ポテンシャル項をもつ非線型波動方程式の小さな初期値に対する大域可解性について

久保 英夫 (静岡大学工学部)

1 はじめに

$V(x)$ を $\mathbf{R}^3$ 上の関数, p を $p>1$ なる実数として, 次のようなポテンシャル項をもつ半線型波動方程式を考える:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = |u|^p \quad \text{in } [0,\infty)\times\mathbf{R}^3. \tag{1.1}$$

ここでは, この方程式に対する初期値問題の古典解の適切性について調べる. 記述を簡単にするため, 初期データの台はコンパクトであると仮定する. まず, $V(x)\equiv 0$ の場合, F. John [5] によって次のことが示された. 即ち, 初期データがある意味で十分小さければ, $p>1+\sqrt{2}$ のとき, (1.1) の初期値問題は C^2 級の時間大域解をもつ. 逆に, $1<p<1+\sqrt{2}$ ならば, 初期データを上手く選ぶと有限時間内に古典解が爆発する.

この結果は, W. Strauss and K. Tsutaya [7] により, $V(x)\not\equiv 0$ の場合に次のように拡張された. ポテンシャルが, $V_0>0, l>2$ に対して

$$\sum_{|\alpha|\le 2} |\partial_x^\alpha V(x)| \le \frac{V_0}{(1+|x|)^l} \quad \text{for } x\in\mathbf{R}^3 \tag{1.2}$$

を満たすとする. もし V_0 が十分小さければ, 存在定理に関して, $V(x)\equiv 0$ のときと同じ主張が成り立つ. 他方, $C>0$ に対して

$$0 \le -V(x) \le \frac{C}{(1+|x|)^2} \quad \text{for } x\in\mathbf{R}^3 \tag{1.3}$$

ならば, 解の爆発について, やはり $V(x)\equiv 0$ のときと同じ結果が成り立つというものである.

ここでの目的は, 存在定理を示す際に, [7] において仮定されたポテンシャルが十分小さいという条件を課さずに済むような枠組みを与えることである. この場合, もはや (1.1) において $V(x)u$ を摂動項とみなすことができないので, $\partial_t^2 u-\Delta u+V(x)u$ をこの方程式の主要部とみなさなければならず, その扱いは複雑になると思われる. 実際

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } [0,\infty)\times\mathbf{R}^3 \tag{1.4}$$

に対する初期値問題の解が初期データを使って具体的に表示できるのと異なり

$$\partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = 0 \quad \text{in } [0,\infty)\times\mathbf{R}^3 \tag{1.5}$$

の解を表示することは難しい. また, $-\Delta+V(x)$ が固有値を持つときには, 時間無限大で減衰しない (1.5) の非自明解を構成することができる. こうした困難にもかかわらず, M. Beals and W. Strauss [1] は次のような Strichartz タイプの評価式を導いている.

命題 1.1　ポテンシャル $V(x)$ は滑らかな関数で, 空間無限遠方で十分速く減衰し, かつ

$$V(x) \geq 0 \quad for\ x \in \mathbf{R}^3 \tag{1.6}$$

を満たすものとする. このとき

$$u(0,x) = f(x), \quad \partial_t u(0,x) = g(x) \quad in\ \mathbf{R}^3 \tag{1.7}$$

を満たす *(1.5)* の解 $u(t,x)$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbf{R}^3)} \leq Ct^{-1/2}(\|f\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}) \quad for\ t > 0 \tag{1.8}$$

が成り立つ. ただし, p は $4/3 \leq p \leq 2$ なる実数で, q は p の共役指数とする.

注意:　上の結果は, より一般に, 空間次元が 3 次元以上の場合に示されている (詳しくは [1], Theorem 5.4 を参照のこと).

仮定 (1.6) は $-\Delta + V(x)$ が固有値を持たないことを保証している. ポテンシャルの大きさに条件を課さない場合, $-\Delta + V(x)$ が固有値を持たないことを要請するのは自然である. 実際, [7] における解の爆発の証明では, $-\Delta + V(x)$ の固有値に属する固有関数を上手く利用している. 一方, ポテンシャルの空間無限遠方での減衰度に関する仮定は, [7] と比べて強いものになっている. さて, 初期値問題 (1.1)–(1.7) に戻ろう. 残念ながら, 上の命題で得らたタイプの評価式をもちいるだけでは, 非線型項の冪 p が臨界値 $p_c = 1 + \sqrt{2}$ に近いときに, その非線型項をコントロールしきれないように思われる. 実際, [5] では, 次のような $1 + |t - |x||$ という因子も考慮した重みつきの評価を導いている.

命題 1.2　次の初期値問題の解を $L_0(F)$ と表すことにする*:*

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F \quad in\ [0,\infty) \times \mathbf{R}^3, \tag{1.9}$$

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0 \quad in\ \mathbf{R}^3. \tag{1.10}$$

このとき, 任意の正定数 T および

$$0 < \lambda < 1, \quad \mu > 2 + \lambda \tag{1.11}$$

を満たす任意の実数 λ, μ に対して

$$\|\tau_+ \tau_-^{\lambda} L_0(F)\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^3)} \leq C_1 \|\tau_+^{\mu} \tau_- F\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^3)} \tag{1.12}$$

が成り立つ. ただし, C_1 は λ と μ のみに依存する正定数であり, $\tau_\pm$ は次の式で定義される重み関数である:

$$\tau_+ = 1 + t + |x|, \quad \tau_- = 1 + |t - |x||.$$

これら二つの命題を踏まえ, (1.9) においてポテンシャルの項 $V(x)u$ がある場合にも, $V(x)$ が滑らかな関数で, 空間無限遠方で十分速く減衰し, かつ (1.6) を満たすとき, (1.12) に対応するような評価式が成り立つことを導きたい. 一旦, その様な評価式が得られれば, 初期値問題 (1.1)–(1.7) に対する時間大域解の存在を $p > p_c$ なる全ての p に対して示すことは難しいことではない.

