への情報エントロピーの輸送方向を考慮することで、両者の因果関係を明らかにしている。特に、圧力変動の振幅が増幅するときに、両者の因果関係が切り替わることを明らかにしている。本研究においても、従来の研究[19]と同様の方法論を適用していくことで、燃焼振動の圧力変動と発熱率変動の相互作用により詳細な検討を加えることが可能である。

## 5. まとめ

本稿では、複雑ネットワークと同期をキーワードに、燃焼振動の時空間ダイナミクスの一端を紹介した。スワロー中心軸上の渦崩壊とダンブ領域の循環流とのせん断層において、雑音周期振動と雑音カオスが形成される。雑音周期振動の

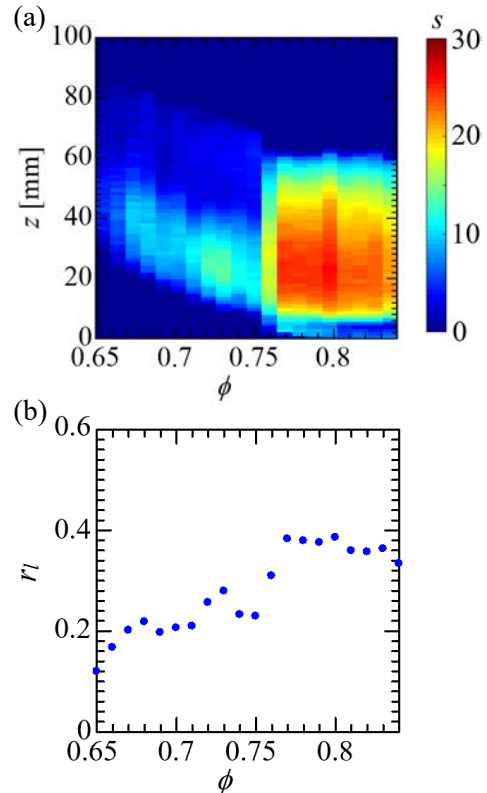


図 10 (a) ネットワークの強度  $s$  と当量比  $\phi$ , (b) 同期パラメータ  $r_l$  と当量比  $\phi$  の関係[4].

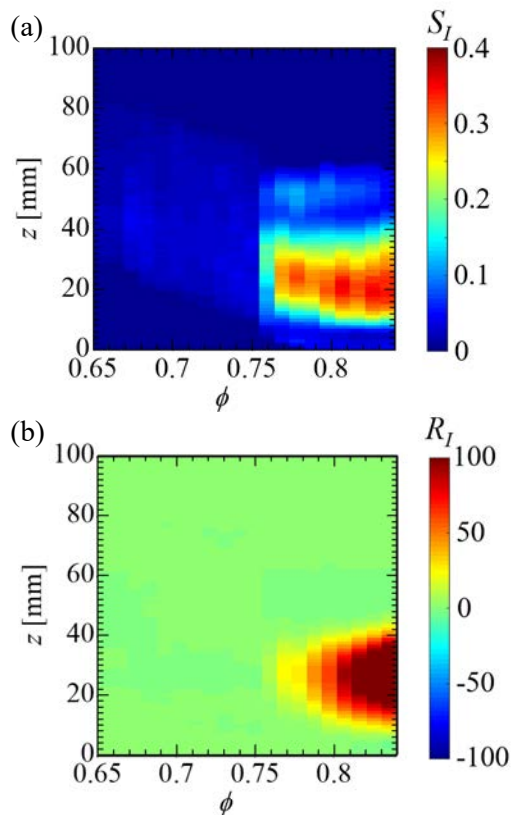


図 11 (a) 同期インデックス  $S_l$  と当量比  $\phi$  の関係, (b) レイリーインデックス  $R_l$  と  $\phi$  の関係[4]



