Multiple solutions of H-systems on some multiply-connected domains

高橋 太 (Futoshi Takahashi)
東京工業大学理学部　E-mail: takahasi@math.titech.ac.jp

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を滑らかな境界を持つ有界領域, $(x, y) \in \Omega$ とする。この講演では次の非線型楕円型方程式系の境界値問題 (HD):

$$\Delta u = 2u_x \wedge u_y \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

の多重解の存在について考える。ここに $u \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ はベクトル値関数、“$\wedge$” は $\mathbf{R}^3$ の通常のベクトル積、u_x, u_y 等は偏導関数を表す。(1) は定数平均曲率 $H \equiv 1$ の曲面のパラメトリック表示の満たす方程式系であり、H-system と呼ばれる ([BC1] [BC2])。(1) は等角不変性を持つ方程式系であることに注意する。

$u \equiv 0$ は常に (HD) の解なので以降これを自明な解と呼ぶことにする。(HD) の非自明解の存在・非存在について、1975 年、H.Wente [W] は次の事実を証明した。

- Ω を単連結領域とする。(上の注意によって $\Omega =$ 単位円板としてよい。) このとき (HD) の解は $u \equiv 0$ しか存在しない。
- Ω を (円環領域と等角同値な) ２重連結領域とする。このとき (HD) の非自明解が少なくとも１つ存在する。

２番目の事実の証明には、解に軸対称性を仮定して、H-system (1) と同値な常微分方程式系を解析する方法が用いられた。

境界値問題 (HD) は、高次元での臨界 Sobolev 指数を含む半線形楕円型方程式の境界値問題 (SD):

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geq 3), \\ u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

との間に多くの類似点を持つことが知られている。先の Wente の第１の結果は、(SD) に対する星型領域での Pohozaev の非存在定理に、また第２の結果は、円環領域での Kazdan-Warner の存在定理に対応するものと考えられる。(SD) については、(多重) 解の存在・非存在と領域の位相的・幾何的性質との関連について多くの研究が行われている (例えば [BaC], [Pa] など)。これらの研究から、(HD) についても次の主張は自然であると思われる。

- $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を K 重連結領域とする ($K \geq 1$)。このとき (HD) の解は自明解も含めて少なくとも K 個 存在する。

この講演では次の結果を報告したい。

- 十分広いクラスの K 重連結領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ の上では、(HD) の解は自明解も含めて少なくとも K 個 存在する。

より正確に述べるために次の定義を行う。

Definition.(condition $(A_{R_1,R_2,\cdots,R_{K-1}})$) There exist $z_1, z_2, \cdots, z_{K-1} \in \mathbf{R}^2$ such that

(1) $B_{R_i}(z_i) := \{z \in \mathbf{R}^2 : |z - z_i| < R_i\}$ are disjoint discs,

(2) $A_{R_i^{-1},R_i}(z_i) := \{z \in \mathbf{R}^2 : R_i^{-1} < |z - z_i| < R_i\} \subset \Omega$ $(i = 1, 2, \cdots, K-1)$,

(3) $B_{R_i^{-1}}(z_i) := \{z \in \mathbf{R}^2 : |z - z_i| < R_i^{-1}\} \not\subset \overline{\Omega}$ $(i = 1, 2, \cdots, K-1)$.

Theorem. *Let $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ be a bounded smooth domain. For every $K \in \mathbf{N}$, there exist constants $4 < R_1 < R_2 < \cdots < R_{K-1}$ such that if Ω satisfies the condition $(A_{R_1,R_2,\cdots,R_{K-1}})$, then the problem (HD) admits at least K distinct solutions.*

条件 $(A_{R_1,R_2,\cdots,R_{K-1}})$ をみたす領域 Ω は K 重連結領域であることに注意する。また方程式の等角不変性から、上の定理で構成した Ω と等角同値なすべての領域で同じ結果が成立する。

証明は Coron [Co] に従い、Morse 理論に基づく変分法的手法による。[Co] では臨界 Sobolev 指数の境界値問題 (SD) を取扱っている。

以下で用いるいくつかの記号を用意する。

$$
\begin{aligned}
Q(u) &:= \int_\Omega u \cdot u_x \wedge u_y, \quad u \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3), \\
S(u) &:= \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{|Q(u)|^{2/3}}, \quad \text{for } Q(u) \neq 0, \\
M &:= \{u \in H_0^1(\Omega; \mathbf{R}^3) : Q(u) = 1\}, \\
M^\lambda &:= \{u \in M : S(u) < \lambda\}, \\
\overline{S} &:= \inf_{u \in M} S(u) = (32\pi)^{1/3}.
\end{aligned}
$$

(HD) の解を見つけることは、M 上で汎関数 S の critical point を見つけることに帰着される。その方法は、領域 Ω のホモトピー的非自明性を利用して、S が Palais-Smale 条件を満たす範囲内の２つの sub-level sets M^α, M^β の間に topological difference をもたらすような M 内の path を構成することによる。

次の結果が key となる。

Lemma. *Let $\{u^n\} \subset M$ be a sequence such that*

$$S(u^n) = \overline{S} + o(1) \quad \textit{as } n \to \infty.$$

Then there exists a subsequence (still denoted by u^n) and $z = (x, y) \in \overline{\Omega}$ such that

$$|\nabla u^n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{S}\delta_z \quad in\ \mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

in the sense of Radon measures of $\overline{\Omega}$.

この補題と、重心写像

$$F : M \to \mathbf{R}^2, \quad F(u) = \frac{\int_\Omega z|\nabla u|^2 dz}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dz}, \quad z = (x, y)$$

を用いて、Ω の位相的性質を、$\overline{S}$ に十分近い範囲の M の要素の全体 $M^{\overline{S}+\varepsilon}$($\varepsilon > 0$ small) に遺伝させることができる。上の補題は、より一般的な,'等周不等式に対する Concentration-Compactness Lemma' から導かれる。

２つの sub-level sets の間の位相的相違をもたらす path は、

$$u_t^{\sigma,\tilde{z}}(z) := \frac{2(1-t)}{(1-t)^2 + |z - \tilde{z} - t\sigma|^2} \begin{pmatrix} x - \tilde{x} - tx_0 \\ y - \tilde{y} - ty_0 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

where $z = (x, y), \tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2, t \in [0, 1), \sigma = (x_0, y_0) \in \{|z| = 1\}$ に適当な cut off 関数をかけたものから構成する。

References

[BaC] A. Bahri, and J.M. Coron. *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain,* Comm. Pure Apll. Math. **41** (1988) 253-294.

[BC1] H. Brezis, and J.M. Coron. *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture,* Comm. Pure Apll. Math. **37** (1984) 149-187.

[BC2] H. Brezis, and J.M. Coron. *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles,* Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985) 21-56.

[Co] J.M. Coron. *Topologie et cas limite des injections de Sobolev,* C. R. Acad. Paris Ser. I. **299** (1984) 209-212.

[Pa] D. Pasasseo. *Relative category and multiplicity of positive solutions for the equation $\Delta u + u^{2^*-1} = 0$,* Nonlinear Anal. T.M.A **33** (1998) 509-517.

[W] H. Wente. *The differential equation $\Delta x = 2Hx_u \wedge x_v$ with vanishing boundary values,* Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975) 131-137.