

■特集/FEATURE■

—燃焼研究における複雑系の数理科学—同期現象と複雑ネットワーク—

Mathematical Science of Complex System in Combustion Researches -Synchronization phenomena and Complex Networks-

燃焼研究における複雑系科学の新地平

Vastness of Complex System Science in Combustion Researches

後藤田 浩*

GOTODA, Hiroshi*

東京理科大学工学部機械工学科 〒125-8585 東京都葛飾区新宿 6-3-1

Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science, 6-3-1 Niijuku, Katsushika, Tokyo 125-8585, Japan

複雑な非線形散逸現象を動力学モデルとして縮約し、その解の分岐構造や相空間内のカオス^{*1}・フラクタル構造を解き明かす力学系理論は、応用数学分野で体系化が進んでいる。動力学モデルについて勉強すると興味深い現象がある。それは、動力学モデル同士を結合させると、解の同期が起こることである。同期は17世紀のホイヘンスによる振り子実験に始まって、通信だけでなく、概日リズム、ホテルの集団発光でも見られる現象であり、近年、流体分野においても着目されつつある。同期現象を取り扱うためのさまざまな方法論も提案されており、その一つとして有名でかつ広く用いられているのが、集団同期の古典的なモデルとして知られる蔵本モデル^{*2} [1]であろう。また、結合振動子の同期と実社会で見られる多様な複雑ネットワーク^{*3}との関わりも着目されている[2]。複雑ネットワークは、18世紀にオイラーらによって創始されたグラフ理論をもとにしたものであり、インターネット、交通網や人間関係など、現代社会の身近なところで存在する。よって、複雑ネットワークは、応用数学分野のみならず、社会学や通信などの分野でも興味を引くものの一つである。このように、複雑系科学はこの数十年間で目覚ましい進歩をとげ、新しいパラダイムを創出しており、燃焼分野における非線形問題の新しい展開へ寄与していくことが期待される。

そこで、本特集号は「同期(Synchronization)」と「複雑ネットワーク(Complex network)」をキーワードとした最新の燃焼研究と関連研究を取り上げた。複雑系科学の特集号を企画して改めて感じることもある。それは、燃焼学者が解明しようとする燃焼の物理と物理学者が解明しようとする燃焼の物理には、両者で大きな差があることである。これは、中村と松岡の特集記事5. おわりにからも率直に伝わってくる。中村祐二先生の「燃焼学を生業とする研究者は物理

モデルに対する考察は得意であるが、純物理学者のような思い切った簡略化・モデル化は不得手である。」という指摘がある。私も基本的には同じ考えではあるが、おそらく、燃焼研究者の多くは物理学者が好むような大胆なモデル化を嫌っているのではと思っている。ただ、動力学モデルの構築[3,4]や非線形発展方程式(例えば、noisy generalized Kuramoto-Sivashinsky 方程式^{*4})の時空構造解[5]を調べるような理論的・数値解析的研究を進めるようになってからは、物理学・応用数学研究者らの研究アプローチの仕方も理解できる。

最近、工学系出身の研究者が"Applied Science"を意識し、物理系雑誌へ研究成果を積極的に発表したり、東京大学工学部・工学研究科が出版した工学教程シリーズ[6,7]に、動力学モデルや複雑ネットワークなどの内容も盛り込んだり、工学系出身者にとって複雑系科学は敷居の高いものではなくてきていると感じている。しかし、「複雑系」という言葉は、それそのものが曖昧であり、定義も明確になっていないと言え、研究者間で主観的な概念で解釈されているように思われる。「曖昧さを科学する複雑系科学」が燃焼現象の学理体系化やその先にある工学的応用に対して、どのように活かされていくのか。その問いにはある程度までは答えられるが、十分までとはいかない。データサイエンスとも関わり深い複雑系科学は、ここ数年間、燃焼振動に関する研究に積極的に適用され、流体力学の学術誌 *Journal of Fluid Mechanics* のみならず、*Physical Review* 系や *Nature* の姉妹紙である *Scientific Reports* にもその成果が多く報告されつつある。

