S^1 上の半線型熱方程式 $u_t = u_{xx} + u^2$ の解の漸近挙動

東京理科大学理学部　宮島　静雄 (Shizuo MIYAJIMA)
Faculty of Science, Science Univ. of Tokyo

まず初めにお断りしておかなければならないが，筆者はこのような問題についてはほとんど初心者で，本稿は表題の方程式の初期値による漸近挙動をなるべく完全に決める，という素朴な問題に取り組んだ不十分な結果の記録である．

1　問題の背景

空間が 1 次元区間の場合の半線型熱方程式の解の漸近挙動については，色々と研究されているが，時間大域解が存在するときに，解軌道の ω–極限集合が高々一点になるという現象がしばしば起きる (see e.g., [6, pp. 281–282])．この方向についての一般的な結果として，俣野 ([3], [4]) によるものがある．そこで考察されているのは，分離境界条件での次の半線型発展方程式の古典解である：

$$
(1) \qquad \begin{cases} u_t = \{a(x)u_x\}_x + f(x,u), & (0<x<l, 0<t<T), \\ u(x,0) = u_0(x), & (0<x<l), \\ \alpha_0 u(0,t) - (1-\alpha_0)u_x(0,t) = \beta_0, & (0<t<T), \\ \alpha_1 u(l,t) + (1-\alpha_1)u_x(l,t) = \beta_1, & (0<t<T). \end{cases}
$$

ただし，$a(x) > 0$ は，区間 $[0,l]$ において，十分滑らか．また，α_i, $\beta_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1)$ は，$0 \le \alpha_i \le 1$ を満たす．さらに，非線型項 $f\colon [0,l] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は C^2 級 とする．

この方程式の解について，俣野は任意の初期値 $u_0 \in C([0,l])$ に対してその解軌道の ω–極限集合は高々一点で，その点は方程式 (1) の定常解 (時間的に一定で初期条件以外の式をみたすもの) であることを示した．さらに俣野は，方程式 (1) の時間大域解は $t \to \infty$ のとき ($\sup$ ノルムが) 無限大に発散していなければ，ω–極限集合の点に $C^2([0,l])$ で収束することを示している．また，時間大域解が存在しないときは，局所解の存在は言えているので，時刻 t が解の極大存在時間 T に近づくとき $\|u(\cdot,t)\|_{C([0,l])}$ は無限大に発散することも分かる．

すなわち，爆発という言葉を使うならば，任意の初期値 $u_0 \in C([0,l])$ に対して (1) の解は，有限時間で爆発するか，無限時間で爆発するか，または定常解に収束する，ということになる．

これらの結果の証明には，1 次元区間ということと分離境界条件ということが共に関わっている．周期境界条件を考えると，円周 S^1 で熱方程式を考えることになるが，この場合も俣野 [5] が考察している．S^1 の回転不変性のために，非線型項が u_x を含む

$$
(2) \qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,u,u_x), & (x \in S^1,\ t>0) \\ u(x,0) = u_0(x), & (x \in S^1) \end{cases}
$$

という発展方程式に対しては解軌道の ω–極限集合が高々一点ということは成立しないが ([5, Theorem A])，そうでない場合は次の定理が得られている：

定理 1 （ 俣野 [5, Theorem D] ） (2) において，非線型項 f が u のみの関数のときは，($\sup$ ノルムが) t に関して有界であるような大域的古典解は (2) の定常解に収束する．

(1) の場合には，任意の初期値に対して，もしも大域解 $u(\cdot,t)$ があって $\sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\|=\infty$ ならば，$\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|=\infty$ ということまで分かっているが，S^1 での結果はそこまでは分かっていない．しかし，とにかく (2) の非線型項が $f(x,u)$ の形のとき，大域解の漸近挙動を知るには解軌道が有界かどうかが決定的な意味を持つわけである．

こうなると，自然な疑問として大域解の有界性を具体的に判定することが簡単にできるのかということと，有界でない場合の挙動も含めて，解がどのように振る舞うのかを，初期値によって完全に判別するということが浮かんでくる．本稿はこの問題を，$f(u):=u^2$ という一番単純な非線型項の場合について考察してみたものである．

