Heat equations with singular potentials

東京理科大学大学院　理学研究科　数学専攻
中野　由美子

次の熱方程式の初期値問題の解の存在・非存在について考える:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} u \geq 0 \ \text{ a.e. on } \ \mathbf{R}^N \times (0,T), \\ u, Vu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N \times (0,T)), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = Vu + f \ \text{ in } \ \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \times (0,T)), \\ \operatorname*{ess\,lim}_{t \downarrow 0} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} u(x,t)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(x)\,dx \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N). \end{cases}
$$

ここで空間次元 $N \geq 2$ とし, $0 \leq V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$, $0 \leq f \in L^1(\mathbf{R}^N \times (0,T))$, $0 \leq u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$ と仮定する. 特に, ポテンシャル V は原点に特異性をもつものまで含んでいる.

本研究の目的は, 最近その非線形化が研究され始めている次の定理を丁寧に証明することである.

定理 (Baras-Goldstein [**1**])**.** $V_0(x) := \dfrac{\lambda}{|x|^2}$ for $x \in B_1 := \{x \in \mathbf{R}^N;\ |x| < 1\}$ とおく.

(I) $0 \leq \lambda \leq ((N-2)/2)^2$, $V \in L^\infty(\mathbf{R}^N \setminus B_1)$ で, α は $(N-2-\alpha)\alpha = \lambda$ の小さい方の根とする.

(I-1) $V \leq V_0$ on B_1,

$$
(*) \qquad \int_{\mathbf{R}^N} |x|^{-\alpha} u_0(x)\,dx < \infty, \quad \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} |x|^{-\alpha} f(x,s)\,dxds < \infty
$$

ならば, 問題 (P) は解をもつ.

(I-2) $V \geq V_0$ on B_1, $u_0 \not\equiv 0$ で, 問題 (P) が解をもつならば,

$$
\forall\, \Omega \subset\subset \mathbf{R}^N \ \ \forall\, \varepsilon \in (0,T) \ \ \exists\, C := C(\varepsilon,\Omega) > 0\,; \ \ u(x,t) \geq \frac{C}{|x|^\alpha} \ \text{ a.a. } (x,t) \in \Omega \times [\varepsilon, T)
$$

が成立し, さらに $(*)$ で $\mathbf{R}^N$ を Ω に, T を $T-\varepsilon$ に置き換えたものが成立する.

(II) $\lambda > ((N-2)/2)^2$, $V \geq V_0$ on B_1, $u_0 \not\equiv 0$ ならば, 問題 (P) は解をもたない.

この定理を証明するために, $n \in \mathbf{N}$ に対して, $V_n := V \wedge n$, $f_n := f \wedge n$ とおき, 次の近似方程式を考える:

$$
(\mathrm{P}_n) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = V_n u_n + f_n \ \text{ in } \ \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \times (0,T)), \\ u_n(0) = u_0 \ \text{ in } \ L^1(\mathbf{R}^N). \end{cases}
$$

[**1**] では, 定理の証明において重要な役割を果たす次の 2 つの事実の証明が省略されている.

(a) 問題 (P_n) の解 $u_n \in C([0,T]; L^1(\mathbf{R}^N))$ の一意存在.

(b) 問題 (P) の解 u と問題 (P_n) の解 u_n との大小関係: $u \geq u_n$.

そこで, 本研究では半群の性質を利用して (a) と (b) に対しても明確な証明を与えようと試みた. しかし (b) の証明は予想以上に困難で問題 (P) の解のクラスを少し限定せざるを得なかった.

参考文献

[1] P. Baras and J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1984), 121–139.