本特集号の同期と複雑ネットワークを取り扱った多彩な4件の研究を通じて、まずは、燃焼分野における複雑系科学の面白さと意義の深さを感じてもらえれば、企画者の一人として嬉しい。最後に、山口大学 三上真人 編集委員長をはじめとした編集員全員からの後押しにより、本特集号

* Corresponding author. E-mail: gotoda@rs.tus.ac.jp

を企画させて頂いたことに深く御礼申し上げます。

「隣接するフリッカリング火炎の共鳴現象ダイナミクス」 (中村祐二, 松岡常吉)

本論文は、二つのフリッカリング火炎の同期現象を取り扱ったものである。同相と逆相、いわゆる「位相同期」が層流バーナー上で形成されるフリッカリング火炎で生じることを発見している。化学反応によって創発された非線形現象としてよく知られている BZ 反応の解説も盛り込まれている。Kitahara et al. [8]によって提案された動力学モデルの弱点、特に、フリッカリングの基本的なメカニズムである浮力によって誘起されるレーリーテイラー不安定が考慮されていないことを論じている。実験のみならず、数値シミュレーションでも位相同期の存在を明らかにしている。燃焼学者と物理学者の物理に対するそれぞれの取り組み方の違いや、燃焼研究における非線形現象への姿勢も語られている。Global instability 解析を用いたさらなる同期現象の解明も試みられており、今後の新たな展開が期待される。

「乱流火炎の時空構造の複雑さと同期」

(後藤田 浩, 高木 一至, 徳田 功, 宮野 尚哉)

本論文は、統計力学的複雑さと複雑ネットワークの視点から乱流火炎のダイナミクスを調べ、火炎の同期の一端を明らかにしたものである。乱雑さと非平衡性の積として定義した複雑さに着目し、乱流火炎の上流領域では低次元カオスが、下流領域では高次元カオスが形成されることを示している。高次元カオスの定義は用語説明 1 に基づいており、十分発達した下流領域の乱流火炎 = 大自由度の高次元カオスと解釈している。短期予測可能・長期予測不能性をエントロピーで説明している。乱流火炎を弱非線形の範疇で理解できそうな非周期的構造と大自由度系で観察される強非線形の非周期構造で理解してもよいのかもしれない。渦同士の相互干渉に着目した乱流ネットワークにスケールフリー性^{*5}が存在し、この二つの乱流火炎を結合させると、上流領域でカオス同期が、下流領域で非同期が形成されることを明らかにしている。スケールフリー構造の寿命時間の確率密度関数にべき乗則が存在することや、スケールフリー構造を持った乱流火炎の時空構造に同期が起きることを示したのは、おそらく、この研究が世界で初めてではないかと思う。

乱流火炎の同期の研究を始めたきっかけだけ述べさせて頂く。2008年、米国 Waterville で開催されたゴードン会議「Oscillations and Dynamic Instabilities in Chemical Systems」で巡回流予混合火炎のカオス[9]に関する研究発表を行ったときに、ろうそくの炎が同期することを知った。このとき、共同研究者の一人である宮野尚哉先生と「火炎の乱流同期の一端が明らかになれば独自の研究が展開できるかもしれないし、動力学モデルのカオス同期と関連づけられれば、物理学において世界初の研究になるのでは」と議論し合った。

そして、著者が立命館大学に所属していたときから地道に研究を続けてきた。火炎の乱流同期が火災研究に繋がることは、弘前大学 伊藤昭彦先生らの研究論文[10,11]からもヒントを得ていた。ろうそくの炎の同期の存在を知ってから、約10年後、著者らの研究は米国物理学協会の学術誌 *Chaos* から依頼を受け、同誌の特集号「In Memory of John L. Hudson: Self-Organized Structures in Chemical Systems」に原著論文[12]として公開された。

「熱音響振動の振動制御に関する研究」

(琵琶哲志, 兵頭弘晃)