なお $u_t=\triangle u+f(u)$ という放物型方程式の初期-境界値問題の解については，鈴木 [7] が展望を与えている．

2 $u_t=u_{xx}+u^2$ についての考察

以下では専ら円周 S^1 での方程式

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} u_t=u_{xx}+u^2, & (x\in S^1,\ t>0)\\ u(x,0)=u_0(x), & (x\in S^1)\end{cases}$$

の古典解を，初期値は最低 $C^0(S^1)$ に入っている場合で考える．まず，任意の初期値 $u_0\in C^0(S^1)$ に対して，この方程式が時間局所的な古典解を持つことに注意しよう．これは，なめらかな非線型項 $f(x,u)$ をに対してよく知られていることの特別な場合である．そしてこの方程式の定常解 $v(x)$ は 0 しかないことが容易に分かる．なぜならば，定常解は S^1 上で $v''(x)+v(x)^2=0$ をみたしているので $0=v'(0)-v'(2\pi)=\int_0^{2\pi}v(x)^2\,dx$ となるからである (S^1 を，両端を同一視した $[0,2\pi]$ とみなしている) ．よって，定理 1 により，(3) の有界な大域解は $t\to\infty$ のとき 0 に一様収束するわけである．

2.1 爆発の十分条件

一方，この方程式の解が有限時間で爆発するための十分条件も色々と分かっている．最も簡単なものは次であろう：

爆発条件 1 ： $u_0\geq 0$ かつ $u_0\not\equiv 0$.

これは，最大値原理によって方程式 (3) が順序保存であり，u_0 が零点を持っても，少しでも時間が経てば各点で >0 になることから分かる (定数関数を初期値とする場合と比較する .)

もう一つのよく知られた条件は空間平均値が関係する：

爆発条件 2 ： $v\in C^0(S^1)$ に対して $\eta(v):=\int_{S^1}v(x)\,dx$ としたとき，$\eta(u_0)\geq 0$ かつ $u_0\not\equiv 0$.

$\eta(u_0) > 0$ の場合は Evans [2, pp. 511–512] に証明があるが，$\eta(u_0) = 0$ の場合は，$t = 0$ で $d\eta(u(\cdot,t))/dt = \int_{S^1} u^2\,dx > 0$ なので時間が少しでも経てば $\eta(u(\cdot,t)) > 0$ となって，初めの場合が適用できる．

もう一つ，変分法との関係で重要な「エネルギー積分」で表現される条件がある：

爆発条件 **3** ： $v \in C^1(S^1)$ に対して $J(v) := \frac{1}{2}\int_{S^1} v'(x)^2\,dx - \frac{1}{3}\int_{S^1} v(x)^3\,dx$ としたとき，$J(u_0) < 0$.

これは Cazenave [1, Proposition 5.4.4] の特別の場合であるが，読者の便宜上この本に従って，その巧妙な証明を詳しく述べておこう．

(3) の初期値 u_0 に対する解 $u(x,t)$ の時刻 t のエネルギー積分 $J(u(\cdot,t))$ を単に $J(t)$ で表すことにする：

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_{S^1} (u_x)^2 dx - \frac{1}{3}\int_{S^1} u^3 dx.$$

このとき $t > 0$ で $\dot{J}(t) = -\int_{S^1}(u_t)^2 dx$ だから，$J(t)$ は，単調減少関数．(3) の式と $u(x,t)$ との $L^2(S^1)$ における内積を考えると

$$\int_{S^1} u_t u dx = \int_{S^1} u_{xx} u dx + \int_{S^1} u^3 dx$$

より

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} u^2 dx = -2\int_{S^1} (u_x)^2 dx + 2\int_{S^1} u^3 dx.$$