形成領域において、乱流ネットワーク構造内に高い次数を有する primary hub が周期的に現れる。雑音カオスの形成には、下流領域の不規則な primary hub の出現が重要な役割を演じている。乱流ネットワーク構造にスケールフリー性が不規則的に現れ、その寿命時間にべき乗則が存在する。せん断層での OH\* 自発光強度変動の強い周期性が、複雑ネットワーク上の頂点群に時空間位相同期を形成される。本研究で提案する同期インデックスは、圧力変動と発熱率変動の相互作用が強く現れる燃焼振動の駆動領域の推定に有用である。

#### 謝辞

本研究は、科研費基盤研究(B) 16H04284 と 19H02085 によって実施されたものである。ここに深く感謝の意を表す。

#### 参考文献

- [1] T. C. Lieuwen, *Unsteady Combustor Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012).
- [2] 西川 崇, 結合振動子ネットワークの同期現象, 数理科学 **44**, 42 (2006).
- [3] S. Murayama, H. Kinugawa, I. T. Tokuda, and H. Gotoda, Characterization and detection of thermoacoustic combustion oscillations based on statistical complexity and complex-network theory, *Physical Review E* **97**, 022223 (2018).
- [4] S. Murayama and H. Gotoda, Attenuation behavior of thermoacoustic combustion instability analyzed by complex-network- and synchronization-based approach, *Physical Review E* **99**, 052222 (2019).
- [5] H. Gotoda, H. Kinugawa, R. Tsujimoto, S. Domen, Y. Okuno, Characterization of combustion dynamics, detection and prevention of an unstable combustion state based on a complex-network theory, *Physical Review Applied* **7**, 044027 (2017).
- [6] P. W. Lamberti, M. T. Martin, A. Plastino, O. A. Rosso, Intensive entropic non-triviality measure, *Physica A* **334**, 119 (2004).
- [7] C. Bandt and B. Pompe, Permutation entropy: A natural complexity measure for time series, *Physical Review Letters* **88**, 174102 (2002).
- [8] O. A. Rosso, H. A. Larrondo, M. T. Martin, A. Plastino, and M. A. Fuentes, Distinguishing noise from chaos, *Physical Review Letters* **99**, 154102 (2007).
- [9] F. Takens, *Dynamical Systems of Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 898 (Springer-Verlag, Berlin, 1981).
- [10] L. Zunino, M. C. Soriano, and O. A. Rosso, Distinguishing chaotic and stochastic dynamics from time series by using a multiscale symbolic approach, *Physical Review E* **86**, 046210 (2012).
- [11] K. Taira, A. G. Nair, and S. L. Brunton, Network structure of two-dimensional decaying isotropic turbulence, *Journal of Fluid Mechanics* **795**, R2 (2016).
- [12] V. D. Blondel, J. L. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefebvre, Fast unfolding of communities in large networks, *Journal of Statistical Mechanics*, P10008 (2008).
- [13] J. Gomez-Gardenes, Y. Moreno, and A. Arenas, Paths to synchronization on complex networks, *Physical Review Letters* **98**, 034101 (2007).
- [14] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, Recurrence plots for the analysis of complex systems, *Physics Reports* **438**, 237 (2007).
- [15] N. Noiray and A. Denisov, A method to identify thermoacoustic growth rates in combustion chambers from dynamic pressure time series, *Proceedings of the Combustion Institute* **36**, 3843 (2017).
- [16] 村山 聖悟, 二次空気噴射制御による燃焼振動の時空間位相同期の減衰過程, 東京理科大学大学院 修士論文 (2019).
- [17] K. Takagi, H. Gotoda, T. Miyano, S. Murayama, and I. T. Tokuda, Synchronization of two coupled turbulent fires, *Chaos* **28**, 045116 (2018).
- [18] K. Takagi and H. Gotoda, Effect of gravity on nonlinear dynamics of the flow velocity field in turbulent fire, *Physical Review E* **98**, 032207 (2018).
- [19] T. Hashimoto, H. Shibuya, H. Gotoda, Y. Ohmichi, and S. Matsuyama, Spatiotemporal dynamics and early detection of thermoacoustic combustion instability in a model rocket combustor, *Physical Review E* **99**, 032208 (2019).