対称空間内の部分多様体と
ヒルベルト空間内のフレッドホルム部分多様体

小池直之

以下、(可分な) 無限次元ヒルベルト空間を単にヒルベルト空間と呼び、有限次元ヒルベルト空間をユークリッド空間と呼ぶことにする。[DN] において、B.A. Dubrovin と S.P. Novikov は、流体型ハミルトン系という系を定義し、非局所ハミルトニアンというものから生ずるその系と (擬) ユークリッド空間内の超曲面 (局所的なもの) とが、対応することを示した。自然に次の疑問が生ずる。

(擬) ヒルベルト空間内の (ヒルベルト) 超曲面と対応する (無限) ハミルトン系は?

このように、(擬) ヒルベルト空間内の超曲面 (一般に、部分多様体) の研究は、(無限) ハミルトン系の研究にも役立つと思われる。

以下、部分多様体は、すべて固有にはめ込まれたものとする。1995 年、C.L. Terng と G. Thorbergsson は、コンパクト型対称空間内の部分多様体の問題をヒルベルト空間内の部分多様体の問題にすりかえることを試み、[TT] において、例えば、コンパクト型対称空間内の equifocal 部分多様体の研究が、ヒルベルト空間内の等径部分多様体の研究に還元できることを示した。

以下、しばらく、equifocal 部分多様体と等径部分多様体の説明をします。まず、equifocal 部分多様体とは、対称空間内の次の 2 条件を満たす部分多様体のことである。

(E-i) M の法バンドルは、アーベル的かつ大域的平坦である。

(E-ii) M の各平行法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ $(x \in M)$ 方向のフォーカル半径らが、各々、x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

この概念は、1995 年、C.L. Terng と G. Thorbergsson によって定義された。一方、等径部分多様体とは、1938 年に E. Cartan によって定義された定曲率空間 (ユークリッド空間, 球面, 双曲空間) 内の等径超曲面を、C.L. Terng が一般化した概念である。まず、等径超曲面の定義を振り返ることにする。E. Cartan は、定曲率空間上の C^∞ 関数 f で $||\mathrm{grad}\, f||$ と $\triangle f$ が f の各等高面上で一定 (つまり、等高面の進行速度が一定、かつ、各等高面の平均曲率が一定) であるようなものを、等径関数とよび、その正則等高面 (これは定曲率空間内の余次元 1 の部分多様体、つまり、超曲面になる) の各連結成分を等径超曲面とよんだ。f の臨界点全体からなる集合の各連結成分は、f の正則等高面らの共通の焦点の集まり、つまり、フォーカル部分多様体になっており、正則等高面らは、そのフォーカル部分多様体のチューブとして捕らえられる。この事実を物理的に解釈すると、f の正則等高面らはフォーカル部分多

様体 (フォーカル部分多様体は最高 6 つ存在しうる) の 1 つを発生源とする一定速度で進行する波の波面らとして捕らえられる。また、等径超曲面について、次の事実が示される。

(i) M の主曲率 (形作用素の固有値) らは、各々、M 上で一定である。
(ii) M のフォーカル部分多様体の形作用素らは、アイソスペクトラルであり、それゆえ、その任意の 1 パラメーター族はある Lax 方程式を満たす。また、M が等質であることとその Lax 方程式が可積分であることが同値である。

(注) ユークリッド空間内の等径超曲面 (一般に、Dupin 超曲面) は、非局所ハミルトニアンから生ずる流体型ハミルトン系で線形非退化なものと対応する。

その後、1985 年に、C.L. Terng [T1] は、定曲率空間内の次の 2 条件を満たす部分多様体 M を等径部分多様体とよんだ。

(I-i) M の法接続は (大域的) 平坦である。
(I-ii) M の各平行法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\tilde{v}_x$ 方向の主曲率らは、各々、x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

さらに、1989 年、C.L. Terng [T2] は、ヒルベルト空間内で、上述の 2 条件と次の固有フレッドホルム性とよばれる性質を満たす余次元有限な (ヒルベルト) 部分多様体を等径部分多様体とよんだ。