本論文は、燃焼振動を対象とした熱音響振動の振動抑制に関する研究である。レーリーの教科書にある熱音響振動の種類と自励振動、自励振動系の振動停止現象の概要を解説している。非線形振動子として有名なファンデルポール振動子のエネルギーの生成・散逸に着目し、振動の安定性が解説されている。2つの振動子の固有振動数の差と相互作用強さの関係図も詳しく説明されており、ピラガスのカオス制御とも関わりのある時間遅れ結合も解説されている。著者らは Sondhauss 型の熱音響振動系を結合させた実験を行っており、ニードルバルブの開度を調節することで、振動停止が起こり、上述の関係図と同様の結果を得ている。燃焼振動のメカニズムを模擬した音響振動子を用いた実験も行われている。ガスタービンエンジンなどでは、複数の燃焼器が環状に配置されている。よって、個々の燃焼器を結合システム系と見なし、燃焼振動停止の有無を明らかにする研究が展開されていくと面白いかもしれない。

「Transition to thermoacoustic instability in a turbulent combustor」(S. A. Pawar and R. I. Sujith)

本論文は、力学系理論や同期理論の考え方を取り入れて、燃焼騒音 → 間欠振動 → 燃焼振動のダイナミクスを明らかにしたものである。力学系理論に基づいた解析手法として、リカレンスプロット^{*6}が用いられている。燃焼騒音のとき、リカレンスプロットは大ききの異なる正方形や長方形で構成されているが、燃焼振動のときには斜線構造が現れている。このときの斜線長さの存在確率を用いた情報エントロピーが燃焼騒音から燃焼振動への遷移を捉えることが可能であり、リカレンスプロットの定量化が燃焼振動の検知に有用であると説明している。本論文では、完全同期、位相同期、一般化同期の簡単な解説もされている。そして、燃焼騒音では非同期が、燃焼振動が発生すると位相同期が、十分発達した燃焼振動では一般化同期が、圧力変動と OH^{*} 自発光強度変動間で形成されることを明らかにしている。

本論文では詳細は紹介されていないが、著者らは蔵本モデルにおける同期状態を定量化した秩序変数^{*7}も導入している[13]。本来、秩序変数は、集団同期を議論するとき用いられるものである。著者らは、燃焼振動が圧力変動と熱発生率変動の相互干渉によって保持されている点に着目し、秩序変数の使用について発想の転換を行っている。具

体的には, 圧力変動と OH^* 自発光強度変動をそれぞれ振動子として見立て, その相互作用を秩序変数で定量化している. 燃焼振動の研究で頻繁に使用されるレーリーインデックスも両変動の相互作用を議論するときに用いられるが, 秩序変数は位相情報だけに着目しており, 非常にシンプルで理解しやすい. 著者らは秩序変数の空間分布や位相情報をベクトル場で示すなど[13], 同期理論は燃焼振動の状態を可視化するための新しいツールとしても期待される. 私の研究グループでも宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 数値解析技術研究ユニット 松山新吾 主任研究員らとの共同研究として, Large-eddy simulation によって得られたロケットモデル燃焼器内の燃焼振動の時空構造にも秩序変数を導入している[14,15].

本論文では, 複雑ネットワークとの関わりが含まれていないが, 圧力変動からネットワークを組み, その次数^{*8}や平均頂点間距離^{*9}を燃焼振動や吹き消えの検知器として用いるような試みも行われている[16]. また, 燃焼騒音のときの圧力変動にスケールフリー性が存在することも明らかにしている[17]. 燃焼振動の研究を精力的に進めている Prof. Tim C. Liewen らの研究グループらとの論文[18]も含め, ここ数年間, この分野の競争が激化している. 私の研究グループらもその一角に食い込んでいると自負しているが (H. Gotoda et al., *Physical Review Applied* 7, 044027, 2017; H. Kobayashi et al., *Journal of Applied Physics* 122, 224904, 2017; S. Murayama et al., *Physical Review E* 97, 022223, 2018; Kasuya et al., *Chaos* 28, 033111, 2018; S. Murayama et al., 38th *International Symposium on Combustion Institute*, Oral presentation, 2018 (accepted)), 今後, 機械学習[19]を含めたデータサイエンスをキーワードに, 燃焼振動の新たな学理体系化が世界的に進んでいくと考えている.

