

# 流体方程式の非線形項の半空間上でのある評価

吉田 拓\*

2001 年 2 月 24 日

## 1 Introduction

$N$  次元 Euclid 空間  $\mathbf{R}^N$  上の領域  $\Omega$  を流れる非圧縮性粘性流は, 時刻  $t$  と  $\Omega$  の各点  $x$  での速度ベクトル  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_N(x, t))$  と圧力  $p(x, t)$  によって特徴付けられる. 速度ベクトルと圧力の組  $\{u(x, t), p(x, t)\}$  は次の Navier-Stokes 方程式に支配される.

$$(N-S) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & t = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで  $u \cdot \nabla u$  の第  $i$  成分は  $\sum_{j=1}^N u_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x)$  であり  $\Delta u$  は  $N$  次元 Laplacian を意味し  $\Delta u_i(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i(x)$  である.  $\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_N} \right)$  であり  $\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} u_j(x)$  である. 第 1 番目の方程式は運動量保存則を表わし第 2 番目の方程式は非圧縮性条件を表わしている.

初期値が小さいなど, 限定された状況の下での解析的な研究には多くの結果があり, 空間次元が 2 次元の場合の問題は時間大域的可能性が得られている. しかしながら 3 次元 Navier-Stokes 方程式の解の大域的適切性は未解決で, この問題には多くの注目が集まっている.<sup>1</sup> この未解決問題を考える上で, 解の正則性に関する先見評価を得ることが重要であるが, 流体方程式固有の非線形項  $u \cdot \nabla u$  によって, こうした評価を得ることは非常に難しい.

ここでは, こうした非線形項へのより良い正則性 (可積分性) の条件を得ることを考え

---

\*九州大学大学院数理学研究府数理学専攻修士課程

<sup>1</sup> \$ 100 万の懸賞金がかかっている

る.  $u$  を Navier-Stokes 方程式の解とすると  $u$  はエネルギー方程式

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad a.e. \ t$$

をみたす. これより  $L^\infty(0, \infty; L^2) \cap L^2(0, \infty; \dot{H}^1)$  の元である時間大域的な弱解の存在が証明される. すると, 非線形項は Hölder 不等式

$$\|u \cdot \nabla v\|_{L^1(\Omega)} \leq C_N \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

により  $L^1(\Omega)$  に入ることがわかる. ここでは, 問題を半空間  $\mathbf{R}_+^N$  上に限り, Navier-Stokes 方程式

$$(N-S) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbf{R}_+^N, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbf{R}_+^N, \\ u(0, x) = u_0(x), & t = 0, \quad x \in \mathbf{R}_+^N, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial \mathbf{R}_+^N. \end{cases}$$

における非線形項  $u \cdot \nabla u$  に対する, より良い評価を実解析の方法により得ることを試みる.

得られた結果の概略を説明するために, 全空間と半空間上でのハーディー空間  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$ ,  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  を定義する.  $f \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$  であるとは  $\int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) dx = 1$  なる  $\varphi \in \mathcal{S}$  に対し,

$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)} \equiv \left\| \sup_{t>0} |(\varphi_t * f)(x)| \right\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} < \infty$  である  $L^1(\mathbf{R}^N)$  の元であり,  $f \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  であるとは  $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}_+^N)$  かつ,  $\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)} \equiv \inf_{\tilde{f}|_{\mathbf{R}_+^N} = f} \|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)} < \infty$  のとき. 得られた結果

の概略は次のとおりである.  $u \in L^2(\mathbf{R}_+^N)$  かつ  $\operatorname{div} u = 0$ ,  $v \in \mathbf{H}_0^1(\mathbf{R}_+^N) \equiv \overline{C_0^\infty(\mathbf{R}_+^N)}^{\mathbf{H}^1}$  と仮定すると  $u \cdot \nabla v$  はハーディー空間  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  に入り, 次の不等式が成り立つ.

