平均曲率流方程式に対する Bence-Merriman-Osher 型近似アルゴリズムについて

後藤 陽子
九州大学大学院数理学府数理学専攻

Abstract

この講演では、BMO アルゴリズム [1] による平均曲率流方程式の近似の数学的な正当性を、今まで行われたものとは違う、Soner [2] による Allen-Cahn 方程式で用いられた手法で示す。

まず、ここで取り扱う平均曲率流方程式を説明する。Γ を $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋めこまれた n 次元 の滑らかな曲面とし、V は $x \in \Gamma(t)$ における界面 $\Gamma(t)$ の速度ベクトル、$\nu(x)$ は界面 の外向き法線ベクトル、$\kappa = \kappa(x)$ をその平均曲率 (の n 倍) とするとき

$$\begin{cases} V(x) = \nu\kappa(x) \\ \Gamma(0) = \partial C_0 \end{cases}$$

を平均曲率流方程式 (evolution of mean carvature flow) と呼ぶ。

等高面関数 $u \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を導入して、界面 $\Gamma(t)$ を $\{u = 0\}$ となるようにとると、平均曲率流方程式は

$$\partial_t u - \Delta u + \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2}\nabla^2 u = 0$$

と表される。

つぎにこれを近似する BMO アルゴリズムを述べる。

初期曲面からつくられる特性関数を初期値とする、次のような線型の熱方程式を考えて

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \chi_{C_0}(x) - \chi_{C_0^c}(x), & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

その $t = h$ の解を求める。 それを $u(h,x)$ とおいて次のような集合を考える。

$$C_1(x) = \{x \in \mathbb{R}^n | u(h,x) \geq 0\}$$

いま 対応 $\mathcal{H}(h) : C_0 \to C_1$ を k 回行うとき、

$$C_k \equiv \mathcal{H}(h)^k C_0$$

とおく。このとき $kh = T$ を一定に保ったまま $h \to 0$ とすると

$$\mathcal{H}(h)^k C_0 \to \Gamma(kh). \quad (\Gamma\text{:平均曲率流に従う界面})$$

これが BMO アルゴリズムによる近似である。

本研究は、九州大学数理学研究院小川卓克先生と神戸商船大学石井克幸先生との共同研究である。

次に界面の動きを記述する関数を定義する。$C(t) \subset \mathbb{R}^n$ を $\Gamma(t)$ に囲まれた集合とする。このとき界面 $\partial C(t)(= \Gamma(t))$ に対する符号付き距離関数 $d(t,x); [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d(t,x) = \begin{cases} \mathrm{dist}(x, \partial C(t)), & x \in C(t), \\ -\mathrm{dist}(x, \partial C(t)), & x \notin C(t) \end{cases}$$

とする。

ここでは、BMO アルゴリズムの各ステップの熱方程式の解 u_h を 1 次元の熱核と初期値との convolution と見なし、次のような関数 $U_0(\cdot)$ を用いて定式化する。
つまり $U_0(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-x^2} dx$ に対し

$$u_h(t,x) = U_0\left(\frac{z_h(t,x)}{2\sqrt{t-kh}}\right), \text{in } (kh, (k+1)h] \times \mathbb{R}^n$$

とする。ここで定義する z_h は界面からの距離を表すような関数であり、

$$\partial_t z_h - \Delta z_h + \frac{z_h}{2(t-kh)}(|\nabla z_h|^2 - 1) = 0$$

を満たす。この z_h に対し

$$P(t) = \{(t,x) | \liminf_{h\to 0} z_h(t,x) > 0\} : \text{界面の内側}$$
$$N(t) = \{(t,x) | \limsup_{h\to 0} z_h(t,x) < 0\} : \text{界面の外側}$$

とする。

最後に主結果を述べる。

Theorem 1 $d(t,x)$ を界面 $\Gamma(t)$ に対する符号付き距離関数とし、$int\ \Gamma(t) = \emptyset$ と仮定する。このとき

$$\lim_{h\to 0} z_h(t,x) = d(t,x), \qquad on\ P(t) \cup N(t)$$

また、$d(t,x)$ は $N(t)$ 上では平均曲率流方程式の *viscosity subsolution* となり、$P(t)$ 上では *viscosity supersolution* となる。特に $\Gamma(t)$ 上では *viscosity solution* となる。

Theorem 2 $\Gamma(t) = \partial P(t) = \partial N(t)$ と仮定する。このとき、界面 $\Gamma(t)$ に対する符号付き距離関数 $d(t,x)$ は $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ (時空) で連続である。

参考文献

[1] Bence, J., Merriman, B., Osher, S., *Diffusion generated motion by mean curvature* , in "Computational Cristal Growers Workshop" J.E. Tayler ed. Selected Lectures in Math. Amer. Math. Soc. Providence 1992.

[2] Soner, H.M., *Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature, I; convergence*, J. Geometric Anal. **7** no. 3 (1997), 437–475.