(PF) 法指数写像がフレッドホルム写像で、かつ、勝手な半径のボール法バンドルへの制限が固有写像になっている。

では、本論に戻ることにする。前述の C.L. Terng と G. Thorbergsson による、コンパクト型対称空間内の equifocal 部分多様体の研究をヒルベルト空間内の等径部分多様体の研究に還元する方法について説明します。$N = G/K$ をコンパクト型対称空間とし、$H^0([0,1],\mathfrak{g})$ を G のリー代数 $\mathfrak{g}$ 内の L^2-積分可能な ($[0,1]$ を定義域とする) 曲線全体のつくるヒルベルト空間とする。また、$\phi : H^0([0,1],\mathfrak{g}) \to G$ を parallel transport 写像とし、$\pi : G \to G/K$ を自然な射影とし、$\widetilde{\phi} := \pi \circ \phi$ とする。このとき、かれらは、N 内の部分多様体 M に対し、$\widetilde{M} := \widetilde{\phi}^{-1}(M)$ が、$H^0([0,1],\mathfrak{g})$ 内の固有フレッドホルム部分多様体になることを示し、さらに、M が equifocal であることと $\widetilde{M}$ の各連結成分が等径的であることが同値であることを示した。

今回、M が curvature adapted であるときに、$\widetilde{M}$ の形作用素のスペクトラムおよびその各固有値 (スペクトル) に対する固有空間を完全に記述した。つまり、外の空間 $H^0([0,1],\mathfrak{g})$ から見た $\widetilde{M}$ の形を (局所的に) 完全に分析した。ここで、curvature adapted 部分多様体 M とは、その各法ベクトル v に対し、$R(\cdot,v)v$ が M の接空間を保ち、形作用素 A_v と可換であるようなもののことである。では、その記述を述べるための準備をする。M を $N = G/K$ 内の curvature adapted 部分多様体とし、その

形作用素 $A_v(v:M$ の単位法ベクトル$)$ のスペクトラムを $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_g\}$ とする。ここで、必要なら G の適当な要素を M に作用させたものを改めて M とすることにより、v の基点は eK $(e:G$ の単位元$)$ であるとしてよい。$(\mathfrak{g},\sigma)$ を N の直交対称リー代数とし、$\mathfrak{p}:=Ker(\sigma+\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$, $\mathfrak{f}:=Ker(\sigma-id_{\mathfrak{g}})$ とする。また、$\mathfrak{p}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\triangle_+}\mathfrak{p}_\alpha$ を v を含むある極大アーベル部分空間 $\mathfrak{h}$ に関するルート分解とし、さらに、$\triangle_\perp$, $\triangle_v$, I_0, I_α を次のように定義する。

$\triangle_\perp:=\{\alpha\in\triangle_+\,|\,\mathfrak{p}_\alpha\cap T^\perp_{eK}M\neq\{0\}\}$, $\triangle_v:=\{\alpha\in\triangle_+\,|\,\alpha(v)=0\}$,

$I_0:=\{i\,|\,\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_iI)\neq\{0\}\}$, $I_\alpha:=\{i\,|\,\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_iI)\neq\{0\}\}$

また、$\tilde{\mathfrak{h}}$ を $\mathfrak{h}$ を含む $\mathfrak{g}$ 内の極大アーベル部分代数とし、$\hat{\cdot}$ は $\cdot\in\mathfrak{g}$ における停留曲線を表し、$\mathfrak{h}_\mathfrak{f}:=\tilde{\mathfrak{h}}\cap\mathfrak{f}$ とする。さらに、$X\in\mathfrak{p}_\alpha$ に対し、$X_\mathfrak{f}$ を $\mathrm{ad}(a)X=-\alpha(a)X_\mathfrak{f}$ $(\forall a\in\mathfrak{h})$ によって定義される $\mathfrak{f}$ の元とする。

定理 1 $\widetilde{M}=\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ の形作用素 $\widetilde{A}_{v^L}$ $(v^L:v$ の $\hat{0}$ への水平リフト$)$ のスペクトラム $\mathrm{Spec}\widetilde{A}_{v^L}$ は、次によって与えられる。

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}\widetilde{A}_{v^L}=&\{0\}\cup\{\lambda_i\,|\,i\in I_0\cup(\cup_{\alpha\in\triangle_v}I_\alpha)\}\\&\cup(\cup_{\alpha\in\triangle_+\setminus\triangle_v}\{\tfrac{\alpha(v)}{\arctan\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi}\,|\,i\in I_\alpha,\ j\in\mathbf{Z}\})\\&\cup(\cup_{\alpha\in\triangle_\perp\setminus\triangle_v}\{\tfrac{\alpha(v)}{j\pi}\,|\,j\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\})\end{aligned}$$