$$\|u \cdot \nabla v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)} \leq C_N \|u\|_{L^2(\mathbf{R}_+^N)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}_+^N)}. \quad (1)$$

$\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  は  $L \log L(\mathbf{R}_+^N)^\dagger$  に真に含まれ,  $L \log L(\mathbf{R}_+^N)$  は  $L^1(\mathbf{R}_+^N)$  に真に含まれる. すなわち  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  は  $L^1(\mathbf{R}_+^N)$  に真に含まれるから,  $L^1(\mathbf{R}_+^N)$  空間での評価より (1) はより良い非線形項の評価を得たことになる. さらに,  $C_0^\infty$  ベクトルの divergence free ベクトルへの射影作用素  $P$  は,  $1 < p < \infty$  のとき  $P : L^p(\mathbf{R}_+^N) \rightarrow L^p(\mathbf{R}_+^N)$  においては有界な作用素に拡張できるが,  $P : L^1(\mathbf{R}_+^N) \rightarrow L^1(\mathbf{R}_+^N)$  で有界とはできない. ところが,  $P : \mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N) \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  有界となるので, Navier-Stokes 方程式を積分方程式に変換し, 解の  $L^1$  評価を得る際に, 非線形項の前に含まれる作用素  $P$  を処理する上で, ここで得られた  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}_+^N)$  上の非線形評価は重要である.

---

$^\dagger f \in L \log L(\mathbf{R}_+^N)$  であるとは  $\int_{\mathbf{R}_+^N} |f(x)| \log(e + |f(x)|) dx < \infty$  のとき

全空間  $\mathbf{R}^N$  においては類似の結果

$$\|u \cdot \nabla v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)} \leq C_N \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}, \quad (2)$$

が Coifman-Lions-Meyer-Semmes[1] により得られていた. 我々の結果は, その半空間上への拡張であるが,  $\mathbf{R}^N$  上での上の評価を Coifman-Lions-Meyer-Semmes による方法とは異なり, 上半空間  $\mathbf{R}_+^N$  上への調和拡張に対する Carleson 測度による有界性を用いた方法を基礎にして証明する. ここで  $\mu$  が Carleson measure であるとは,  $\mathbf{R}_+^{N+1}$  上の Borel measure  $\mu$  が, ある正の数  $\delta$  と  $\mathbf{R}_+^{N+1}$  上の高さ  $r$  の cylinder  $J(z, r) \equiv B(z, r) \times (0, r]$  に対して  $\mu(J(z, r)) \leq \delta |B(z, r)|$ ,  $\forall r > 0$ ,  $\forall z \in \mathbf{R}^N$  をみたすときをいう. Carleson measure を用いた証明方法は Chanillo[2] によって示唆されていた. ここでは特に, Carleson measure による調和拡張に対する  $L^p$  有界性と Fefferman の定理を用いて求める不等式 (2) が直接得られることを示す. これは Coifman-Lions-Meyer-Semmes の結果の新しい証明を得たことになり, 半空間へ拡張することにより, (1) の不等式が得られる. 近年 Giga-Matsui-Shimizu[3], Shimizu[4] らの半空間上での線形の評価が知られているため, ここで得られた不等式を用いて Navier-Stokes 方程式の解の  $t \rightarrow \infty$  での挙動の解析を行うことが期待できる.

## 参考文献

- [1] R.R.Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer, S.Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. **72**(1993), 247-286.
- [2] S.Chanillo, *Sobolev inequalities involving divergence*, Comm.P.D.E., **16**(1991), 1969-1994.
- [3] Y.Giga, S.Matsui, Y.Shimizu, *On estimates in Hardy spaces for the Stokes flow in a half space*, Math. Z. **231**(1999), 383-396.
- [4] Y.Shimizu,  *$L^\infty$ -Estimate of First-Order Space Derivatives of Stokes Flow in a Half Space*, Funkcialaj Ekvacioj, **42**(1999), 291-309.