また，

$$J(t) = J(0) - \int_0^t \int_{S^1} (u_t)^2 dx ds$$

と表せ，$J(0) < 0$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{S^1} u^2 dx &= \int_{S^1} (u_x)^2 dx - 6J(t) \\
&= \int_{S^1} (u_x)^2 dx + 6\int_0^t \int_{S^1} (u_t)^2 dx ds - 6J(0) \\
&\geq \int_{S^1} (u_x)^2 dx + 6\int_0^t \int_{S^1} (u_t)^2 dx ds \\
&\geq 6\int_0^t \int_{S^1} (u_t)^2 dx ds.
\end{aligned}$$

さらに

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} u^2 dx = \frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds$$

より

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds \geq 6\int_0^t \int_{S^1} (u_t)^2 dx ds. \tag{4}$$

また，

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} u^2 dx = 2\int_{S^1} u_t u dx$$

の両辺を 0 から t まで t について積分して，Schwarz の不等式を使うと

$$\begin{aligned}\int_{S^1} u(x,t)^2 dx - \int_{S^1} u(x,0)^2 dx &= 2\int_0^t \int_{S^1} u_t u dx \\ &\le 2\left(\int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{S^1} (u_t)^2 dx ds\right)^{1/2}\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^t \int_{S^1} u_t^2 dx ds \ge \frac{\left(\int_{S^1} u(x,t)^2 dx - \int_{S^1} u(x,0)^2 dx\right)^2}{4\int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds.}$$

(4) とあわせると，

$$\frac{1}{6}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds \ge \frac{\left(\int_{S^1} u(x,t)^2 dx - \int_{S^1} u(x,0)^2 dx\right)^2}{4\int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds.}$$

ここで，$h(t) = \int_0^t \int_{S^1} u^2 dx ds$ とおくと，上式は

$$h''(t) \ge \frac{3}{2}\frac{(h'(t) - h'(0))^2}{h(t)} \tag{5}$$

と表せる．$J(t)$ の単調減少性より $0 \le t_0 \le t$ なる任意の t_0 に対して，$J(t_0) \ge J(t)$ となるから

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} u^2 dx = \int_{S^1} u_x^2 dx - 6J(t) \ge -6J(t_0) > 0.$$

ゆえに大域解が存在するなら $t \to \infty$ とすると $\|u(t)\|^2_{L^2(S^1)} \to \infty$．すなわち，$t$ にともなって $h'(t)$ も大きくなる．そして，(5) より

$$h(t)h''(t) \ge \frac{3}{2}(h'(t) - h'(0))^2 = \frac{3}{2}h'(t)^2\left(1 - \frac{h'(0)}{h'(t)}\right)^2$$

であり，$\frac{3}{2}\left(1 - \frac{h'(0)}{h'(t)}\right)^2$ は，$h'(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ だから $t \to \infty$ のとき $3/2$ に収束する．よって，ある定数 $C > 1$ と $t_0 > 0$ があって，$t \ge t_0$ なる t に対して $\frac{3}{2}\left(1 - \frac{h'(0)}{h'(t)}\right)^2 > C$ とできる．よって，この範囲の t に対して $h''(t)/h'(t) \ge Ch'(t)/h(t)$ だから，

$$(\log h'(t))' \ge C(\log h(t))' \quad \text{つまり} \quad \left(\log \frac{h'(t)}{h(t)^C}\right)' \ge 0.$$

すなわち，$\log \dfrac{h'(t)}{h(t)^C}$ が $t \geq t_0$ なる t に対して単調増加関数であるから，ある正定数 C_0 に対して，$h'(t)/h(t)^C \geq C_0$ となる．この両辺を t_0 から t まで積分すると，

$$\frac{1}{C-1}\left\{\frac{1}{h(t_0)^{C-1}} - \frac{1}{h(t)^{C-1}}\right\} \geq C_0(t-t_0)$$