また、各固有値 (スペクトル) に対する固有空間は、次の表のようになる。

固有値	固有空間
0	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}\,\|X\in((\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ker}A_v)\oplus(\oplus_{\alpha\in\triangle_v}(\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}A_v)))\oplus\mathfrak{h}_\mathfrak{f}\}$ $\oplus\mathrm{Span}\{\widehat{X}_\mathfrak{f}\,\|\,X\in\oplus_{\alpha\in\triangle_v}\mathfrak{p}_\alpha\}$ $\oplus\mathrm{Span}\{l^i_{X,j}\,\|\,X\in\tilde{\mathfrak{h}}\oplus(\oplus_{\alpha\in\triangle_v}\mathfrak{p}_\alpha),\ i=1,2,\ j\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\}$
λ_i	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}\,\|\,X\in(\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_iI))\oplus(\oplus_{\alpha\in\triangle_v}(\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_iI)))\}$
$\frac{\alpha(v)}{\arctan\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi}$	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}+a_{\alpha ij}\widehat{X}_\mathfrak{f}+\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}b_{\alpha ijk}$ $\times(l^1_{X,k}+a_{\alpha ij}l^2_{X,k})\,\|\,X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_iI)\}$
$\frac{\alpha(v)}{2j\pi}$	$\mathrm{Span}\{l^1_{X,-j}\,\|\,X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap T^\perp_{eK}M\}$
$\frac{\alpha(v)}{(2j+1)\pi}$	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}_\mathfrak{f}+\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\frac{2j+1}{2k+2j+1}l^2_{X,k}\,\|\,X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap T^\perp_{eK}M\}$

$$\left(\begin{array}{l}a_{\alpha ij}:=\frac{\lambda_i}{\alpha(v)}-\frac{1}{\sin(\arctan\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi)},\qquad b_{\alpha ijk}:=\frac{\arctan\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi}{\arctan\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+(j+2k)\pi}\\ l^1_{X,j}(t):=\begin{cases}X\cos(2j\pi t)-X_\mathfrak{f}\sin(2j\pi t) & (X\in\mathfrak{p}_\alpha)\\ X\cos(2j\pi t) & (X\in\tilde{\mathfrak{h}})\end{cases}\\ l^2_{X,j}(t):=\begin{cases}X\sin(2j\pi t)+X_\mathfrak{f}\cos(2j\pi t) & (X\in\mathfrak{p}_\alpha)\\ X\sin(2j\pi t) & (X\in\tilde{\mathfrak{h}})\end{cases}\end{array}\right)$$

(注) $\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} c_k$ は、$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k+c_{-k})$ を表す。
応用として、次の結果を得ることができる。

定理 **2** M が curvature adapted かつ極小ならば、$\widetilde{M}$ は形式的極小である。

定理 **3** N が階数 1 のとき、M が curvature adapted かつアイソスペクトラルならば、$\widetilde{M}$ もアイソスペクトラルである。

ところで、Terng-Thorbergsson [TeTh] のオープンプロブラムの 1 つに次の問題がある。

オープンプロブラム 非コンパクト型対称空間内の equifocal 部分多様体に対し、類似した議論を展開することができるか ?

さらに、最近、この問題に取り組み、いくつかの結果を得た。$N=G/K$ を非コンパクト型対称空間とし、N のリーマン計量を誘導する G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な非退化 (正定値ではない) 内積を $<\ ,\ >$ と表す。$<\ ,\ >$ から $\mathfrak{g}$ の標準分解を用いて、自然に正定値化した内積を $<\ ,\ >_{\mathfrak{g}_\pm}$ と表す。$<\ ,\ >_{\mathfrak{g}_\pm}$ に関し L^2-積分可能な ($[0,1]$ を定義域とする)$\mathfrak{g}$ 内の曲線全体のつくる空間を $H^0_{\mathfrak{g}_\pm}([0,1],\mathfrak{g})$ とし、この空間に $<\ ,\ >$ から自然に決まる非退化内積 $<\ ,\ >_0$ を与える。$(H^0_{\mathfrak{g}_\pm}([0,1],\mathfrak{g}),<\ ,\ >_0)$ は、擬ヒルベルト空間になる。ϕ, π, $\widetilde{\phi}$ を前述と同様に定義する。N 内の部分多様体 M に対し、$\widetilde{M}:=\widetilde{\phi}^{-1}(M)$ とおく。M が curvature adapted であるときに、$\widetilde{M}$ の形作用素のスペクトラムおよびその各固有値 (スペクトル) に対する固有空間を完全に記述した。v, v^L, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}_\alpha$, $\triangle_+$, $\triangle_v$, $\triangle_\perp$, I_0, I_α, $\tilde{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{h}_\mathfrak{f}$ を定理 1 と同様なものとする。また、I^+_α, I^-_α を次のように定義する。

