Remarks on the lifespan of smooth solutions to systems of nonlinear Klein-Gordon equations

大阪大学大学院理学研究科 D1　砂川 秀明 (Hideaki SUNAGAWA)

空間 1 次元における非線形 Klein-Gordon 方程式系の初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m_i^2)u_i = F_i(u, \partial u) & t > 0,\ x \in \mathbf{R} \\ u_i(0,x) = \varepsilon f_i(x),\ \partial_t u_i(0,x) = \varepsilon g_i(x) \end{cases} \tag{1}$$

$(i = 1, \cdots, N)$ を考える．ここで, $u = (u_i)_{i=1,\cdots,N}$, $\partial u = (\partial_a u_i)_{a=0,1;i=1,\cdots,N}$, $\partial = (\partial_t, \partial_x) = (\partial_0, \partial_1)$ とする．また，$\varepsilon > 0$ は小さなパラメーター, m_i は正の定数, f_i，$g_i \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ とし，F_i は滑らかな実数値関数であって, ある整数 $p \geq 2$ に対して

$$F_i(u,v) = O\big(|u|^p + |v|^p\big) \ \text{ near } \ (u,v) = 0$$

を満たすとする．本講演で扱うのは $p = 3$ の場合である．また，lifespan $T_\varepsilon = T_\varepsilon(f,g,F) > 0$ を

$$T_\varepsilon := \sup\big\{T > 0 \;\big|\; (1) \text{ を満たす } u \in C^\infty([0,T[\times \mathbf{R}; \mathbf{R}^N) \text{ がただ一つ存在する.}\big\}$$

によって定める.

非線形 Klein-Gordon 方程式の小さい初期値に対する解の大域的存在, 非存在および lifespan に関する研究は数多くなされ, これまでに, 単独 $(N = 1)$ の場合については, 空間次元が 2 以上の場合または空間 1 次元でも $p \geq 4$ の場合には初期値が十分小さければ解は時間大域的に存在することがわかっている．(詳細については例えば [4] およびそこに掲載されている文献を参照のこと.) これに対し, 空間 1 次元で $p \leq 3$ の場合には, 非線形項の形状に応じて解が大域的に存在する場合と有限時間で爆発する場合とがあることが知られている．([1], [2], [4], [5], [9], [10] 等.) 従って, 空間 1 次元, 非線形項 3 次の場合は, 小さい初期値に対する時間大域的存在と非存在について臨界的な場合といえる．一般の 3 次の非線形項に対しては

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon > 0 \quad (\text{ i.e. } T_\varepsilon \geq e^{c/\varepsilon^2}, \quad {}^\exists c > 0)$$

という評価が成り立つが, 非線形項に何らかの制限を課さない限りこれ以上評価はよくならないこと (e^{c/ε^2} のオーダーで爆発する例) が知られている.

さて, Klein-Gordon 方程式以外の非線形方程式に対しても, 解の大域的存在, 非存在は数多く研究されているが, 伝播速度の異なる非線形波動方程式の系

$$(\partial_t^2 - c_i^2 \Delta_x)u_i = F_i(\partial u) \qquad i = 1, \cdots, N$$

に関して, 小さい初期値に対する時間大域的存在と非存在について臨界的な状況では，伝播速度 $\{c_i\}_{i=1,\cdots,N}$ が互いに等しい場合と等しくない場合で lifespan が異なりうることが知られている (Kovalyov [8])．質量 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,N}$ の異なる非線形 Klein-Gordon 方程式の系に対しても類似の現象は起こらないであろうか？これについてはまだ殆ど何も知られていないと思われる[1]．そこで本講演ではこの問題について考えたい.