となることが分かる．左辺は $t > t_0$ で有界であるので，この不等式から大域解が存在するとすれば矛盾が起きる．∎

2.2 汎関数 η, J と爆発とのさらなる関連

これまで 2 つの汎関数 $\eta(v)$ と $J(v)$（η は $C^0(S^1)$，J は $C^1(S^1)$ 上で意味を持つ）を考え，初期値 u_0 が $\eta(u_0) > 0$ の場合と $J(u_0) < 0$ の場合はともに (3) の解は有限時間で爆発することを見た．

これらのことから，逆に (3) が大域解 $u(x,t)$ を持ったとすれば，すべての $t > 0$ で $\eta(u(\cdot,t)) \leq 0$ かつ $J(u(\cdot,t)) \geq 0$ でなければならない．ここで微妙な問題であるが，自明解以外の場合において，ある $t > 0$ でこれらの不等式の等号が成立する場合があるか，ということが気になってくる．この問題は容易に予想されるとおり，否定的に解決されるのであるが，証明には熱方程式 $u_t = u_{xx}$ について知られている "backward uniqueness" (*cf.* Evans [2, pp. 64–65]) の非線型版が必要になる：

定理 2 (backward uniqueness) S^1 上の非線形熱方程式の初期値問題 (3) の古典解が，ある $T > 0$ で $u(\cdot,T) = 0$ となれば，$u \equiv 0$ である．

証明. $0 \leq t \leq T$ に対して

$$e(t) = \int_{S^1} u(x,t)^2 dx$$

とおく．$e(t) = 0$ となるような t の $\inf$ が 0 ならば，$e(0) = 0$ 従って $u_0 = 0$ なので解の一意性により定理は証明される．そこで最初から $T = \inf\{t > 0 \mid e(t) = 0\}$ として，$T > 0$ から矛盾を導こう．$e(t)$ は $t > 0$ で

$$\dot{e}(t) = \int_{S^1} 2u \cdot u_t dx = 2\int_{S^1} u(u_{xx} + u^2)dx = -2\int_{S^1} u_x^2 dx + 2\int_{S^1} u^3 dx \tag{6}$$

をみたすから

$$\begin{aligned}
\ddot{e}(t) &= -4\int_{S^1} u_x u_{xt} dx + 6\int_{S^1} u^2 u_t dx \\
&= 4\int_{S^1} u_{xx}(u_{xx} + u^2)dx + 6\int_{S^1} u^2(u_{xx} + u^2)dx \\
&= 4\int_{S^1} (u_{xx})^2 dx + 10\int_{S^1} u_{xx} u^2 dx + 6\int_{S^1} u^4 dx \\
&= 4\int_{S^1} (u_{xx})^2 dx + 8\int_{S^1} u_{xx} u^2 dx + 4\int_{S^1} u^4 dx + 2\int_{S^1} u^2(u_{xx} + u^2)dx \\
&= 4\int_{S^1} (u_{xx} + u^2)^2 dx + 2\int_{S^1} u^2(u_{xx} + u^2)dx. \qquad (7)
\end{aligned}$$

また，(6) より

$$(\dot{e}(t))^2 = 4\left(\int_{S^1} u(u_{xx}+u^2)dx\right)^2$$

であって，これに Schwarz の不等式を使うと，

$$(\dot{e}(t))^2 \le 4\int_{S^1} u^2 dx \ \int_{S^1}(u_{xx}+u^2)^2 dx$$

となるので，(7) より

$$(\dot{e}(t))^2 \le e(t)\left\{\ddot{e}(t) - \int_{S^1} u^2(u_{xx}+u^2)dx\right\}$$

が分かる．T の近傍では u, u_{xx} とも有界なので，上式からそこで

$$(\dot{e}(t))^2 \le e(t)\ddot{e}(t) + \delta e(t)^2 \tag{8}$$

となるような定数 $\delta > 0$ が取れることが分かる．ある $0 < T' < T$ があって，任意の $t \in [T', T]$ に対して(8) が成立しているとしてよい．このとき $t \in [T', T)$ に対して $h(t) = \log e(t)$ とおくことができて，

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{e}(t)}{e(t)}$$

だから，

$$\ddot{h}(t) = \frac{\ddot{e}(t)e(t) - \dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \ge -\delta$$

