非線形 SCHRÖDINGER 方程式の時間に関する漸近展開

和田健志 (大阪大理)

非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{aligned} iu_t + (1/2)\Delta u &= f(u), \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

の時間大域的な挙動について考える．ここで $f(u) = \lambda(V * |u|^2)u$, $V(x) = |x|^{-\gamma}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $0 < \gamma < n$ である. 非線形項 $f(u)$ は Hartree 型と呼ばれる非局所的な相互作用である．

この方程式の解の漸近挙動は非線形項に現れるポテンシャル V のクラスによって異なる．$\gamma > 1$ の場合 V は近距離型であると言い，この場合解は (時間大域的に存在する場合) 時刻無限大で線形方程式の解に漸近していく．実際，次が知られている．$U(t) = \exp(it\Delta/2)$ を自由粒子の発展作用素とすると

(i) $1 < \gamma < 2$ のとき $L^{2,1}$ において，$1 < \gamma < \min(4,n)$ のとき $H^1 \cap L^{2,1}$ において波動作用素が存在する;

(ii) $\lambda > 0$ または u_0 が十分小さいときある ϕ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - U(t)\phi\|_2 = 0; \tag{2}$$

(iii) $\lambda > 0$ かつ $\gamma > 4/3$ ならば波動作用素は上記の空間で完全である．

詳しくは [2, 8, 9, 12] を参照.

これに対して $\gamma \le 1$ の場合 V は遠距離型と呼ばれ，解の挙動は近距離型の場合と大きく異なる．実際，非自明な解に対して (2) をみたす ϕ は存在しない．そこで Dollard 型の修正因子

$$S(t,\xi) = (V * |\hat{\phi}|^2)(\xi) \int_1^t \tau^{-\gamma} d\tau$$

を導入し，(1) の解は

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - U(t)\exp[-iS(t,-i\nabla)]\phi\|_2 = 0 \tag{3}$$

の様に振る舞うことを期待する．実際以下が知られている．

(iv) $1/2 < \gamma \le 1$ ならば適当な意味で修正波動作用素が存在する [3, 1, 13];

(v) $1/2 < \gamma \le 1$ で u_0 が十分小さければ ϕ が存在して $u(t)$ は (3) を満たす [4, 5, 6, 7, 10, 14];

(vi) $0 < \gamma \le 1$ で u_0 が十分小さければ (1) の解 $u(t)$ は

$$u(t,x) = (it)^{-n/2} \exp[(i|x|^2/2t) - iS(t,x/t) + O(t^{1-2\gamma})]\,\hat{\phi}(x/t) + o(t^{-n/2})$$

の形の漸近形をもつ [5, 6].

以上により解の profile は知られるわけであるが，解の漸近展開の第 2 項以後は上の結果からは分からない．本講演ではこの問題を考えたい．最近九州大学の北直泰氏は冪乗型の非線形項をもつ非線形 Schrödinger 方程式で非線形項が近距離型に相当する場合を考察し，方程式を積分型に書き直して非線形項を stationary phase method で展開することにより漸近展開の第 2 項を求めた [11]. ただし彼の方法は最も重要と考えられる $\gamma = 1$ の場合に適用することが出来ない．この場合を解決するのが本講演の目的である．以下に得られた結果を述べる．最初に近距離型の場合であるが

Theorem 1. $n \geq 2$, $1 < \gamma < 2$, $s > n/2$ とし，$u_0 \in L^{2,s}$ は十分小さいとする．(1) の解 $u(t)$ に対して $\phi \in L^{2,s}$ が存在して

$$\|U(-t)u(t) - \phi - i(\gamma-1)^{-1}t^{1-\gamma}\mathcal{F}^{-1}f(\hat{\phi})\|_{L^{2,s}} = o(t^{1-\gamma}) \tag{4}$$

を満たす. さらに $s > (n/2) + 2(\gamma - 1)$ とすると L^∞ において

$$\begin{aligned} u(t,x) = (it)^{-n/2}\exp(i|x|^2/2t)\{\hat{\phi}(x/t) - i(\gamma-1)^{-1}t^{1-\gamma}\big(\mathcal{F}^{-1}f(\hat{\phi})\big)(x/t)\} \\ + o(t^{-(n/2)+1-\gamma}) \end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つ．

