LANDAU-GINZBURG 型方程式の解の漸近的振る舞いについて

林　仲夫

次の非線型消散型方程式について考える.

$$(0.1)\qquad \begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0,\ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

ここで $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\Re\alpha > 0$ とする. 次の仮定をもうける. $\Re\delta \geq 0$, ここで $\delta = \delta(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{2|\alpha|^2+\alpha^2}}$ とする. 方程式 (0.1) は複素 Landau-Ginzburg 方程式と呼ばれるものであり, ここでの目的は解の時空間に関する漸近的振る舞いについて考えることである. なお解の存在についてはすでに多くの研究がなされている. (例えば [4], [5], [8] 参照). また

$$u_t - u_{xx} - u^p = 0, 1 < p \leq 3, u(0,x) = u_0(x) > 0$$

の解の爆発についての研究は [2], [6], [7]. 解の漸近的振舞いについては [1], [3] によって方程式

$$u_t - u_{xx} + u^3 = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) > 0$$

に対して研究されている. 注意すべき点は解の $\mathbf{L}^\infty$ norm の時間減衰が $t^{-1/2}$ より早いことである. 我々の結果を述べるためにいくつかの関数空間と記号を準備する. 重みつきのソボレフ空間を次のように定義する.

$$\mathbf{H}^{m,s} = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2; \|\phi\|_{m,s} = \|\langle x\rangle^s \langle i\partial_x\rangle^m \phi\| < \infty \right\},$$

$m, s \in \mathbf{R}^+$, $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$. $\mathbf{C}(\mathbf{I};\mathbf{B})$ によって区間 $\mathbf{I}$ から Banach space $\mathbf{B}$ への連続関数全体の集合を表すことにする。次の関数空間を準備する.

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}^{1,0} \cap \mathbf{H}^{0,1} \text{ with } \|\phi\|_{\mathbf{W}} = \|\phi\|_{1,0} + \|\phi\|_{0,1}.$$

我々の結果についてのべることにする.

Theorem 0.1. *We assume that $u_0 \in \mathbf{W}$ with sufficiently small norm $\|u_0\|_{\mathbf{W}} = \varepsilon$ and $\theta = \left|\int u_0(x)\,dx\right| > 0$. Then there exists a unique solution*

$$u(t,x) \in \mathbf{L}^\infty((0,\infty)\times\mathbf{R}) \cap \mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{W})$$

satisfying the following time decay estimate

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+t}\sqrt{1+\eta\log(1+t)}},$$

if $\eta = \frac{\theta^2}{2\pi}\Re\delta > 0$, and

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+t}\sqrt[4]{1+\mu\log(1+t)}},$$

if $\eta = 0$, $\mu = \frac{\theta^4(\Im\delta)^2}{(4\pi)^2}\Re(2\nu_1 - \nu_2) > 0$, finally

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+t}\sqrt[6]{1+\varkappa\log(1+t)}},$$

[1]This is a joint work with E.I.Kaikina and P.I.Naumkin

Date: 4月２２日, 2000.

if $\eta = 0$, $\mu = 0$, $\varkappa > 0$, *where* $\varkappa$ *is a positive constant determined by* α *and* β. *Furthermore the following asymptotic formulas of the solution are valid*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\theta}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \frac{1}{\sqrt{1+\eta\log t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t} - \frac{i\omega}{\eta}\log\log t + i\arg\widehat{u}_0(0)\right) \\ &\quad + O\left(\frac{\varepsilon^{5/2}}{\sqrt{t\log t}\log t}\right), \end{aligned}$$

if $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\theta}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \frac{1}{\sqrt[4]{1+\mu\log t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t} - \frac{2i\omega}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\log t} + i\arg\widehat{u}_0(0)\right) \\ &\quad + O\left(\frac{\varepsilon^{3}}{\sqrt{t}\sqrt[4]{\log t}\sqrt{\log t}}\right), \end{aligned}$$

if $\eta = 0$, $\mu > 0$, *and finally*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\theta}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \frac{1}{\sqrt[6]{1+\varkappa\log t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t} - \frac{3i\omega}{2\sqrt[3]{\varkappa}}\sqrt[3]{\log^2 t} + i\arg\widehat{u}_0(0)\right) \\ &\quad + O\left(\frac{\varepsilon^{3}}{\sqrt{t}\sqrt[6]{\log t}\sqrt[3]{\log t}}\right), \end{aligned}$$

if $\eta = 0$, $\mu = 0$, *where* $\omega = \frac{\theta^2}{4\pi}\Im\delta(\alpha,\beta)$.

References

[1] J.Bricmont, A.Kupiainen and G.Lin, *Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations*, Commun Pure Appl. Math. **13 (**1994**),** pp. 894-922.

[2] H.Fujita, *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, **13 (**1966), pp. 109-124.

[3] V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov and A.A. Samarskii, *On asymptotic eigenfunctions of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation,* Math. USSR Sbornik **54** (1086), pp. 421-455.

[4] J. Ginibre and G. Velo,*The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. I. Compactness methods,* Physica D, **95**, (1996), pp. 191-228.

[5] J. Ginibre and G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. II. Contraction methods*, Commun. Math. Phys., **187** (1997), pp. 45-79.

[6] K. Hayakawa, *On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), pp. 503-505.

[7] K.Kobayashi, T.Sirao and H.Tanaka, *On the growing up problem for semi-linear heat equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), pp. 407-424.

[8] N.Okazawa and T.Yokota, *Perturbation theorems for m-accretive operators applied to the nonlinear Schrödinger and complex Ginzburg-Landau equations,* preprint 1998.

東京理科大学理学部

E-mail address: `nhayashi@rs.kagu.sut.ac.jp`