2 主結果

$L(F)$ を次の初期値問題の解とする:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = F \quad \text{in } [0,\infty) \times \mathbf{R}^3, \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^3. \tag{2.2}$$

このとき, 次の重みつき L^∞–L^∞ 評価が成り立つ.

定理 2.1 $V(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ は *(1.6)* を満たし, $F \in C([0,T] \times \mathbf{R}^3)$ は

$$supp F \subset K_M := \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^3 : |x| \le t + M\} \tag{2.3}$$

を満たすとする. ただし, T, M は正の定数.

このとき, *(1.11)* を満たす任意の実数 λ, μ に対して

$$\|\tau_+ \tau_-^\lambda L(F)\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^3)} \le C_2 \|\tau_+^\mu \tau_- F\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^3)} \tag{2.4}$$

が成り立つ. ここで, C_2 は λ と μ のみに依存する正定数である.

注意: 評価式 (2.4) は, 台コンパクトなポテンシャルに対して, V. Georgiev, C. Heiming and H. Kubo [2] において示されており, 今回の結果はその拡張にあたる.

3　証明の方針

まず, $L(F)$ を形式的に表現するために, 一般化されたフーリエ変換 $\mathcal{F}$ を導入する. 即ち, $R_0(z)=(-\Delta-z)^{-1}$ を $-\Delta$ のリゾルベント作用素, $F(f)(\xi)=\int \mathrm{e}^{-ix\xi}f(x)dx$ を標準的なフーリエ変換とするとき

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=F[(I+VR_0(|\xi|^2+i0))^{-1}(f)](\xi) \tag{3.1}$$

により $\mathcal{F}(f)(\xi)$ を定義する (詳しくは [3], [6] vol.II, Def.14.6.3 などを参照のこと). さらに, リゾルベント恒等式

$$R(z)-R_0(z)=-R_0(z)VR(z),\quad R(z)=(-\Delta+V-z)^{-1}. \tag{3.2}$$

を用いると

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=\int[\mathrm{e}^{-ix\xi}+\varphi(x,\xi)]f(x)dx, \tag{3.3}$$

と変形できる. ただし, $\varphi(x,\xi)$ は

$$\varphi(x,\xi)=R(|\xi|^2+i0)(V_\xi)(x),\quad V_\xi(x)=-V(x)e^{-ix\xi}. \tag{3.4}$$

により定義される関数で

$$(-\Delta_x+V-|\xi|^2)\varphi(x,\xi)=V_\xi(x) \tag{3.5}$$

を満たす. よって

$$\mathcal{F}(-\Delta_x u+Vu)=|\xi|^2\mathcal{F}u$$

が成り立つ.

以上の準備のもと, $L(F)$ は形式的に

$$L(F)(t,x)=\int_0^t\int\int\left(\mathrm{e}^{ix\xi}+\overline{\varphi(x,\xi)}\right)\frac{\sin(t-s)|\xi|}{|\xi|}\left(\mathrm{e}^{-iy\xi}+\varphi(y,\xi)\right)F(s,y)dyd\xi ds$$

と表せる. さらに

$$L(F)(t,x)-L_0(F)(t,x)=\int_0^t\int K(t-s,x,y)F(s,y)dyds$$

と書くとき, この積分作用素の核 $K(t-s,x,y)$ は

$$|x|\le R,\quad t-s-|y|\ge 28R$$

のとき通常の関数となり, 良い評価を持つことも示される. この証明では, $\varphi(x,\xi)$ に対する精密な評価 ([1], Proposition 6.3) や, リゾルベント作用素に対する重みつき L^2 評価 ([4], Theorem 1.9) および $R_0(|\xi|^2+i0)(f)(x)$ の具体的な表示式をフルに使う.

従って

$$\mathrm{supp}F\subset\{(s,y)\in K_M : t-s-|y|\ge 28R\} \tag{3.6}$$

ならば, 上述の論法が有効に働く. 一方,

$$\mathrm{supp}F\subset\{(s,y)\in K_M : t-s-|y|\le 28R\} \tag{3.7}$$

のときは

$$L(F)(t,x)=L_0(F)(t,x)-L_0(VL(F))(t,x) \tag{3.8}$$

と書いて, $L_0(F)$ に対する評価式 (1.12) とその具体的な表示式, および Gronwall の不等式などを使って所要の評価式を得ることができる.

References

[1] M. Beals and W. Strauss, L^p estimates for the wave equation with a potential *Comm. Part. Diff. Eq. 18(7,8)*, 1365–1397, 1993.

[2] V. Georgiev, C. Heiming and H. Kubo, Supercritical semilinear wave equation with large potential, preprint (2000)

[3] T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Scrödinger operator and their applications to scattering theory, *Arch. Rational Mech. Anal. 5*, 1–34, 1960.

[4] H. Isozaki, Differentiability of generalized Fourier transforms associated with Schrödinger operators, *J. Math Kyoto Univ. Vol 25, No. 4*, 789–806, 1985.

[5] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math., 28*, 235 – 268, 1979.

[6] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operatora II: Differential Operators with Constant Coefficients, *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo*, 1983.

[7] W. Strauss and K. Tsutaya, Existence and blow up of small amplitude nonlinear waves with a negative potential, *Discrete and Cont. Dynam. Systems 3, No.2*, 175-188, 1997.