Application of Local Linking to Asymptotically Linear Wave Equations

数学専攻　　田中　視英子
指導教員　　宮島　静雄

多くの偏微分方程式の解の存在が, 変分問題の解として求められることはよく知られている. その一例として, 多くの著者により, 次の波動方程式 (WE) の周期解が調べられてきた:

$$\text{(WE)} \quad \begin{cases} \Box u(x,t) = h(x,t,u) & (0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}), \\ u(x,t+2\pi) = u(x,t) & (0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

ここで, $\Box = \partial_{tt} - \partial_{xx}$ である. 最近 Bartsch-Ding [1] は local linking の方法と有限次元空間による近似法により, この場合を含む方程式を扱った.

この方程式の非自明解は, 次の Hilbert 空間 E 上の汎関数 Φ の 0 以外の臨界点として得られる:

$$E := \left\{ u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{kj} \sin(jx) e^{ikt} \ :\ \overline{u_{kj}} = u_{-kj},\ \|u\|_E < \infty \right\},$$

$$\|u\|_E^2 := \pi^2 \sum_{j \neq |k|} |j^2 - k^2| \cdot |u_{kj}|^2 + \pi^2 \sum_{j \neq |k|} |u_{kj}|^2,$$

$$\Phi(u) := \frac{1}{2} \int_Q (u_x^2 - u_t^2) dxdt - \int_Q dxdt \int_0^{u(x,t)} h(x,t,s) ds \quad (Q := (0,\pi) \times (0,2\pi)).$$

[1] では h として次の (h1)–(h3) を満たすものを考え, 更に, 追加的な仮定の下で (WE) の非自明解の存在を示している:

(h1) h は連続で, $h(x,t+2\pi,\xi) = h(x,t,\xi)$ $((x,t,\xi) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}^2)$,
(h2) h は ξ に関して単調増加で, $h(x,t,\xi) \neq 0$ $(\xi \neq 0)$,
(h3) ある $b_0 \geq 0$, $b > 0$ が存在し, 次を満たす:
$g_0(x,t,\xi) := h(x,t,\xi) - b_0\xi = o(|\xi|)$ as $\xi \to 0$ uniformly in (x,t),
$g(x,t,\xi) := h(x,t,\xi) - b\xi = o(|\xi|)$ as $|\xi| \to \infty$ uniformly in (x,t).

b, b_0 が $\sigma(\Box)$ に属するときが特に微妙で, [1] では $b \in \sigma(\Box)$ のときは g が有界の場合に限定されている. そこで, この論文では [1] の不備を補う他 [1, Theorem 2.1] を一般化することにより, 例えば, $b \in \sigma(\Box)$ で $b_0 < b$ のときに g が有界でなく, 次の仮定 $(*)$ を満たす場合にも (WE) の非自明解の存在を示すことができた.

$$(*) \quad \begin{cases} 0 < \alpha \leq \beta < 1 \ (\beta - \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}),\ c_1, c_2 > 0,\ d_1, d_2 \geq 0 \text{ が存在して次を満たす}: \\ c_1|\xi|^\alpha - d_1 \leq |g(x,t,\xi)| \leq c_2|\xi|^\beta + d_2. \end{cases}$$

参考文献

[1] T. Bartsch and Y. H. Ding, *Critical-Point Theory with Applications to Asymptotically Linear Wave and Beam Equations*, Differential and Integral Equations **13**(2000), 973–1000.