流体方程式の非線形項の半空間上でのある評価

吉田　拓*

2001 年 2 月 24 日

1 Introduction

N 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$ 上の領域 Ω を流れる非圧縮性粘性流は, 時刻 t と Ω の各点 x での速度ベクトル $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_N(x,t))$ と圧力 $p(x,t)$ によって特徴付けられる. 速度ベクトルと圧力の組 $\{u(x,t),p(x,t)\}$ は次の Navier-Stokes 方程式に支配される.

$$
(\mathrm{N-S})\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=0, & t>0,\quad x\in\Omega, \\ \mathrm{div}\ u=0, & t>0,\quad x\in\Omega, \\ u(0,x)=u_0(x), & t=0,\quad x\in\Omega, \\ u(t,x)=0, & t>0,\quad x\in\partial\Omega. \end{cases}
$$

ここで $u\cdot\nabla u$ の第 i 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^N u_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_i(x)$ であり Δu は N 次元 Laplacian を意味し $\displaystyle\Delta u_i(x)=\sum_{j=1}^N\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}u_i(x)$ である. $\displaystyle\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial p}{\partial x_N}\right)$ であり $\displaystyle\mathrm{div}\ u=\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}u_j(x)$ である. 第 1 番目の方程式は運動量保存則を表わし第 2 番目の方程式は非圧縮性条件を表わしている.

初期値が小さいなど, 限定された状況の下での解析的な研究には多くの結果があり, 空間次元が 2 次元の場合の問題は時間大域的可能性が得られている. しかしながら 3 次元 Navier-Stokes 方程式の解の大域的適切性は未解決で, この問題には多くの注目が集まっている.[1] この未解決問題を考える上で, 解の正則性に関する先見評価を得ることが重要であるが, 流体方程式固有の非線形項 $u\cdot\nabla u$ によって, こうした評価を得ることは非常に難しい.

ここでは, こうした非線形項へのより良い正則性 (可積分性) の条件を得ることを考え

*九州大学大学院数理学研究府数理学専攻修士課程

[1] ＄100 万の懸賞金がかかっている

る. u を Navier-Stokes 方程式の解とすると u はエネルギー方程式

$$\|u(t)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 2\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} d\tau \leq \|u_0\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad a.e.\ t$$

をみたす. これより $\mathrm{L}^\infty(0,\infty:\mathrm{L}^2)\cap\mathrm{L}^2(0,\infty:\dot{\mathrm{H}}^1)$ の元である時間大域的な弱解の存在が証明される. すると, 非線形項は Hölder 不等式

$$\|u\cdot\nabla v\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leq\ C_N\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

により $\mathrm{L}^1(\Omega)$ に入ることがわかる. ここでは, 問題を半空間 $\mathbf{R}^N_+$ 上に限り, Navier-Stokes 方程式

$$(\mathrm{N-S})\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, & t>0,\quad x\in\mathbf{R}^N_+, \\ \mathrm{div}\ u = 0, & t>0,\quad x\in\mathbf{R}^N_+, \\ u(0,x) = u_0(x), & t=0,\quad x\in\mathbf{R}^N_+, \\ u(t,x) = 0, & t>0,\quad x\in\partial\mathbf{R}^N_+. \end{cases}$$

における非線形項 $u\cdot\nabla u$ に対する, より良い評価を実解析の方法により得ることを試しみる.

得られた結果の概略を説明するために, 全空間と半空間上でのハーディー空間 $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$, $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ を定義する. $f\in\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$ であるとは $\int_{\mathbf{R}^N}\varphi(x)dx = 1$ なる $\varphi\in\mathcal{S}$ に対し, $\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)} \equiv \left\|\sup_{t>0}|(\varphi_t * f)(x)|\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N)} < \infty$ である $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N)$ の元であり, $f\in\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ であるとは $f\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N_+)$ かつ, $\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)} \equiv \inf_{f=\tilde{f}|_{\mathbf{R}^N_+}}\|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)} < \infty$ のとき. 得られた結果の概略は次のとおりである. $u\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^N_+)$ かつ $\mathrm{div}\ u = 0$, $v\in\mathbf{H}^1_0(\mathbf{R}^N_+)\equiv\overline{\mathbf{C}^\infty_0(\mathbf{R}^N_+)}^{\mathbf{H}^1}$ と仮定すると $u\cdot\nabla v$ はハーディー空間 $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ に入り, 次の不等式が成り立つ.