よって，

$$\ddot{h}(t) + \left(\frac{\delta}{2}(t-T)^2\right)'' \ge 0$$

すなわち $h(t) + \dfrac{\delta}{2}(t-T)^2$ は $[T', T)$ において凸関数．このとき，任意に $T' \le t_1 < t_2 < T$ を取ると，$t \in [t_1, t_2)$ は，ある $\lambda > 0$ によって $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ と表せるから，

$$h(t) + \frac{\delta}{2}(t-T)^2 \le \lambda\left\{h(t_1) + \frac{\delta}{2}(t_1-T)^2\right\} + (1-\lambda)\left\{h(t_2) + \frac{\delta}{2}(t_2-T)^2\right\}.$$

よって，

$$e(t)\exp\left(\frac{\delta}{2}(t-T)^2\right) \le \left[e(t_1)\exp\left(\frac{\delta}{2}(t_1-T)^2\right)\right]^{\lambda}\left[e(t_2)\exp\left(\frac{\delta}{2}(t_2-T)^2\right)\right]^{1-\lambda}.$$

t を固定して $t_2 \uparrow T$ とすると，λ もある $\lambda_0 > 0$ に収束するから，$e(t) = 0$ が得られる．これは $T = \inf\{t > 0 \mid e(t) = 0\}$ であったことに矛盾する．∎

この結果を利用すれば次のことが示される．

定理 3 $u(x,t)$ を (3) の恒等的に 0 ではない大域解とすると，任意の $t>0$ に対して $\eta(u(\cdot,t)) := \int_{S^1} u(x,t)\,dx < 0$ かつ $J(u(\cdot,t)) := \frac{1}{2}\int_{S^1} u_x(x,t)^2\,dx - \frac{1}{3}\int_{S^1} u(x,t)^3\,dx > 0$ が成り立つ．

証明. 前小節の結果から，ある $t>0$ に対して $\eta(u(\cdot,t))>0$ または $J(u(\cdot,t))<0$ であれば大域解は存在し得ない．よって，あとは $\eta(u(\cdot,t))=0$ または $J(u(\cdot,t))=0$ となる $t>0$ が存在しないことを言えばよい．$\eta(u(\cdot,t))=0$ とすると，$u(\cdot,t)\equiv 0$ でなければ大域解は存在しない．そして $u(\cdot,t)\equiv 0$ であれば backward uniqueness より解は自明解となってしまうので，この場合もよい．次に $J(u(\cdot,t))=0$ とすると，$dJ(u(\cdot,t))/dt = -\int_{S^1}(u_t)^2\,dx$ なので $u_t\not\equiv 0$ ならば t より時刻が少しでも進めば J の値は負になってしまい，解は爆発する．よって大域解が存在するなら J が 0 になる時刻では $u_t\equiv 0$ である．しかしこのときは方程式から $u_{xx}(x,t)+u(x,t)^2\equiv 0$ となって，$u(x,t)\equiv 0$（ x の関数として）が得られる．よってこのときも backward uniquenes によって解は自明になってしまう．∎

これで大域解が存在するなら汎関数 η, J の $u(\cdot,t)$ での値は定符号（η は負，J は正）であることが分かったが，逆にこれらの符号条件がみたされている範囲では爆発は起きないことも分かる．それを示すために，2 種類の爆発の関係を示す次の補題を準備する．

補題 4 $u(x,t)$ は (3) の $0<t<T$ における解とすると，$t\uparrow T$ のとき $u(\cdot,t)$ が L^2–爆発しない，つまり $\lim_{t\uparrow T}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(S^1)}<\infty$ ならば sup–ノルムでも爆発しない（有界に止まる）．

証明. $0<t_0<t<T$ とすると，S^1 上の熱方程式 $u_t=u_{xx}$ の基本解 $U(t,x,y)$ を使って，

$$u(x,t)=\int_{S^1} U(t,x,y)u(y,t_0)\,dy+\int_{t_0}^{t}\int_{S^1} U(t-s,x,y)u(y,s)^2\,dy\,ds$$