用語説明

燃焼研究者にとって, 複雑系数理学で用いられる言葉にはあまり馴染みがない. 本特集号を解説するにあたり, 用語説明を加えさせて頂いた.

*1 カオスとは, 少数自由度の決定論的な力学系から生み出される短期予測可能・長期予測不可能な運動のこと. 大自由度のカオスを乱流と考えることもできる[20].

*2 蔵本モデルは多くのリミットサイクル振動子が集まったときの引き込み現象を表すモデルである. 複数の振動子を考え, i 番目の振動子の位相を ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) すると, 位相の時間変化は次式で表される.

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j \neq i} \Gamma_{ij}(\phi_i, \phi_j)$$

ただし, Γ_{ij} を結合関数, ω_i を i 番目の振動子の角速度, N を振動子の総数とする. 例えば, Γ_{ij} を位相差 ($\phi_i - \phi_j$) の周期関数とすると, 最も簡単なものは次式となる.

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i)$$

ただし, K を結合強さとする. なお, 右辺第 2 項では, 相互作用の大きさが振動子数に左右されないように N で除かれている. このような位相方程式を蔵本モデルと呼ぶ.

*3 複雑ネットワークは厳密に定義されていないが, 不均一性を有する大規模ネットワークとして認識されている. 対象物の要素間の関係性 (相互作用) だけを抽出し, 関係性を点と線で構成されるネットワークに置き換える. 例えば, 鉄道網の場合, 駅を点, 路線を線としたネットワークとなる. また, 人間を点, 人間関係を線とすると, 抽象的な人間関係もネットワークで表現できる. このとき, 点と線はそれぞれ頂点 (ノード), 枝 (エッジ) と呼ばれる. 複雑ネットワーク全般については, 参考文献[21,22]が詳しい.

*4 液膜流のダイナミクスを記述する Kuramoto-Sivashinsky 方程式 (通称, KS 方程式) は, 時空カオスを生成する非線形発展方程式として流体物理解分野ではよく知られている. KS 方程式は, 蔵本モデルを提案した蔵本 由紀 京都大学 名誉教授と Prof. George I. Sivashinsky によって共同で提案されたものではなく, 両者が同時期に別々の研究で発表したものである. 基礎燃焼分野では, KS 方程式は Sivashinsky 方程式と呼ばれており, セル状火炎のダイナミクスを記述する非線形発展方程式として知られている. Sivashinsky 方程式を用いて, 熱物質拡散と流体力学的不安定性を考慮した予混合火炎面のフラクタル特性が, 桑名らの研究グループによって明らかにされている[23].

*5 一般的に, べき乗則はスケール不変性をもつ. 複雑ネットワークと呼ばれるネットワークにおいては次数分布がべき乗則に従う. このような特徴をスケールフリー性と呼び, フラクタル性と関わっている. 次数分布は, 次数の確率密度関数として表わされる. これを情報エントロピーに考慮すると, ネットワークエントロピーもしくはグラフエントロピーとして定義できる. ネットワークエントロピーは, 周期倍分岐構造の乱雑さの変化を捉えることができ, 輻射熱損失の影響を受けた非定常次元拡散火炎のダイナミクス[24]や noisy generalized KS 方程式の時空構造解[5]に適用されている.

*6 リカレンスプロットは, 位相空間内[25]の軌道上の点の 2 点間距離を i, j の座標軸から構成される 2 次元平面上に binary plot として表示させたもの. 黒色の点が 2 次元平面上に不均一に分布していれば, ダイナミクスはランダム過程に支配されていると判断できる. ここでは, 圧力変動から位相空間が構築されている. また, 二つの振動子間で同期が起きているかどうかを調べるものとして, クロスリカレンスプロットが Marwan ら[26]によって提案されてお

り, 乱流火災の同期[12]に適用されている.

