制約条件付き変分問題の解の正則性と一致点集合

東京理科大学理学研究科数学専攻　福間 健一

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と関数 $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ について variational integral

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(Du)dx$$

の minimizer の regularity がいろいろな条件の下で調べられてきた．minimizer の概念を局所化したものとして次のような制約条件付き local minimizer を考える：

定義.　与えられた $\Phi \in W^{2,\infty}_{\rm loc}(\Omega)$ に対して $u \in W^{1,1}_{\rm loc}(\Omega)$ が local $\mathcal{F}$-minimizer subject to the constraint Φ であるとは $u \geq \Phi$ a.e. かつ $f(Du) \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ で，$\mathrm{supp}(u-v)$ が Ω の compact set となる任意の $v \in W^{1,1}_{\rm loc}(\Omega)$ に対して $v \geq \Phi$ a.e. ならば

$$\int_{\mathrm{supp}(u-v)} f(Du)dx \leq \int_{\mathrm{supp}(u-v)} f(Dv)dx$$

が成り立つことを言う．

最近 Fuchs-Mingione [1] は被積分関数に次の growth condition と elliptic condition を仮定し，制約条件付きの local minimizer に関して full $C^{1,\alpha}$-regurality を示した．$f \in C^2(\mathbb{R}^{nN})$ で，任意の $\eta, z \in \mathbb{R}^{nN}$ に対して

$$\begin{cases} F(|z|) \leq f(z) \leq L(1+|z|^2)^{\frac{q}{2}} \\ \nu|\eta|^2(1+|z|^2)^{-\frac{\mu}{2}} \leq D^2 f(z)(\eta,\eta) \leq L(1+|z|^2)^{\frac{q-2}{2}}|\eta|^2 \end{cases} \tag{1}$$

とする．ここで，$\nu > 0, \quad 0 < L < \infty, \quad 1 < q, \mu < 2,$ であり，

$$q < 2 - \mu + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

F は 連続関数で superlinear growth, すなわち $F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ で次を満たす

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = +\infty \tag{3}$$

定理.([1])　$n \geq 2$, (1)–(3) を仮定する．$u \in W^{1,1}_{\rm loc}(\Omega)$ が local $\mathcal{F}$-minimizer subject to the constraint Φ であるとすると任意の $0 < \alpha < 1$ に対して $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ となる．

この論文では [1] の議論を整理するとともに，full $C^{1,\alpha}$-regurality よりも強い $C^{1,1}$-regurality について考察し，また coincidence set $I_\Phi := \{x \in \Omega : u(x) = \Phi(x)\}$ の性質を調べた．

参考文献

[1] M. Fuchs and G. Mingione, *Full $C^{1,\alpha}$-regurality for free and constrained local minimizers of elliptic variational integrals with nearly linear growth*, Manuscripta Math. **102**(2000), 227–250.