と表される．この式から，ある定数 C に対して $0\le U(t-s,x,y)\le C/\sqrt{t-s}$ という基本解の評価と $\|u(\cdot,s)\|_{L^2(S^1)}$ の有界性により，$u(x,t)$ の有界性が分かる．∎

これで次のことが証明できる．

定理 5 $u(x,t)$ は (3) の $0<t<T$ における解とすると，次の (i), (ii) のどちらかが成り立っていれば $u(\cdot,t)$ は $t\uparrow T$ のとき sup–ノルムで爆発することはない：

(i) $0\le t<T$ で $\eta(u(\cdot,t))\le 0$; (ii) $0<t<T$ で $J(u(\cdot,t)\ge 0$.

証明. (i) の場合：$\eta(u(\cdot,t))$ を単に $\eta(t)$ と書くことにすると，$\dot\eta(t)=\int_{S^1}u(x,t)^2\,dx=\|u(\cdot,t)\|_{L^2(S^1)}$ なので，$\eta(t)\le 0$ ならば

$$-\eta(0)\ge\eta(t)-\eta(0)=\int_0^t\|u(\cdot,s)\|^2_{L^2(S^1)}\,ds$$

となって，$t \uparrow T$ のとき L^2–爆発は起こらない．従って，補題によって $\sup$–ノルムでも爆発しない．

(ii) の場合： $J(u(\cdot,t)$ を単に $J(t)$ と書くことにする．$J(0)$ も意味を持つとしてよいことは明らか．

さて，$0 \le t < T$ で $J(t) \ge 0$ とすると，まず $\dot{J}(t) = -\int_{S^1} u_t^2\, dx$ から

$$\int_0^t \int_{S^1} u_t(x,s)^2\, dx\, ds = J(0) - J(t) \le J(0). \tag{9}$$

となる．一方 $(d/dt)\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(S^1)} = 2(u_t, u)_{L^2(S^1)}$ から

$$\begin{aligned}\left|\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(S^1)} - \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(S^1)}\right| &= 2\ \left|\int_0^t (u_t(\cdot,s), u(\cdot,s))_{L^2(S^1)}\, ds\right| \\ &\le 2\ \left(\int_0^t \|u_t(\cdot,s)\|^2_{L^2(S^1)}\, ds\right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \|u(\cdot,s)\|^2_{L^2(S^1)}\, ds\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

これと (9) から

$$\left(\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(S^1)} - \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(S^1)}\right)^2 \le 4J(0)\ \int_0^t \|u(\cdot,s)\|^2_{L^2(S^1)}\, ds$$

が得られる．ここで $h(t) := \int_0^t \|u(\cdot,s)\|^2_{L^2(S^1)}\, ds$ と置くと，上式は

$$(\dot{h}(t) - \dot{h}(0))^2 \le 4J(0)h(t) \tag{10}$$

と書ける．

もし u が $t \uparrow T$ のとき L^2–爆発しているとすれば，ある $t_0 < T$ で，任意の $t \in [t_0, T)$ に対して $\dot{h}(t) = \|u(\cdot,t)\|_{L^2(S^1)} > \|u(\cdot,0)\|_{L^2(S^1)} = \dot{h}(0)$ としてよいので，(10) はこの範囲で $\dot{h}(t) - \dot{h}(0) \le \sqrt{4J(0)}\sqrt{h(t)}$ と書き直せて，これから $t_0 \le t < T$ で，ある定数 C に対して

$$\frac{\dot{h}(t)}{\sqrt{h(t)}} \le \sqrt{4J(0)} + \frac{\dot{h}(0)}{\sqrt{h(t)}} \le C$$

が成り立つとしてよい(T の近くで $h(t)$ はある正の定数以上). この不等式から $\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(t_0)} \le C(t - t_0)/2$ が得られて，$t \uparrow T$ のとき $u(\cdot,t)$ は L^2–爆発しないことが分かり，先に爆発すると仮定したことに矛盾する．よって L^2–爆発はせず，補題により $\sup$–ノルムでも爆発しない．∎