$I^+_\alpha:=\{i\in I_\alpha\,|\,|\lambda_i|>|\alpha(v)|\}$, $I^-_\alpha:=\{i\in I_\alpha\,|\,|\lambda_i|<|\alpha(v)|\}$

さらに、$X \in \mathfrak{p}_\alpha$ に対し、$X_\mathfrak{f}$ を $\mathrm{ad}(a)X = \alpha(a)X_\mathfrak{f}$ $(\forall a \in \mathfrak{h})$ によって定義される $\mathfrak{f}$ の元とする。

<u>定理 4</u> $\mathrm{Spec}A_v = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_g\}$ ならば、$\widetilde{A}_{v^L}$ $(v^L : v$ の $\hat{0}$ への水平リフト$)$ のスペクトラムは、次によって与えられる。

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}\widetilde{A}_{v^L} = \{0\} &\cup \{\lambda_i \,|\, i \in I_0 \cup (\cup_{\alpha\in\triangle_v} I_\alpha)\} \\ &\cup \big(\cup_{\alpha\in\triangle_+\setminus\triangle_v}\big\{\tfrac{\alpha(v)}{\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi\sqrt{-1}} \,|\, i \in I_\alpha^+,\ j \in \mathbf{Z}\big\}\big) \\ &\cup \big(\cup_{\alpha\in\triangle_+\setminus\triangle_v}\big\{\tfrac{\alpha(v)}{\mathrm{arctanh}\frac{\lambda_i}{\alpha(v)}+(j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}} \,|\, i \in I_\alpha^-,\ j \in \mathbf{Z}\big\}\big) \\ &\cup \big(\cup_{\alpha\in\triangle_\perp\setminus\triangle_v}\big\{\tfrac{\alpha(v)\sqrt{-1}}{j\pi} \,|\, j \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}\big\}\big)\end{aligned}$$

また、各固有値 (スペクトル) に対する固有空間は、次の表のようになる。

固有値	固有空間
0	$\mathrm{Span}\{\widehat{X} \,\|X \in ((\mathfrak{h}\cap \mathrm{Ker}A_v)\oplus(\oplus_{\alpha\in\triangle_v}(\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}A_v)))\oplus\mathfrak{h}_\mathfrak{f}\}$ $\oplus\mathrm{Span}\{\widehat{X}_\mathfrak{f} \,|\, X \in \oplus_{\alpha\in\triangle_v}\mathfrak{p}_\alpha\}$ $\oplus\mathrm{Span}\{l^i_{X,j} \,|\, X \in \tilde{\mathfrak{h}}\oplus(\oplus_{\alpha\in\triangle_v}\mathfrak{p}_\alpha),\ i=1,2,\ j\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\}$
λ_i	$\mathrm{Span}\{\widehat{X} \,|\, X \in (\mathfrak{h}\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_i I))\oplus(\oplus_{\alpha\in\triangle_v}(\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_i I)))\}$
$\frac{\alpha(v)}{\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi\sqrt{-1}}$	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}+a_{\alpha ij}\widehat{X}_\mathfrak{f}+\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}b_{\alpha ijk}$ $\times(l^1_{X,k}+a_{\alpha ij}l^2_{X,k}) \,|\, X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_i I)\}$
$\frac{\alpha(v)}{\mathrm{arctanh}\frac{\lambda_i}{\alpha(v)}+(j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}}$	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}+a'_{\alpha ij}\widehat{X}_\mathfrak{f}+\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}b'_{\alpha ijk}$ $\times(l^1_{X,k}+a'_{\alpha ij}l^2_{X,k}) \,|\, X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap\mathrm{Ker}(A_v-\lambda_i I)\}$
$\frac{\alpha(v)\sqrt{-1}}{2j\pi}$	$\mathrm{Span}\{l^1_{X,j} \,|\, X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap T^\perp_{eK}M\}$
$\frac{\alpha(v)\sqrt{-1}}{(2j+1)\pi}$	$\mathrm{Span}\{\widehat{X}_\mathfrak{f}+\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\frac{2j+1}{2j-2k+1}l^2_{X,k} \,|\, X\in\mathfrak{p}_\alpha\cap T^\perp_{eK}M\}$