[1] 最近, 空間 2 次元 非線形項 2 次の場合について, 東北大学の堤誉志雄先生がこれに関連する結果を得ている.[13]

小さいデータを考える限り非線形項のうち 4 次以上は本質的でないので, F_i を $(u, \partial u)$ についての 3 次斉次多項式とし,

$$F_i(u, \partial u) = \sum_{j,k,l=1}^{N} \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma| \le 1} C^{i,j,k,l}_{\alpha,\beta,\gamma} \partial^\alpha u_j \partial^\beta u_k \partial^\gamma u_l$$

と書く. ここに $C^{i,j,k,l}_{\alpha,\beta,\gamma}$ は定数. また,

$$D_{i,j,k,l} := \left\{m_i^2 - (m_j + m_k + m_l)^2\right\}\left\{m_i^2 - (m_j + m_k - m_l)^2\right\}\left\{m_i^2 - (m_j - m_k + m_l)^2\right\}\left\{m_i^2 - (-m_j + m_k + m_l)^2\right\}$$

とおく. 今回, 次の結果を得た.

定理 1　任意の $i,\ j,\ k,\ l,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対して,

$$D_{i,j,k,l} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C^{i,j,k,l}_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$$

を満たすとする. このとき, 初期値問題 (1) の *lifespan* について次が成り立つ :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon = \infty.$$

定理の証明は [3] に基づく.

現在のところ, いくつかの特別な場合については, Katayama [5], Kosecki [7], Tsutsumi [13] のアイデアを用いて大域解の存在を示すことに成功している. 講演ではこのことにも触れたい. ここでは以下の 2 つの場合を挙げておく.

1. F, G は 3 次の非線形項として, 初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + M^2)u = F(v, \partial v), \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)v = G(u, \partial u), \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (\varepsilon f_1, \varepsilon g_1), \ \ (v, \partial_t v)|_{t=0} = (\varepsilon f_2, \varepsilon g_2) \end{cases}$$

を考える. $(M - 3m)(M - m)(3M - m) \neq 0$ のとき, 任意の f_i, $g_i \in C_0^\infty$ に対してある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば解は時間大域的に存在する.

2. 初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + M^2)u = (\partial_t u)^2(\partial_x v), \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)v = (\partial_x u)(\partial_t v)^2, \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (\varepsilon f_1, \varepsilon g_1), \ \ (v, \partial_t v)|_{t=0} = (\varepsilon f_2, \varepsilon g_2) \end{cases}$$

を考える. このとき, 次が成り立つ :

(1) $(M - 3m)(M - m)(3M - m) \neq 0$ のとき, 任意の f_i, g_i に対してある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば

$$T_\varepsilon = \infty.$$

(2) $M = m$ のとき, ある f_i, g_i に対して, ε がどんなに小さくても解は有限時間で爆発し,

$$T_\varepsilon \le \exp\left(\frac{c}{\varepsilon^2}\right).$$

ここに $c\ (< \infty)$ は ε に依存しない定数.

参考文献

[1] J. -M. Delort, Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace, Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire), 16, 563–591(1999).

[2] J. -M. Delort, Existence globale et comportment asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série, 34, 1–16 (2001).

[3] L. Hörmander, Remarks on the Klein-Gordon equation, Jornées equations aux dérivées partielles Saint-Jean-Monts Juin 1987, 1–9.

[4] L. Hörmander, Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations, Springer Verlag, 1997.

[5] S. Katayama, A note on global existence of soluions to nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, J. Math. Kyoto Univ., 39, 203–213(1999).

[6] S. Klainerman, Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions, Comm. Pure. Appl. Math., 38, 631–641(1985).

[7] R. Kosecki, The unit condition and global existence for a class of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Diff. Eq., 100, 257–268(1992).

[8] M. Kovalyov, Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations, J. Diff. Eq., 77, 73–83(1989).

[9] K. Moriyama, Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, Diff. Integral Eq., 10, 499–520(1997).

[10] K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi, Almost global existence of solutions for the quadratic semi-linear Klein-Gordon equation in one space dimension, Funkcialaj Ekvacioj, 40, 313–333(1997).

[11] T. Ozawa, K. Tsutaya and Y. Tsutsumi, Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions, Math. Z. 222, 341–362(1996).

[12] J. Shatah, Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Pure. Appl. Math., 38, 685–696(1985).

[13] Y. Tsutsumi, Private communication.