注： 大域解が存在するとき，$J(u(\cdot,t))$ の有界性から，$u(\cdot,t)$ の $\sup$–ノルムでの有界性が言えれば，解軌道が 0 に収束する事が分かり，興味があるところであるが，これが正しいのかどうか筆者には分からなかった．

2.3 数値計算例

(3) については，解が有限時間で爆発するような初期値や，逆に大域解が存在するような例 (たとえば $u_0 \leq 0$) を与えることはできるが，初期値によって解の挙動を完全に決定することは出来ていないようである．しかし前に述べた爆発条件の十分条件から考えると，$\eta(u_0) < 0$ かつ $J(u_0) > 0$ となるような初期値に対する解の状態が分かれば，この問題についてのかなり完全な情報となるものと思われる．

そこでこの場合の解についていろいろ考察してみたが，殆ど何も分からなかったので，Mathematica や Maple V を用いていくつか数値実験をしてみた．その結果，$\eta(u_0) < 0$ かつ $J(u_0) > 0$ となるような初期値に対する解は大域的に存在し，定常解 0 に収束する例ばかりとなった．その上，解は早い時間で負になってしまうようである．これらの現象が一般的であることを示したいのであるが，未だに出来ていない．

以下に差分法で (3) の近似解を求める Mathematica のプログラム (全く標準的，初等的) と計算結果をいくつか掲げておく．

Mathematica プログラム

```
u[i_, 0, n_, m_] := u0[i/n];
u[i_, j_, n_, m_] :=
    u[i, j, n, m] =
      If[i == 0 || i == n,
        N[u[i, j - 1, n, m] +
            1/m*(u[i, j - 1, n, m]^2 +
                  n^2*(u[1, j - 1, n, m] + u[n - 1, j - 1, n, m] -
                        2u[0, j - 1, n, m])), 60],
        N[u[i, j - 1, n, m] +
            1/m*(u[i, j - 1, n, m]^2 +
                  n^2*(u[i + 1, j - 1, n, m] + u[i - 1, j - 1, n, m] -
                        2u[i, j - 1, n, m])), 60]];
```

(u0 は初期値で，微分は差分で近似し，$[0,1]$ 区間で周期境界条件を入れている．n は空間分割数，$1/m$ は時間分割の単位．実際に計算させるときは m, n を安定性条件を満たす範囲で使用しなければならない．)

あとは u0 を具体的に与えて

```
ListPlot3D[Table[u[i, j, 20, 2*20^2], {j, 0, 120}, {i, 0, 20}],
  PlotRange -> All]
```

などとすればグラフが描かれる (この例では安定性条件は最低レベルで満たしている) ．Mathematica よりも Maple V の方が帰納的計算でのオーバーフローが起きにくいようであった．

計算例の図はファイルが大きくなるので省略する．

参考文献

[1] Cazenave, T. and A. Haraux, "An Introduction to Semilinear Evolution Equations", Oxford Lecture Series in Math. and its Appl. vol. 13, Oxford Univ. Press, 1998.

[2] Evans, Lawrence C. , "Partial Differential Equations", Graduate Studies in Mathematics Vol. 19 , American Mathematical Society, 1998.

[3] Matano , H., *Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations,* J.Math.Kyoto Univ. 18-2 (1978), 221-227.

[4] Matano , H., *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations,* Publ. RIMS. Kyoto Univ. 15 (1979), 401-454.

[5] Matano , H., *Asymptotic behavior of solutions of semilinear heat equations on* S^1 , in "Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States II", W.-M. Ni, L.A. Peletier, J. Serrin (eds), MSRI Publications 13 , Springer-Verlag, New York . (1986), 139-162.

[6] Miklavčič, M., "Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations", World Scientific, 1998.

[7] 鈴木　貴, 「放物型方程式の解の爆発現象：今何が問題か」, 数理解析研究所講究録 1034 (1998), 52–64.