摩擦項をもつ波動方程式に対する抽象散乱理論

日本工業大学工学部、東海大学理学部非常勤講師　中澤秀夫

2001.6.30

1. 序

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} w_{tt} - \triangle w + b(x) w_t = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ w(x,0) = w_0(x), \qquad w_t(x,0) = w_1(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}
$$

の散乱問題を考える。ここで、$b(x)$ は有界かつ 1 階連続的微分可能実数値函数とする。

K. Mochizuki [4] は (1.1) with $N \neq 2$ に対し正の時間方向での散乱状態の存在を証明した。その後 K. Mochizuki [6] は同様の結果を負の時間方向に対しても示し散乱理論を構成した。

定理 0 (K. Mochizuki [6]). 空間次元 N は 2 でないとし、$b(x)$ は次の条件を満たす 1 階連続的微分可能複素数値函数とする：

或る非負の実数値連続函数 $a(r)$ $(r = |x|)$ で、$a(\cdot) \in L^1([0,\infty))$, $\int_r^\infty a(s)ds \geq ra(r)$, $\int_0^\infty a(r)dr < (\sqrt{5}-1)/4$ を満たすものが存在して $|b(x)| \leq a(r)$ が成り立つ。

このとき波動作用素 $W_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} U(-t) U_0(t)$ がエネルギー空間 $E \equiv \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ 上存在し全単射である。従って散乱作用素 $S = W_+^{-1} W_-$ が定義できる。

以下ではこの結果を 2 次元空間の場合に拡張し、更により抽象的な枠組みを与えることを考える。

主結果を述べるために次の記号を導入する：

記号と定義.

(1) $e_0 = 1, \quad e_n = e^{e_{n-1}} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$

(2) $\log^{[0]} a = a, \quad \log^{[n]} a = \log\log^{[n-1]} a \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$

(3) (重み付き L^2–空間)

任意に固定した $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$
L^{2,n,\alpha,\beta} = \{\ f \ \mid\ \|f\|_{n,\alpha,\beta} < \infty\},
$$

但し

$$\|f\|^2_{n,\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\prod_{j=0}^{n-1} \log^{[j]}(e_n + r) \Big]^{2\alpha} \Big[\log^{[n]}(e_n + r) \Big]^{2\beta} |f(x)|^2 dx.$$

特に $n = 0$ に対しては $L^{2,\beta} \equiv L^{2,0,\alpha,\beta}$ と書く。

(4)（Besov 型の函数空間 (S. Agmon–L. Hörmander [2])）

$$B_{1/2} = \big\{ f \,|\, ||f||_{B_{1/2}} < \infty \big\}$$

但し

$$||f||_{B_{1/2}} = \sum_{j \geq 1} 2^{(j-1)/2} \Big\{ \int_{2^{j-2} < r < 2^{j-1}} |f(x)|^2 dx \Big\}^{1/2}$$

ここで $2^{-1} \equiv 0$ と約束する。

$B^*_{1/2}$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ に関する $B_{1/2}$ の共役空間。

この定義から特に次が成り立つ：

命題 **1.**

(1) 任意に固定した $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ に対して

$$L^{2,(1+\delta)/2} \subset L^{2,n,1/2,(1+\delta)/2} \subset B_{1/2} \subset L^2 \subset B^*_{1/2} \subset L^{2,n,-1/2,-(1+\delta)/2} \subset L^{2,-(1+\delta)/2}.$$

従って特に正定数 K_1, K_2 が存在して任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\delta > 0$ に対して

$$||h_1||_{B_{1/2}} \leq K_1 ||h_1||_{n,1/2,(1+\delta)/2},$$
$$||h_2||_{n,-1/2,-(1+\delta)/2} \leq K_2 ||h_2||_{B^*_{1/2}}$$

が成り立つ。

(2) m, $n \in \mathbb{N}$ が $m < n$ を満たすとすると

$$L^{2,(1+\delta)/2} \subset L^{2,m,1/2,(1+\delta)/2} \subset L^{2,n,1/2,(1+\delta)/2} \subset L^2.$$

更に後に必要となる結果として

命題 **2 (S. Agmon** [1]**).** $N \geq 2$ として $u(x)$ を *Hermholtz* 方程式

$$(-\Delta - \kappa^2) u(x) = f(x) \quad in \quad \mathbb{R}^N$$

の解とする。このとき $\kappa \in \mathbb{C}$ に依らない正定数 C_A が存在して

$$|\kappa| ||u||_{B^*_{1/2}} \leq C_A ||f||_{B_{1/2}}$$

が成り立つ、ここに、

$$C_A = \begin{cases} \{(\sqrt{5}+1)^2 + 1\}^{1/2} \quad (N = 2), \\ \sqrt{5} + 1 \quad (N \geq 3) \end{cases}$$