*7 振動子ごとの位相を複素平面上にプロットし, プロットを質点とみなしたときの重心と原点との距離が秩序変数 W である. すべての振動子の位相が揃うとき, $W = 1$, すべての振動子の位相がばらばらになるとき, $W = 0$ となる.

$$W = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \right|$$

*8 ネットワーク内の一つの頂点が接続する枝の数を次数としよう. 各頂点の次数は隣接行列を用いて表現できる.

*9 ネットワーク内のある頂点から別の頂点までに到達するまでにはいくつかの経路がある. 経路が最短となるときの距離を平均頂点間距離という.

References

1. Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Dover Books and Chemistry (2003).
2. 西川崇, 数理科学 44, 42 (2006).
3. H. Gotoda, R. Takeuchi, Y. Okuno, and T. Miyano, *Journal of Applied Physics* 113, 124902 (2013).
4. S. Kondo, H. Gotoda, T. Miyano, and I. T. Tokuda, *Physica D* 364, 1 (2018).
5. H. Gotoda, M. Pradas, and S. Kalliadasis, *Physical Review Fluids* 2, 124401 (2017).
6. 東京大学工学教程 システム理論 I, 丸善出版 (2015).
7. 東京大学工学教程 システム理論 II, 丸善出版 (2016).
8. H. Kitahata, J. Taguchi, M. Nagayama, T. Sakurai, Y. Ikura, A. Osa, Y. Sumino, M. Tanaka, E. Yokoyama, and H. Miike, *Journal of Physical Chemistry A* 113, 8164 (2009).
9. H. Gotoda, T. Miyano, and I. G. Shepherd, *Physical Review E* 81, 026211 (2010).
10. 伊藤昭彦, 工藤祐嗣, K. Saito, 日本火災学会論文集 54, 9 (2004).
11. 福田真弓, 工藤祐嗣, 伊藤昭彦, 日本火災学会論文集 56, 45 (2006).
12. K. Takagi, H. Gotoda, T. Miyano, S. Murayama, and I. T. Tokuda, *Chaos* 28, 045116 (2018).
13. S. Mondal, V. R. Unni, and R. I. Sujith, *Journal of Fluid Mechanics* 811, 659 (2017).
14. 澁谷朔, 橋本達也, 後藤田浩, 大道勇哉, 松山新吾, 日本航空宇宙学会 第49期年会講演会 (2018).
15. 澁谷朔, 橋本達也, 後藤田浩, 大道勇哉, 松山新吾, 第55回伝熱シンポジウム講演予稿集 (2018).
16. M. Murugesan and R. I. Sujith, *Journal of Propulsion and Power* 32, 707 (2016).
17. M. Murugesan and R. I. Sujith, *Journal of Fluid Mechanics* 772, 225 (2015).
18. S. Suresha, R. I. Sujith, B. Emerson, and T. Lieuwen, *Physical Review E* 94, 042206 (2016).
19. 林優人, 小林大晃, 橋本達也, 船津基以, 後藤田浩, 第54回燃焼シンポジウム講演予稿集 (2016).
20. 佐野雅己, 瀬川武彦, 数理科学 36, 22 (1998).
21. 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワーク-基礎から応用まで, 近代科学社 (2010).
22. M. E. J. Newman, *Networks*, Oxford University Press (2010).
23. K. Mukaiyama, S. Shibayama, and K. Kuwana, *Combustion and Flame* 160, 2471 (2013).
24. H. Kinugawa, K. Ueda, and H. Gotoda, *Chaos* 26, 033104 (2016).
25. 後藤田浩, 日本燃焼学会誌 57, 183 (2015).
26. N. Marwan, M. C. Romano, T. Thiel, and J. Kurths, *Physics Report* 438, 237 (2007).