続いて遠距離型の場合として

Theorem 2. $n \geq 2$, $\gamma = 1$, $s > (n/2) + 2$ とし，$u_0 \in L^{2,s}$ は十分小さいとする．(1) の解 $u(t)$ に対して $\phi \in L^{2,\sigma}$ が存在して

$$\|U(-t)u(t) - \exp[-i\tilde{S}(t,-i\nabla)]\{\phi + t^{-1}\sum_{j=0}^{1}\phi_{1,j}(\log t)^j\}\|_{L^{2,\sigma'}} = o(t^{-1}) \tag{6}$$

となる．ここで $n/2 < \sigma' < \sigma - 2 < s - 2$,

$$\begin{aligned} S_0 &= V * |\hat{\phi}|^2, \\ \hat{\phi}_{1,1} &= -i\big[V * (\Delta S_0|\hat{\phi}|^2) + V * (\nabla S_0 \cdot \nabla\bar{\hat{\phi}}\hat{\phi} + \nabla S_0 \cdot \nabla\hat{\phi}\,\bar{\hat{\phi}}) - |\nabla S_0|^2\big]\,\hat{\phi}, \\ \hat{\phi}_{1,0} &= -\big(V * (\hat{\phi}\Delta\bar{\hat{\phi}})\,\hat{\phi} + (V * |\nabla\hat{\phi}|^2)\,\hat{\phi} + \nabla S_0 \cdot \nabla\hat{\phi}\big) + \hat{\phi}_{1,1}, \\ \tilde{S}(t,\xi) &= S_0(\xi)\log t - t^{-1}V * [\hat{\phi}\bar{\hat{\phi}}_{1,0} + \bar{\hat{\phi}}\hat{\phi}_{1,0}]. \end{aligned}$$

さらに

Theorem 3. *Theorem 2* の仮定のもと， L^∞ において

$$\begin{aligned} u(t,x) = (it)^{-n/2}\exp\big((i|x|^2/2t) - i\tilde{S}(t,x/t)\big)\big\{\hat{\phi}(x/t) + t^{-1}\sum_{j=0}^{2}\psi_{1,j}(x/t)(\log t)^j\big\} \\ + o(t^{-(n/2)-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

ここで ϕ, $\tilde{S}$ は *Theorem 2* で述べられたもの，$\psi_{1,j}$ は

$$\psi_{1,2} = \frac{i}{2}|\nabla S_0|^2\hat{\phi},$$
$$\psi_{1,1} = -\frac{1}{2}(\Delta S_0\hat{\phi} + 2\nabla S_0 \cdot \nabla\hat{\phi}) + \hat{\phi}_{1,1},$$
$$\psi_{1,0} = -\frac{i}{2}\Delta\hat{\phi} + \hat{\phi}_{1,0}$$

である．

References

[1] J. Ginibre and T. Ozawa, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[2] J. Ginibre and G. Velo, Math. Z. **170** (1980), 109–136.

[3] J. Ginibre and G. Velo, Rev. Math. Phys. **12** (2000), 361–429.

[4] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[5] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Scattering theory and large time asymptotics of solutions to the Hartree type equations with long range potential*, preprint.

[6] N. Hayashi and P. I. Naumkin, SUT J. Math. **34** (1998), 13–24.

[7] N. Hayashi, P. I. Naumkin and T. Ozawa, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1256–1267.

[8] N. Hayashi and T. Ozawa, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **48** (1988), 17–37.

[9] N. Hayashi and Y. Tsutsumi, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), 187–213.

[10] H. Hirata, Tokyo J. Math. **18** (1995), 167–177.

[11] N. Kita, *Sharp L^r asymptotics of the solutions to nonlinear Schrödinger equations*, preprint.

[12] H. Nawa and T. Ozawa, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 259–275.

[13] T. Ozawa, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[14] T. Wada, Kyushu J. Math. **54** (2000), 171–179.