$$\left(\begin{array}{l}
a_{\alpha ij} := \frac{\lambda_i}{\alpha(v)} - \frac{(-1)^j}{\sinh(\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(v)}{\lambda_i})}, \qquad b_{\alpha ijk} := \frac{\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+j\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(v)}{\lambda_i}+(j+2k)\pi\sqrt{-1}} \\
a'_{\alpha ij} := \frac{\lambda_i}{\alpha(v)} - \frac{(-1)^j\lambda_i\sqrt{-1}}{\alpha(v)\sinh(\mathrm{arctanh}\frac{\lambda_i}{\alpha(v)})}, \qquad b'_{\alpha ijk} := \frac{\mathrm{arctanh}\frac{\lambda_i}{\alpha(v)}+(j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{arctanh}\frac{\lambda_i}{\alpha(v)}+(j+2k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}} \\
l^1_{X,j}(t) := \begin{cases} X\cos(2j\pi t)+\sqrt{-1}X_\mathfrak{f}\sin(2j\pi t) & (X\in\mathfrak{p}_\alpha) \\ X\cos(2j\pi t) & (X\in\tilde{\mathfrak{h}}) \end{cases} \\
l^2_{X,j}(t) := \begin{cases} \sqrt{-1}X\sin(2j\pi t)+X_\mathfrak{f}\cos(2j\pi t) & (X\in\mathfrak{p}_\alpha) \\ \sqrt{-1}X\sin(2j\pi t) & (X\in\tilde{\mathfrak{h}}), \end{cases}
\end{array}\right)$$

さらに、今回、非コンパクト型対称空間内で、複素 equifocal 部分多様体という概念、および、擬ヒルベルト空間内で複素等径部分多様体という概念を定義し、定理 4 の応用として、次の結果を得ることができた。

定理 5 M が curvature adapted であり、かつ、その法バンドルがアーベル的かつ大域的平坦であるとする。このとき、M が複素 equifocal 部分多様体であることと $\widetilde{M}$ の各連結成分が複素等径部分多様体であることは同値である。

また、定理 2 および 3 と同様な結果も得ることができた。一方、定理 4 とは独立に次の結果を得ることができた。

定理 6 M の法バンドルがアーベル的かつ大域的平坦であるとする。このとき、M が equifocal 部分多様体であることと $\widetilde{M}$ の各連結成分が実等径部分多様体であることは同値である。

主な参考文献

[BV] J. Berndt and L. Vanhecke, *Curvature adapted submanifolds*, Nihonkai Math. J. 3 (1992) 177–185.

[C] E. Cartan, *Families de surfaces isoparamétriques dan les espaces à courbure constante*, Ann. di Mat. 17 (1938), 177-191.

[DN] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, *Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory*, Russian Math. Surveys 44 (1989) 35-124.

[F] E.V. Ferapontov, *Dupin hypersurfaces and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann invariants*, Diff. Geom. and its Appl. 5(1995), 121-152.

[Ha1] J. Hahn, *Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space form*, Math. Z. 187 (1984) 195-208.

[Ha2] J. Hahn, *Isotropy representations of semi-simple symmetric spaces and homogeneous hypersurfaces*, J. Math. Soc. Japan 40 (1988) 271-288.

[HL1] E. Heintze and X. Liu, *A splitting theorem for isoparametric submanifolds in Hilbert space*, J. Differential Geometry 45 (1997) 319-335.

[HL2] E. Heintze and X. Liu, *Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Ann. of Math. 149 (1999) 149-181.

[He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[K1] N. Koike, *On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space*, submitted for publication.

[K2] N. Koike, *Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space*, submitted for publication.

[M] 宮岡礼子, 等径超曲面再訪, 数学 53 (2001) 18-33.
[Pa] R.S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology 2 (1963) 299-340.
[PiTh] U. Pinkall and G. Thorbergsson, *Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Math. Z. 205 (1990) 279-286.
[Te1] C.L. Terng, *Isoparametric submanifolds and their coxeter groups*, J. Differential Geometry 21 (1985) 79-107.
[Te2] C.L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space*, J. Differential Geometry 29 (1989) 9-47.
[TeTh] C.L. Terng and G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces*, J. Differential Geometry 42 (1995) 665-718.