である。

仮定は次の通り：

(B): $N \geq 2$, ${}^{\exists}n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ${}^{\exists}b_0(>0)$, ${}^{\exists}\delta > 0$ satisfying $0 < b_0 < (K_1 K_2 C_A)^{-1}$ s.t.

$$|b(x)| \leq \begin{cases} b_0(1+r)^{-1-\delta} & (\text{if} \quad n = 0), \\ b_0 \left[\prod_{j=0}^{n-1} \log^{[j]}(e_n + r)\right]^{-1} \left[\log^{[n]}(e_n + r)\right]^{-1-\delta} & (\text{if} \quad n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

主結果は次の通り：

定理 1 (散乱理論). (B) を仮定する。このとき波動作用素がエネルギー空間上存在して全単射となる。従って散乱作用素が定義できる。

系 2 (散乱状態の存在). (B) において $b(x) \geq 0$ とし、b_0 の小ささは仮定しない。このとき自由な系の解 $w_0(x,t)$（即ち (1.1) *with* $b(x) \equiv 0$ の解）が存在して (1.1) の解 $w(x,t)$ はエネルギーノルムの意味で $w_0(x,t)$ に時刻正の無限大で漸近する、従って散乱状態になる。

2. 抽象的枠組み

次の仮定を置く：

(A) 非負の関数 $a(x)$ と $L^2(\mathbb{R}^N)$ の部分空間 X で次を満たすものが存在する：

$(a.1)$ $X \subset L^2 \subset X^*$ ここに X^* は X の L^2 に関する共役空間を表わす。

$(a.2)$ $||a(\cdot)f||_X \leq C_1||f||_{L^2}$, $||a(\cdot)f||_{L^2} \leq C_2||f||_{X^*}$ を満たす正定数がある。

$(a.3)$ $|b(x)| \leq a(x)$ が成り立つ。

$(a.4)$ u を Hermholtz 方程式：

$$(-\Delta - \kappa^2)u = g(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N$$

の解とするとき、次の評価が成り立つ：

$$|\kappa|||u||_{X^*} \leq C_N||g||_X,$$

ここに C_N は κ に依らない正定数。

$(a.5)$ $0 < C_1 C_2 C_N < 1$ が成り立つ。

命題 3. (A) の仮定のもとで、波動作用素が存在し、エネルギー空間上の全単射となる、従って散乱作用素が定義できる。

この結果に依れば仮定 (B) よりもやや弱い次の仮定 (B') の下で定理 1 の結論が得られることも判る：

(B') $N \geq 2$ とし、$\sum_{j\geq 1} 2^{j-1}a(2^{j-2}) < \infty$ を満たす実数値函数 $a(r)$ が存在して $|b(x)| \leq a(r)$ が成り立つ。

このような函数 $a(r)$ の具体例が (B) に現れている対数函数である。

更に、摩擦項の係数が時間に本質的に依存する場合にはもっと弱い条件（$|b(x,t)| \leq^{\exists} a(t) \in L^1(\mathbb{R})$ だけでよく、$b(x,t)$ の小ささは不要) のもとで、散乱状態の存在が簡単に証明されることも判明した。その証明方法は全空間だけでなく、有界な障害物の外部領域 Ω における問題（境界条件は Dirichlet, Neumann–Robin ）に対しても適用可能である。

References

1. S. Agmon, *A representation theorem for solutions of the Helmholtz equation and resolvent estimates for the Laplacian*, (P. H. Rabinowitz and E. Zehnder, eds.), Analysis, et cetra, Academic press, Boston, 1990, pp. 39–76.
2. S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equation with simple characteristics*, J. Analyse. Math **30** (1976), 1–38.
3. T. Kato, *Wave operators and similality for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 258–279.
4. K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **12** (1976), 383–390.
5. K. Mochizuki, *Scatteing Theory for Wave Equations*, Kinokuniya, Tokyo, 1984. (japanese)
6. K. Mochizuki, *Spectral representation and scattering for the wave equation* $w_{tt} + b(x)w_t - \Delta w = 0$, Talk presented at the Workshop held at the University of Tsukuba, Ibaraki, Japan, (February 2000).
7. K. Mochizuki and H. Nakazawa, *Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **32** (1996), 401–414.
8. H. Nakazawa, *The principle of limiting absorption for the non–selfadjoint Schrödinger operator with energy dependent potential*, Tokyo J. Math. **23** (2000), 519–536.
9. G. F. Roach and B. Zhang, *On Sommerfeld radiation conditions for the diffraction problem with two unbounded media*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh. **121A** (1992), 149–161.
10. D. R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory—General Theory*, Translations of Mathematical Monographs, vol.105, A.M.S. Soc. Providence, Rhode Island, 1992.
11. B. Zhang, *Commutator estimates, Besov spaces and scattering problems for the acoustic wave propagation in perturbed stratified fluids*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000), 177–192.