

制約条件付き変分問題の解の正則性と一致点集合

東京理科大学理学研究科数学専攻 福間 健一

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と関数 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ について variational integral

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} f(Du) dx$$

の minimizer の regularity がいろいろな条件の下で調べられてきた． minimizer の概念を局所化したものとして次のような制約条件付き local minimizer を考える：

定義． 与えられた $\Phi \in W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Omega)$ に対して $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ が local $\mathcal{F}$ -minimizer subject to the constraint Φ であるとは $u \geq \Phi$ a.e. かつ $f(Du) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ で, $\text{supp}(u - v)$ が Ω の compact set となる任意の $v \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ に対して $v \geq \Phi$ a.e. ならば

$$\int_{\text{supp}(u-v)} f(Du) dx \leq \int_{\text{supp}(u-v)} f(Dv) dx$$

が成り立つことを言う．

最近 Fuchs-Mingione [1] は被積分関数に次の growth condition と elliptic condition を仮定し, 制約条件付きの local minimizer に関して full $C^{1,\alpha}$ -regularity を示した． $f \in C^2(\mathbb{R}^{nN})$ で, 任意の $\eta, z \in \mathbb{R}^{nN}$ に対して

$$\begin{cases} F(|z|) \leq f(z) \leq L(1 + |z|^2)^{\frac{q}{2}} \\ \nu|\eta|^2(1 + |z|^2)^{-\frac{\mu}{2}} \leq D^2 f(z)(\eta, \eta) \leq L(1 + |z|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\eta|^2 \end{cases} \quad (1)$$

とする．ここで, $\nu > 0$, $0 < L < \infty$, $1 < q, \mu < 2$, であり,

$$q < 2 - \mu + \frac{1}{n}. \quad (2)$$

F は 連続関数で superlinear growth, すなわち $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ で次を満たす

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = +\infty \quad (3)$$

定理.([1]) $n \geq 2$, (1)–(3) を仮定する． $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ が local $\mathcal{F}$ -minimizer subject to the constraint Φ であるとする． 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ となる．

この論文では [1] の議論を整理するとともに, full $C^{1,\alpha}$ -regularity よりも強い $C^{1,1}$ -regularity について考察し, また coincidence set $I_{\Phi} := \{x \in \Omega : u(x) = \Phi(x)\}$ の性質を調べた．

参考文献

- [1] M. Fuchs and G. Mingione, *Full $C^{1,\alpha}$ -regularity for free and constrained local minimizers of elliptic variational integrals with nearly linear growth*, Manuscripta Math. **102**(2000), 227–250.