$$\|u\cdot\nabla v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)} \leq\ C_N\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^N_+)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^N_+)}. \tag{1}$$

$\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ は $\mathrm{L}\log\mathrm{L}(\mathbf{R}^N_+)^\dagger$ に真に含まれ, $\mathrm{L}\log\mathrm{L}(\mathbf{R}^N_+)$ は $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N_+)$ に真に含まれる. すなわち $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ は $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N_+)$ に真に含まれるから, $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N_+)$ 空間での評価より (1) はより良い非線形項の評価を得たことになる. さらに, C^∞_0 ベクトルの divergence free ベクトルへの射影作用素 P は, $1<p<\infty$ のとき $\mathrm{P}:\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N_+)\longrightarrow\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^N_+)$ においては有界な作用素に拡張できるが, $\mathrm{P}:\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N_+)\longrightarrow\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N_+)$ で有界とはできない. ところが, $\mathrm{P}:\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)\longrightarrow\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ 有界となるので, Navier-Stokes 方程式を積分方程式に変換し, 解の L^1 評価を得る際に, 非線形項の前に含まれる作用素 P を処理する上で, ここで得られた $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N_+)$ 上の非線形評価は重要である.

---

† $f\in\mathrm{L}\log\mathrm{L}(\mathbf{R}^N_+)$ であるとは $\int_{\mathbf{R}^N_+}|f(x)|\log(e+|f(x)|)dx<\infty$ のとき

全空間 $\mathbf{R}^N$ においては類似の結果

$$\|u\cdot\nabla v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)} \leq \ C_N\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^N)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^N)}, \tag{2}$$

が Coifman-Lions-Meyer-Semmes[1] により得られていた. 我々の結果は, その半空間上への拡張であるが, $\mathbf{R}^N$ 上での上の評価を Coifman-Lions-Meyer-Semmes による方法とは異なり, 上半空間 $\mathbf{R}^N_+$ 上への調和拡張に対する Carleson 測度による有界性を用いた方法を基礎にして証明する. ここで μ が Carleson measure であるとは, $\mathbf{R}^{N+1}_+$ 上の Borel measure μ が, ある正の数 δ と $\mathbf{R}^{N+1}_+$ 上の高さ r の cylinder $J(z,r)\equiv B(z,r)\times(0,r]$ に対して $\mu(J(z,r))\leq\delta|B(z,r)|$, $\forall r>0$, $\forall z\in\mathbf{R}^N$ をみたすときをいう. Carleson measure を用いた証明方法は Chanillo[2] によって示唆されていた. ここでは特に, Carleson measure による調和拡張に対する L^p 有界性と Fefferman の定理を用いて求める不等式 (2) が直接得られることを示す. これは Coifman-Lions-Meyer-Semmes の結果の新しい証明を得たことになり, 半空間へ拡張することにより, (1) の不等式が得られる. 近年 Giga-Matsui-Shimizu[3] , Shimizu[4] らの半空間上での線形の評価が知られているため, ここで得られた不等式を用いて Navier-Stokes 方程式の解の $t\to\infty$ での挙動の解析を行うことが期待できる.

参考文献

[1] R.R.Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer, S.Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. **72**(1993), 247-286.

[2] S.Chanillo, *Sobolev inequalities involving divergence*, Comm.P.D.E., **16**(1991), 1969-1994.

[3] Y.Giga, S.Matsui, Y.Shimizu, *On estimates in Hardy spaces for the Stokes flow in a half space*, Math. Z. **231**(1999), 383-396.

[4] Y.Shimizu, L^∞-*Estimate of First-Order Space Derivatives of Stokes Flow in a Half Space*, Funkcialaj Ekvacioj, **42**(1999), 291-309.