Besov型ノルムによる２次元及び３次元半線型 Schrödinger方程式の初期値問題の解の存在証明

田岡志婦 (中央大学理工学研究科博士後期課程２年)

一次元半線型 Schrödinger 方程式の初期値問題,

$$\begin{cases} \partial_t u = i\partial_x^2 u + N(u,\bar{u}), & x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

について，Kenig-Ponce-Vega (Trans.A.M.S. 348 (1996),3323-3353) は $N(u,\bar{u}) = c_1u^2 + c_2\bar{u}^2$ のとき $u_0 \in H^s(s > -3/4)$ で，$N(u,\bar{u}) = cu\bar{u}$ のとき $u_0 \in H^s(s > -1/4)$ で，時間局所解の存在を，Bourgain の Fourier restriction norm を使って，bilinear estimate

$$\|fg\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|f\|_{X_{s,b}}\|g\|_{X_{s,b}}, \tag{2}$$

$$\|\bar{f}\bar{g}\|_{X_{s,b-1}} \leq c\|f\|_{X_{s,b}}\|g\|_{X_{s,b}}. \tag{3}$$

を示すことによって証明した．

また，Colliander-Delort-Kenig-Staffilani (Trans.A.M.S. 353 (2001), 3307-3325) は，同様の方法で二次元半線型 Schrödinger 方程式,

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + N(u,\bar{u}), & x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

について，$N(u,\bar{u}) = c_1u^2 + c_2\bar{u}^2$ のとき $u_0 \in H^s(s > -3/4)$ で, $N(u,\bar{u}) = cu\bar{u}$ のとき $u_0 \in H^s(s > -1/4)$ で，時間局所解の存在を示した．

我々は，一次元半線型 Schrödinger 方程式 (1) に関して Besov 型ノルムを使うことにより，よい結果を得た．そこでこの方法と全く同様にして, すなわち Besov 型ノルムを使うことにより Fourier restriction norm で得た評価と類似の評価を得，縮小写像の原理を用いて時間局所解の存在を証明するという方法で，2 次元及び 3 次元半線型 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + N(u,\bar{u}), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, (n = 2,3) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{5}$$

を扱う．ただし，$N(u,\bar{u}) = c\bar{u}^2$ とする．

次に Besov 型ノルムの定義と主な結果を述べる．

定義 1 ρ を $\mathbb{R}_+$ 上の重みの関数, $b \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $P(\xi)$ を C^∞ 級実数値関数として，$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ に対して，

$$\|f\|_{B^{(\rho,b)}_{p,q,P}} := \|\{\rho(2^j)2^{bk}\|f_{jk}(x,t)\|_{L^p(R^{d+1})}\}\|_{\ell^q} \tag{6}$$

と定義し，空間 $B^{(\rho,b)}_{p,q,P}(\mathbb{R}^{d+1})$ をこのノルムが有限な $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ の全体と定義する.
特に，$\rho(t) = t^s$ のとき $B^{(s,b)}_{p,q,P}(\mathbb{R}^{d+1})$ と書く.
ただし, $\hat{f}_{jk}(\xi,\tau) = \varphi_j(|\xi|)\varphi_k(\tau - P(\xi))\hat{f}(\xi,\tau)$ で, $\varphi_j(z), j = 0,1,\cdots$ は次をみたす $z \in \mathbb{R}$ の C^∞ 級関数である.

$$\begin{aligned}
&\varphi_j(z) = \varphi_j(-z), \mathrm{supp}\varphi_0 \subset \{z; |z| < 2\}, \mathrm{supp}\varphi_1 \subset \{z; 1 < |z| < 4\},\\
&\varphi_k(z) = \varphi_1(2^{-k+1}z), (for\ ), k \ge 1 \ \ \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(z) = 1.
\end{aligned}$$

また，ℓ^q は (j,k) を添字とする数列についての ℓ^q 空間である.

定理 1 $P(\xi) = \pm|\xi|^2$, $\rho(t) = \log(2+t)t^{-3/4}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ とすると，

$$\|\bar{f}\bar{g}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \le \left\{\begin{array}{c} c\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}, \\ c\{\|f\|_{B^{(s,b)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}} + \|f\|_{B^{(s,1/2)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(s,b)}_{2,1,P}}\}, \end{array}\right. \tag{7}$$

が成り立つ. ただし，$b > 1/2$ とする.

定理 2 $-1/2 \le s < 0$, $\rho(t) = \log(2+t)t^s$, $P(\xi) = |\xi|^2\ or\ -|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ とすると，

$$\|\bar{f}\bar{g}\|_{B^{(\rho,-1/2)}_{2,1,P}} \ \le \ c\|f\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P}}\|g\|_{B^{(\rho,1/2)}_{2,1,P}}, \tag{8}$$

が成り立つ. ただし，$b > 1/2$ とする.

主定理 1
$n = 2$, $N(u,\bar{u}) = c\bar{u}^2$, $u_0 \in B^{-3/4}_{2,1}(\mathbb{R}^2)$ と仮定すると，初期条件 $u(x,0) = u_0(x)$ で，$|t| \le T$ のとき，方程式 (5) を満たす $T = T(\|u_0\|_{B^{-3/4}_{2,1}(\mathbb{R}^2)})$ と $u(x,t) \in B^{(-3/4,1/2)}_{2,1,|\xi|^2}(\mathbb{R}^3)$ が存在する.
主定理 2
$n = 3$, $N(u,\bar{u}) = c\bar{u}^2$, $u_0 \in B^{\rho}_{2,1}(\mathbb{R}^3)$ と仮定すると，初期条件 $u(x,0) = u_0(x)$ で，$|t| \le T$ のとき，方程式 (5) を満たす $T = T(\|u_0\|_{B^{\rho}_{2,1}(\mathbb{R}^3)})$ と $u(x,t) \in B^{(\rho,1/2)}_{2,1,|\xi|^2}(\mathbb{R}^4)$ が存在する.
ただし，$\rho(t) = \log(2+t)t^{-1/2}$ とする.