EXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS TO SOME SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

東京理科大学大学院 理学研究科
修士課程 数学専攻
伊藤　直子

本研究では、以下の半線形放物型方程式の初期値問題 (GH) に対する解の存在について考える.

$$\text{(GH)} \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + (-\Delta)^m u(t,x) = (u(t,x))^\gamma, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n,\ \gamma > 1,\ m \in \mathbb{N} \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

但し $u(t,x)$ は非負値関数とする. (GH) において $m = 1$ とすると,

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = (u(t,x))^\gamma, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n,\ \gamma > 1 \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(H) の第一式は熱方程式を表しているので, (GH) の第一式は熱方程式を一般化した方程式と考えることができる. 熱方程式の解の存在, 非存在については FRED B.WEISSLER [1] など様々な方法で多くの研究が行われている. 本研究では初期値問題 (GH) に対し以下の定理を示した.

定理 1.
n,m,γ が $\frac{n(\gamma-1)}{2m} > 1$ を満たすものと仮定する. また初期値 ϕ は $\phi \in L^{\frac{n(\gamma-1)}{2m}}(\mathbb{R}^n)$ でかつ $\phi \geqq 0$ を満たし, さらに $\|\phi\|_{\frac{n(\gamma-1)}{2m}}$ が十分小であるものとする. そのとき, u :$[0,\infty) \longrightarrow L^{\frac{n(\gamma-1)}{2m}}$ となるような初期値問題 (GH) に対する非負な時間大域解が一意に存在する.

上の定理は, 初期値 $\phi \in L^{\frac{n(\gamma-1)}{2m}}(\mathbb{R}^n)$ が十分小さいとき, 初期値問題 (GH) の時間大域解が存在することを主張している. 本研究では (GH) の第一式を一般化された熱方程式であると捉えることにより, 熱方程式の初期値問題 (H) と同様の方法で解の存在が云えるのではないかと考え, (GH) に対する基本解の評価式を作り, 縮小写像の原理を用いて初期値問題 (GH) に対する解の存在を証明した.

参考文献

[1] FRED B. WEISSLER, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math., **38** (1981),no1-2, pp.29–40.